SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Jean-Marc Delort

L'équation de Klein Gordon à données petites

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° V, 13 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A5_0>

1 L'équation de Klein-Gordon à données petites.

Soient u_0 et u_1 deux fonctions régulières sur

prouvée par Klainerman [4] et Shatah [9]. Reprenant et précisant les estimations de Klainerman, Hörmander [3] a montré qu'en dimension 2, le temps d'existence T_ε de la solution vérifie $\underline{\lim}\ \varepsilon \log T_\varepsilon = +\infty$ et a conjecturé l'existence globale. Ce résultat a été obtenu par Georgiev-Popivanov [2] pour certaines non-linéarités, puis par Kosecki [6] pour toute non linéarité vérifiant une condition nulle convenable. L'existence globale pour toute non linéarité a été obtenue par Simon et Taflin [10] par des techniques d'algèbres de Lie. Une preuve plus analytique, reposant sur l'utilisation de l'inégalité d'énergie et des "champs de Klainerman", a été récemment publiée par Ozawa, Ttsutaya et Tsutsumi [8]. En dimension 1, Hörmander a prouvé que, pour des données C^∞ à support compact, $\underline{\lim}\ \varepsilon\sqrt{T_\varepsilon} = +\infty$, et a conjecturé que la solution existe sur un intervalle de temps de l'ordre de e^{c/ε^2} (et qu'elle est même globale pour certaines non linéarités). Cette conjecture a été démontrée dans le cas semilinéaire par Moriyama, Tonegawa et Tsutsumi [7], pour des données assez régulières, et assez décroissantes à l'infini.

Nous nous proposons ici de revenir sur ce problème, en dimension 1, pour des données *faiblement décroissantes à l'infini* (i.e. dont le comportement à l'infini n'est pas meilleur que celui d'une fonction L^2).

On considère ici le système semi-linéaire en dimension 1 d'espace

$$(1) \qquad \left| \begin{array}{l} \Box U + U = F(U, \partial_t U, \partial_x U) \\ U_{|t=0} = \varepsilon U_0 \\ \partial_t U_{|t=0} = \varepsilon U_1 \end{array} \right.$$

où $U(t,x) = (u_1(t,x), \cdots, u_m(t,x))$ est définie sur un ouvert de $\mathbf{R}^2$, à valeurs dans $\mathbf{R}^m$, et où F est de la forme suivante :

$$(2) \qquad F(U, \partial_t U, \partial_x U) = G_0(U) + \sum_{1\le i\le j\le m} G^1_{ij}(U) q_1(\partial_t u_i, \partial_x u_i\ ;\ \partial_t u_j, \partial_x u_j)$$

$$+ \sum_{1\le i<j\le m} G^2_{ij}(U) q_2(\partial_t u_i, \partial_x u_i\ ;\ \partial_t u_j, \partial_x u_j)$$

où $q_1(T,X;T',X') = TT' - XX'$, $q_2(T,X;T',X') = TX' - T'X$, G^0, G^1_{ij}, G^2_{ij} sont des polynômes en U, G_0 étant nul à l'ordre 2 en $U = 0$. On suppose donc F combinaison linéaire de "formes nulles" telles qu'elles sont définies par Kosecki dans [6].

Théorème 1 *Soit $N \geq 3$ un entier fixé. Il existe $C > 0$ tel que pour tout couple (U_0, U_1) dans la boule unité de $H^N(\mathbf{R}) \times H^{N-1}(\mathbf{R})$, le problème (2) admette, pour $\varepsilon \in]0,1[$, une unique solution $U \in C^0(]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[, H^N) \cap C^1(]-T_\varepsilon, T_\varepsilon[, H^{N-1})$, dont le temps d'existence T_ε vérifie $T_\varepsilon > c\varepsilon^{-4}|\log \varepsilon|^{-6}$.*

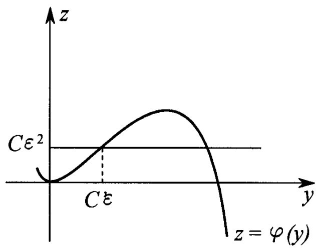
Dans le cas où la non linéarité F est de la forme $\nabla_U G(U)$ pour une fonction C^∞ G, nulle à l'ordre 3 en 0, on a un meilleur résultat :

Théorème 2 *Supposons $F(U) = \nabla_U G(U)$. Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour toutes fonctions (U_0, U_1) dans la boule unité de $H^1(\mathbf{R}; \mathbf{R}^m) \times L^2(\mathbf{R}, \mathbf{R}^m)$ le problème (2) admette, pour $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$, une unique solution $U \in C^0(\mathbf{R}, H^1) \cap C^1(\mathbf{R}, L^2)$.*

Démonstration : Comme $H^1(\mathbf{R})$ est une algèbre, l'existence locale est claire. Posons

$$E(U,t) = \frac{1}{2}\int ((\partial_t U)^2 + (\partial_x U)^2 + U^2)dx - \int G(U(t,x))dx \ . \tag{3}$$

On vérifie que, pour tout t dans le domaine d'existence de la solution, $E(U,t) = E(U,0) = 0(\varepsilon^2)$. Comme $|\int G(U(t,x))dx| \leq C_1 \|U(t,.)\|^3_{H^1}$, si l'on pose $g(t) = (\|U(t,.)\|^2_{H^1} + \|\partial_t U(t,.)\|^2_{L^2})^{1/2}$ et $\varphi(y) = \frac{1}{2}y^2 - C_1 y^3$, il résulte de (4) que l'on a $\varphi(g(t)) \leq E(U,0) \leq C\varepsilon^2$ pour tout t dans l'intervalle d'existence de la solution locale.



Comme $y(0) = 0(\varepsilon)$ on a, pour tout t dans le domaine d'existence de la solution, $y(t) \leq C'\varepsilon$ où C' est définie par la figure. L'existence globale en résulte.

Pour prouver le théorème 1, on ne dispose pas de quantité conservée, et on va démontrer le théorème par réduction à un résultat d'existence locale. Si $h > 0$ est un paramètre, posons $U^h(t,x) = U(t/h, x/h)$, $U^h_j(x) = U_j(x/h)$ $j = 0, 1$. Alors U est solution de (2) si et seulement si U^h vérifie

$$\left| \begin{array}{l} \Box U^h + \frac{1}{h^2}U^h = \frac{1}{h^2}F(U^h, h\partial_t U^h, h\partial_x U^h) \\ U^h_{|t=0} = \varepsilon U^h_0 = V^h \\ \partial_t U_{|t=0} = \frac{\varepsilon}{h}U^h_1 = W^h. \end{array} \right. \tag{4}$$

Notons pour $s \in \mathbf{R}\,, N \in \mathbf{N}\,, H^s_N(\mathbf{R})$ l'espace des fonctions $(U^h)_{h\in]0,\frac{1}{2}[}$, qui sont dans L^2 à h fixé et vérifient en outre

$$(5) \qquad \|(U^h)_h\|^2_{H^s_N} \stackrel{\mathrm{def}}{=} \sup_h \left(\int |\widehat{U}^h(\xi)|^2(1+h|\xi|)^{2N} d\xi h^{-2s} |\log h|^3 \right) < +\infty\ .$$

Le théorème 1 va résulter de :

Théorème 3 *Soit $N \geq 3$ un entier fixé. Il existe $\delta > 0$ tel que pour tout couple (V^h, W^h) dans $H^{3/4}_N \times H^{-1/4}_{N-1}$, de norme dans cet espace majorée par δ, le problème (5) admette une unique solution $(U^h)_h \in C^0(]-1,1[, H^{3/4}_N) \cap C^1(]-1,1[, H^{-1/4}_{N-1})$.*

Ce théorème entraîne le théorème 1 : Si on lie ε et h par la relation $\varepsilon = \alpha h^{1/4}|\log h|^{-3/2}$, on vérifie que $V^h = \varepsilon U^h_0 \in H^{3/4}_N$ et que $W^h \in H^{-1/4}_{N-1}$ avec une norme dans ces espaces en $0(\alpha)$. Pour $\alpha \ll \delta$ on obtient donc une solution U^h à (5) qui fournit par changement d'échelle une solution à (2) définie sur un intervalle $]-1/h, 1/h[$ avec $1/h \sim C\varepsilon^{-4}|\log \varepsilon|^{-6}$.

Remarque : Le fait que U_0 et U_1 ne soient que faiblement décroissantes à l'infini empêche d'utiliser, dans la preuve du théorème 3, une quelconque régularité de la solution par rapport à la rotation hyperbolique $t\partial_x + x\partial_t$. Les estimations qui vont nous permettre de prouver le théorème ne vont pouvoir reposer que sur l'utilisation de la courbure de la variété caractéristique, par une méthode similaire à celle de Bourgain [1], dans le cas de l'équation de Schrödinger périodique, et de Klainerman-Machedon [5] pour l'équation des ondes.

2 Espaces de Sobolev 2-microlocaux et produits de distributions.

La variété caractéristique de l'équation de Klein-Gordon semi-classique que nous considérons est donnée par $\tau^2 = \frac{1}{h^2} + \xi^2$. Introduisons, comme Bourgain [1] ou Klainerman-Machedon [5] l'espace de Sobolev 2-microlocal associé. Notons

$$(6) \qquad \Phi^{\pm}_{jk}(\tau,\xi) = \mathbf{1}_{\{\pm\tau>0\}}\mathbf{1}_{\{2^{j-1}<|\xi|<2^j\}}\mathbf{1}_{\{2^{k-1}<|\tau\mp\sqrt{1/h^2+\xi^2}|<2^k\}}$$

pour $j > 0\,, k > 0$ et définissons de même $\Phi^{\pm}_{j0}$ ou $\Phi^{\pm}_{0k}$ en remplaçant la troncature sur une couronne par $\mathbf{1}_{\{|\tau\mp\sqrt{1/h^2+\xi^2}|<1\}}$ ou $\mathbf{1}_{\{|\xi|<1\}}$ respectivement. Pour $u \in L^2(\mathbf{R}^2)$, posons $\Delta^{\pm}_{jk}u = \mathcal{F}^{-1}(\Phi^{\pm}_{jk}\hat{u})$. On a $Id = \sum_{jk}\Delta^+_{jk} + \sum_{jk}\Delta^-_{jk}$.

Définition 4 *Soient* $s, s' \in \mathbf{R}$, $N \in \mathbf{N}$. *On dit qu'une famille* $(u^h)_h$ *est dans* $H_N^{s,s'}$ *si et seulement si, pour tout* h *fixé,* $u_h \in L^2(\mathbf{R}^2)$ *et s'il existe une constante* $C > 0$*, et une suite* $(c_{jk}(h))_{jk}$ *vérifiant* $\Sigma_j(\Sigma_k|c_{jk}(h)|)^2 \leq 1$ *telle que*

$$\|\Delta^{\pm}_{jk}u_h\| \leq Ch^s|\log h|^{-3/2}2^{-ks'}(1 + 2^j h + 2^k h)^{-N} \tag{7}$$

pour tous j, k *et tout* $h \in]0, \frac{1}{2}[$, $\|.\|$ *désignant la norme* L^2.

On utilisera ici ces espaces essentiellement dans le cas $s = \frac{3}{4}$ et on posera alors $\hbar^{3/4} = h^{3/4}|\log h|^{-3/2}$. On écrira $j \ll j'$ si $j \leq j' - 2$ et $j \sim j'$ si $|j - j'| \leq 3$. Alors, si un produit $\Delta^{\pm}_{j''k''}((\Delta^{\pm}_{jk}u)(\Delta^{\pm}_{j'k'}v))$ n'est pas identiquement nul, on a soit $j \ll j' \sim j''$, soit $j' \ll j \sim j''$, soit $j'' - 5 \leq j \sim j'$.

Le premier problème à résoudre pour prouver le théorème 3 est l'obtention d'estimations précises pour $\Delta^{\pm}_{j''k''}((\Delta^{\pm}_{jk}u)(\Delta^{\pm}_{j'k'}v))$ lorsque u et v sont dans $H_N^{3/4,1/2}$. C'est l'objet de la proposition suivante :

Proposition 5 *Il existe une constante* $C > 0$ *telle que pour tous indices* j, j', j'', k, k', k'' *vérifiant* $k' \leq k \leq k''$ *et toutes fonctions* u, v *dans* $L^2(\mathbf{R}^2)$ *on ait*

$$\|\Delta^{\pm}_{j''k''}((\Delta^{+}_{jk}u)(\Delta^{+}_{j'k'}v))\| \leq \tag{8}$$

$$C2^{k'/2}\inf(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{k/4}(1 + 2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4})\|\Delta^{+}_{jk}u\| \; \|\Delta^{+}_{j'k'}v\|$$

où $\tilde{\jmath} = \min(j, j', j'')$.

Dans l'estimation (9), l'inégalité obtenue en ne retenant que le premier argument de la borne inférieure résulte de l'inégalité élémentaire qui affirme que l'on peut contrôler la norme L^∞ de $\Delta^{+}_{jk}u$ à partir de $2^{j/2+k/2}\|\Delta^{+}_{jk}u\|_{L^2}$ i.e. en perdant une demi-dérivée en x et une demi-dérivée en t. L'inégalité (9) sera obtenue en exploitant la courbure de la variété caractéristique et en utilisant la méthode d'orthogonalité mise au point par Bourgain [1] pour l'équation de Schrödinger et par Klainerman-Machedon [5] pour l'équation des ondes. Le terme $h^{-1/4}2^{k/4}$ dans (9) représente la perte en dérivées remplaçant $2^{\tilde{\jmath}/2}$: il signifie que l'on peut remplacer une perte d'un quart de dérivée par rapport à toutes les variables par un quart de dérivées relativement à l'involutive donnée par la variété caractéristique. Le facteur $(1 + 2^{\tilde{\jmath}}h)^{3/4}$ provient du fait que la courbure de la variété caractéristique s'annule lorsque la fréquence tend vers l'infini. Ce facteur de perte sera compensé dans les estimations permettant de prouver le théorème 3 par le fait qu'un élément de $H_N^{3/4}$ peut être dérivé N fois par rapport à $h\partial$.

Démonstration de la proposition : Notons $f = \Delta^+_{jk} u \, , g = \Delta^+_{j'k'} v$. La transformée de Fourier de l'expression à estimer s'écrit

$$(9) \qquad \Phi_{j''k''}(\tau, \xi) \int \hat{f}(\tau - \tau', \xi - \xi')\hat{g}(\tau', \xi') d\tau' d\xi' \ .$$

Soit (τ, ξ, τ', ξ') dans le support de l'intégrant. On a alors $(\tau', \xi') \in \text{Supp } \Phi^+_{j'k'}$, $(\tau - \tau' \, , \xi - \xi') \in \text{Supp } \Phi^+_{jk}$. Ecrivons

$$\tau = \tau - \tau' - \sqrt{1/h^2 + (\xi - \xi')^2} + \tau' - \sqrt{1/h^2 + \xi'^2} + F(\xi, \xi')$$

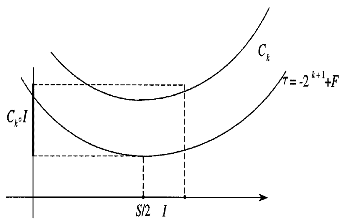
avec $F(\xi, \xi') = \sqrt{1/h^2 + (\xi - \xi')^2} + \sqrt{1/h^2 + \xi'^2}$. On a donc, puisque $k' \leq k \, , |\tau - F(\xi, \xi')| \leq 2.2^k$. Si l'on pose, pour ξ fixé,

$$C_k = \{(\tau, \xi') \ ; \ |\tau - F(\xi, \xi')| \leq 2^{k+1}\}$$

on constate que, pour I intervalle de $\mathbf{R}$, et ξ fixé,

$$\int_{\xi' \in I} \hat{f}(\tau - \tau', \xi - \xi')\hat{g}(\tau', \xi') d\tau' d\xi'$$

n'est pas identiquement nulle seulement lorsque $\tau \in C_k \circ I = \{\tau ; \exists \ \xi' \in I$ avec $(\tau, \xi') \in C_k\}$.



La méthode de Bourgain [1] consiste à écrire l'espace des ξ' comme réunion disjointe d'intervalles I_ℓ, de longueur aussi petite que possible, et tels que les $C_k \circ I_\ell$ soient deux à deux disjoints pour $|\ell - \ell'| \geq 2$, ce qui entraîne que les intégrales correspondantes définissent une famille de fonctions presque orthogonales dans $L^2(d\xi d\tau)$.

Pour prouver la proposition, il convient d'appliquer l'idée précédente d'une part lorsque ξ' décrit un voisinage du point critique $\xi' = \frac{\xi}{2}$ de $F(\xi, .)$, et d'autre part lorsqu'il reste hors d'un tel voisinage. Nous allons traiter uniquement la première situation i.e. étudier l'intégrale

$$(10) \qquad \widehat{W}(\tau, \xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau, \xi) \int_{|\eta| < |\xi|/100} \hat{f}(\tau - \tau', \frac{\xi}{2} - \eta)\hat{g}(\tau', \frac{\xi}{2} + \eta) d\tau' d\eta \ .$$

Nous utiliserons :

Lemme 6 *Il existe $c > 0$ telle que pour tous η_1, η_2 de même signe, vérifiant $|\eta_1| < |\xi|/100$, $|\eta_2| < |\xi|/100$ on ait*

$$|F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_1) - F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_2)| \geq \frac{ch}{(1 + h|\xi|)^3} |\eta_1^2 - \eta_2^2| \ . \tag{11}$$

Ecrivons alors $\widehat{W}(\tau, \xi) = \Phi^{\pm}_{j''k''}(\tau, \xi)(\sum_{\ell \in \mathbf{N}}(\hat{w}_\ell^+ + \hat{w}_\ell^-))$ où

$$\hat{w}_\ell^{\pm}(\tau, \xi) = \int_{|\eta| < |\xi|/100} \hat{f}(\tau - \tau', \xi/2 - \eta)\hat{g}(\tau', \xi/2 + \eta)\mathbf{1}_{\{\sqrt{\ell}L < \pm\eta < \sqrt{\ell+1}L\}} d\tau' d\eta$$

où $L = \frac{4}{\sqrt{c}} 2^{k/2} h^{-1/2} (1 + 2^{j''} h)^{3/2}$, c désignant la constante de (12). Si (τ, ξ) est dans le support de $\Phi^{\pm}_{j''k''}\hat{w}_\ell^+$ et dans celui de $\Phi^{\pm}_{j''k''}\hat{w}_{\ell'}^+$ avec $|\ell - \ell'| \geq 2$, il existe $(\tau_1', \eta_1), (\tau_2', \eta_2)$ avec $(\tau - \tau_m', \frac{\xi}{2} - \eta_m) \in$ Supp $\Phi^+_{jk}, m = 1, 2, (\tau_m', \frac{\xi}{2} + \eta_m) \in$ Supp $\Phi^+_{j'k'}, m = 1, 2, \sqrt{\ell}L \leq \eta_1 \leq \sqrt{\ell + 1}L, \sqrt{\ell'}L \leq \eta_2 \leq \sqrt{\ell' + 1}L$.

Ecrivant

$$F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_1) - F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_2) =$$

$$\sqrt{1/h^2 + (\xi/2 - \eta_1)^2} - (\tau - \tau_1') + \sqrt{1/h^2 + (\frac{\xi}{2} + \eta_1)^2} - \tau_1'$$

$$-\sqrt{1/h^2 + (\xi/2 - \eta_2)^2} + (\tau - \tau_2') - \sqrt{1/h^2 - (\frac{\xi}{2} + \eta_2)^2} + \tau_2'$$

on constate que $|F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_1) - F(\xi, \frac{\xi}{2} + \eta_2)| \leq 4.2^k$. Comme $|\xi| \sim 2^{j''}$, (12) permet de minorer cette même quantité par

$$\frac{ch}{(1 + h2^{j''})^3} |\eta_1^2 - \eta_2^2| \geq \frac{ch}{(1 + h2^{j''})^3} L^2 \geq 8.2^k \tag{12}$$

par choix de L, d'où une contradiction. Par conséquent, les $\hat{w}_\ell^+$ (resp. $\hat{w}_\ell^-$) sont deux à deux presque orthogonaux. On a donc

$$\| \sum_\ell \Phi^+_{j''k''} \hat{w}_\ell^+ \|^2_{L^2} \leq 5 \sum_\ell \| \Phi^{\pm}_{j''k''} \hat{w}_\ell^+ \|^2_{L^2} \tag{13}$$

et de même pour $\hat{w}_\ell^-$. Par définition de $\hat{w}_\ell^+$:

$$|\Phi^{\pm}_{j''k''} \hat{w}_\ell^+(\tau, \xi)| \leq \int_{|\eta| < |\xi|/100} |\hat{f}(\tau - \tau', \frac{\xi}{2} - \eta)||\hat{g}(\tau', \frac{\xi}{2} + \eta)| \mathbf{1}_{\{\sqrt{\ell}L < \eta < \sqrt{\ell+1}L\} d\eta d\tau'}$$

$$\leq \left(\int |\hat{f}(\tau - \tau', \xi/2 - \eta)|^2 |\hat{g}(\tau', \frac{\xi}{2} + \eta)|^2 \mathbf{1}_{\{\sqrt{\ell}L < \eta < \sqrt{\ell+1}L\}} d\tau' d\eta \right)^{1/2} (\frac{2^{k'} L}{\sqrt{\ell + 1}})^{1/2}$$

compte-tenu du domaine de variation de τ' et η dans l'intégrale. On a donc une majoration de (14) par $c2^{k'}L\|\hat{f}\|^2_{L^2}\|\hat{g}\|^2_{L^2}$. Compte-tenu de la valeur de L, la contribution de $\widehat{W}$ à (9) s'estime par la quantité voulue, en utilisant que sur le domaine d'intégration de (11), $j \sim j' \sim j''$. La proposition s'obtient en combinant l'estimation de W qui vient d'être obtenue avec une estimation analogue de la contribution à (10) de l'intégration pour $|\xi' - \frac{\xi}{2}| > \frac{|\xi|}{100}$.

Le même type d'arguments permet de prouver :

Proposition 7 *Avec les notations de l'énoncé de la proposition 5 :*

$$\|\Delta^{\pm}_{j''k''}((\Delta^{+}_{jk}u)(\Delta^{-}_{j'k'}v))\| \tag{14}$$

$$\leq c2^{k'/2}\inf(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{k/4}(1+h\inf(2^{j}, 2^{j'}))^{3/4})\|\Delta^{+}_{jk}u\|\ \|\Delta^{-}_{j'k'}v\|.$$

On remarquera que lorsque $j'' \ll j$ et $j'' \ll j'$ (i.e. dans le cas de l'estimation correspondant à l'interaction microlocale non linéaire de deux directions presque opposés) l'estimation (15) est strictement plus mauvaise que (9). Utilisant une méthode de dualité, il est aisé de déduire des propositions 5 et 7 une majoration valable pour tout triplet d'indices : Soient $(k, k', k''), (j, j', j'')$ des éléments de $\mathbf{N}^3$ et $(e, e', e'') \in \{+, -\}^3$. Notons (k_1, k_2, k_3), $(j_1, j_2, j_3), (e_1, e_2, e_3)$ les images de ces éléments par une même permutation de $\mathfrak{S}_3$ telle que $k_3 \geq k_2 \geq k_1$. On a alors :

Théorème 8 *Il existe $C > 0$ telle que pour tous triplets de la forme précédente et toutes fonctions u, v dans $L^2(\mathbf{R}^2)$ on ait :*

i) Si $k_3 = k''$ et $e_1 \neq e_2$ ou bien $k_3 \neq k''$ et $e_1 = e_2$ on a

$$\|\Delta^{e''}_{j''k''}((\Delta^{e'}_{j'k'}v)(\Delta^{e}_{jk}u))\| \leq$$

$$C\inf(2^{\tilde{\jmath}/2}, h^{-1/4}2^{\sup(k_1,k_2)/4}(1+h\inf(2^{j_1}, 2^{j_2}))^{3/4}) \tag{15}$$

$$\times 2^{\inf(k_1,k_2)/2}\|\Delta^{e'}_{j'k'}v\|\ \|\Delta^{e}_{jk}u\|\ .$$

ii) Dans les autres cas, on a l'estimation obtenue en remplaçant dans (16) $\inf(2^{j_1}, 2^{j_2})$ *par* $2^{\tilde{\jmath}}$.

3 Preuve du théorème d'existence.

Le théorème 3 va s'obtenir par un point fixe, et l'étape essentielle consiste à montrer que si $(U^h)_h$ est dans $H_N^{3/4,1/2}$, $\frac{1}{h^2}F(U^h, h\partial_t U^h, h\partial_x U^h)$ est dans $H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$. Commençons par étudier le cas des nonlinéarités quadratiques :

$$
\begin{aligned}
&B(u,v) = \tfrac{1}{h^2}uv \\
(16)\qquad &B(u,v) = (\partial_t u)(\partial_t v) - (\partial_x u)(\partial_x v) \\
&B(u,v) = (\partial_t u)(\partial_x v) - (\partial_x u)(\partial_t v)\ .
\end{aligned}
$$

Théorème 9 *Soit $N \geq 3$ un entier fixé. L'application $(u,v) \to B(u,v)$ est bilinéaire continue de $H_N^{3/4,1/2} \times H_N^{3/4,1/2}$ dans $H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$.*

Pour démontrer le théorème, écrivons pour tout $e'' = \pm$:

$$
(17)\qquad \Delta^{e''}_{j''k''}(B(u,v)) = \sum_{e,e'}\sum_{j,j'}\sum_{k,k'} \Delta^{e''}_{j''k''}(B(\Delta^e_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v))\ .
$$

Il faut montrer une estimation de la forme

$$
(18)\qquad \|\Delta^{e''}_{j''k''}(B(u,v))\| \leq C c_{j''k''}(h) h^{-1/4} 2^{k''/2}(1 + 2^{j''}h + 2^{k''}h)^{-N+1}
$$

avec $\sum_{j''}(\sum_{k''}|c_{j''k''}|)^2 \leq 1$. Pour cela, on utilise les estimations du théorème 8, les hypothèses de structure sur B, et la régularité supposée de u et v. Nous allons nous limiter à l'étude de la somme suivante :

$$
(19)\qquad \sum_{j,j'}\sum_{\substack{k' \leq k \\ k'' \leq k}} \|\Delta^{e''}_{j''k''}(B(\Delta^e_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v))\|
$$

lorsque $e'' = e'$. La transformée de Fourier de $\Delta^{e''}_{j''k''}(B(\Delta^e_{jk}u, \Delta^{e'}_{j'k'}v))$ s'écrit

$$
(20)\qquad \Phi^{e''}_{j''k''}\int b_h(\tau,\tau',\xi,\xi')\widehat{\Delta^e_{jk}u}(\tau-\tau',\xi-\xi')\widehat{\Delta^{e'}_{j'k'}v}(\tau',\xi')d\tau' d\xi'
$$

avec $b_h(\tau,\tau',\xi,\xi') = \frac{1}{h^2}$ ou $(\tau-\tau')\tau' - (\xi-\xi')\xi'$ ou $(\tau-\tau')\xi' - (\xi-\xi')\tau'$. La forme particulière des nonlinéarités entraîne le lemme suivant :

Lemme 10 *Supposons $k' \leq k$, $k'' \leq k$. Sur le support de l'intégrant de (21) on a*

$$
(21)\qquad |b(\tau,\tau',\xi,\xi')| \leq \frac{c}{h}2^{\sup(k',k'')}(1 + 2^{j'}h + 2^{k'}h + 2^{j''}h + 2^{k''}h)
$$

$$
+\frac{c}{h^2}(1 + 2^{\tilde{j}}h)(1 + 2^{j}h).
$$

Traitons uniquement la contribution du second terme du membre de droite de (22) à la majoration de la norme L^2 de (21). On obtient une estimation en

$$(22)\quad \frac{C}{h^2}(1+2^{\tilde{j}}h)(1+2^j h)h^{-1/4}2^{\sup(k',k'')/4}(1+h\inf(2^{j'},2^{j''}))^{3/4}2^{\inf(k',k'')/2}$$

$$\times c_{jk}\hbar^{3/4}2^{-k/2}(1+2^j h+2^k h)^{-N}c'_{j'k'}\hbar^{3/4}2^{-k'/2}(1+2^{j'}h+2^{k'}h)^{-N}$$

en utilisant (21), (16) et (8) (en fait on utilise la version un peu plus générale de (16) où le produit usuel est remplacé par une forme bilinéaire $B(.,.)$, version qui se démontre comme (16)). On somme les quantités (23) pour k,k' vérifiant $k'\leq k$ et $k''\leq k$ et en j,j' vérifiant $j\ll j'\sim j''$ ou $j'\ll j\sim j''$ ou $j''-5\leq j\sim j'$.

On obtient une estimation en

$$(23)\qquad h^{-1/4}|\log h|^{-3/2}2^{k''/2}(1+2^{j''}h+2^{k''}h)^{-N+1}d_{j''k''}$$

avec

$$(24) \qquad d_{j''k''} \leq \sum_{j,j'} \sum_{k,k'} |\log h|^{-3/2} h^{-1/2} (1 + h \inf(2^{j'}, 2^{j''}))^{3/4} 2^{-\frac{k}{2}}$$

$$\times (1+2^j h+2^k h)^{-N}(1+2^{j'} h+2^{k'} h)^{-N}(1+2^{j''} h+2^{k''} h)^{N-1}(1+2^{\tilde{\jmath}} h)(1+2^j h) c_{jk} c'_{j'k'}$$

les restrictions sur les indices de sommation étant les mêmes que ci-dessus, et on doit prouver que

$$(25) \qquad \sum_{j''} (\sum_{k''} d_{j''k''})^2 \leq C \ .$$

On remarque d'abord que, sur les indices de sommation

$$(1 + 2^j h + 2^k h)^{-N+1} (1 + 2^{j'} h + 2^{k'} h)^{-N+1} \leq$$

$$C(1 + 2^{j''} h + 2^{k''} h)^{-N+1} (1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))^{-N+1}$$

car $k \geq k''$ et $j \geq j'' - 5$ ou bien $j' \geq j'' - 5$. Par conséquent, le terme général du membre de droite de (25) s'estime par

$$|\log h|^{-3/2} h^{-1/2} 2^{-k/2} (1 + h \inf(2^{j'}, 2^{j''}))^{3/4} (1 + 2^j h)^{-1} (1 + 2^{j'} h)^{-1}$$

$$\times (1 + 2^{\tilde{\jmath}} h)(1 + 2^j h)(1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))^{-N+1} c_{jk} c'_{j'k'},$$

quantité qui se majore par

$$|\log h|^{-3/2} h^{-1/2} 2^{-k/2} (1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))^{-N+7/4} c_{jk} c'_{j'k'}.$$

La somme en k'' des $d_{j''k''}$ s'estime donc - puisque $k \geq k''$ dans (25) - par

$$(26) \quad \sum_{j,j'} \sum_{k,k'} |\log h|^{-3/2} h^{-1/2} 2^{-k/2} (k+1)(1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))^{-N+7/4} c_{jk} c'_{j'k'} \ .$$

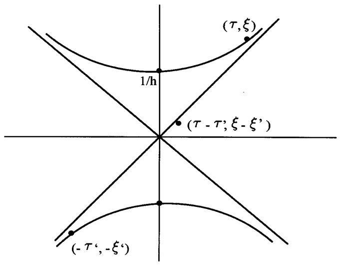
Pour estimer cette quantité, on utilise encore la courbure de la variété caractéristique

Lemme 11 *Il existe $c > 0$ tel que*

$$(27) \qquad 2^{\sup(k,k',k'')} \geq \frac{c}{h} (1 + h 2^{\tilde{\jmath}})^{-1}$$

lorsque $\Delta^{e''}_{j''k''}((\Delta^{e'}_{j'k'} v)(\Delta^{e}_{jk} u)) \not\equiv 0.$

Indiquons la signification géométrique du lemme lorsque par exemple $k' \ll k$, $k'' \ll k, j \ll j' \sim j'', e' = e'' = +$. Si $(\tau, \xi) \in \operatorname{Supp} \Phi^{+}_{j''k''}$ et $(\tau', \xi') \in \operatorname{Supp} \Phi^{+}_{j'k'}$, ces deux points sont donc proches de la variété caractéristique. Lorsqu'ils sont sur celle-ci, on a la situation suivante



et il est clair que le point $(\tau - \tau', \xi - \xi')$ est, à cause de la courbure, à une distance de l'ordre de $\frac{1}{h}$ de la variété caractéritisque (lorsque $j \sim 0$).

Si on revient à l'estimation de (27), on constate donc que l'on peut dans (20) donc dans (25) et dans (27), limiter la sommation à $2^k \geq \frac{c}{h}(1 + 2^{j}h)^{-1}$, d'où une majoration de (27) par

$$\sum_{j,j'} \sum_{k,k'} |\log h|^{-1/2} (1 + h \inf(2^j, 2^{j'}))^{-N+9/4} c_{jk} c'_{j'k'} \tag{28}$$

avec les mêmes restrictions que précèdemment sur le domaine des indices. Il est aisé de constater que (29) s'estime par $c''_{j''}$ avec $(c''_{j''}) \in \ell^2$. Cela établit (26) et conclut donc la preuve du théorème 9.

Indiquons pour terminer la fin de la preuve du théorème : En utilisant le même type d'arguments que dans la preuve du théorème 9, on prouve que le produit $(u, v) \to u.v$ est continu de $H_N^{3/4,1/2} \times H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$ à valeurs dans $H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$. Il en résulte que si F est de la forme (3) et $U \in H_N^{3/4,1/2}$, $\frac{1}{h^2} F(U, h\partial_t U, h\partial_x U)$ est dans $H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$, avec une norme dans cet espace majorée par $C\|U\|^2_{H_N^{3/4,1/2}} P(\|U\|_{H_N^{3/4,1/2}})$ pour un polynôme P. D'autre part, on vérifie que si $f \in H_{N-1}^{-1/4,-1/2}$, $v \in H_N^{3/4}, w \in H_{N-1}^{-1/4}$ et u est solution de $\Box u = f, u_{|t=0} = v, \partial_t u_{|t=0} = w$, on a, pour toute fonction $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}), \chi(t) u \in H_N^{3/4,1/2}$. Ces estimations permettent alors de résoudre le système (5) par un schéma itératif de la forme

$$\left| \begin{array}{l} \Box U^{n+1} + \frac{1}{h^2} U^{n+1} = \frac{1}{h^2} F(\chi(t) U^n, h\partial_t(\chi(t) U^n), h\partial_x(\chi(t) U^n)) \\ U^{n+1}|_{t=0} = V \\ \partial_t U^{n+1}|_{t=0} = W \end{array} \right. \tag{29}$$

lorsque $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, $\chi \equiv 1$ au voisinage de $[-1, 1]$ et d'obtenir une fonction U, solution de (5) sur $]-1, 1[$, et vérifiant $\chi U \in H_N^{3/4,1/2}$.

Références

[1] J. Bourgain : *Fourier transforms restriction phenomena for certain lattice subsets and applications to nonlinear evolution equations, I, II* Geom. Funct. Anal. **3**, (1993) 107-156, 202-262.

[2] V. Georgiev et P. Popivanov : *Global solutions to the two-dimensional Klein-Gordon equations*, Commun. Part. Diff. Eqs. **16**, (1991) 941-995.

[3] L. Hörmander : *Non-linear Hyperbolic Differential Equations*, Lectures Notes in Lund, preprint, (1986-87).

[4] S. Klainerman : *Global existence of small amplitude solutions to nonlinear Klein-Gordon equations in four space-time dimensions*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, (1985) 631-641.

[5] S. Klainerman et M. Machedon : *Smoothing estimates for null forms and applications*, **81** Duke Math. J. (1995) 99-133.

[6] R. Kosecki : *The Unit Condition and Global Existence for a Class of Nonlinear Klein-Gordon Equations*, Jour. Diff. Eq. **100**, (1992) 257-268.

[7] K. Moriyama, S. Tonegawa et Y. Tsutsumi : *Almost Global Existence of Solution for the Quadratic Semilinear Klein-Gordon Equation in One Space Dimension*, preprint, (1996).

[8] T. Ozawa, K. Tsutaya et Y. Tsutsumi : *Global existence and asymptotic behavior of solutions for the Klein-Gordon equations with quadratic nonlinearity in two space dimensions*, Math. Z., **222**, (1996) 341-362.

[9] J. Shatah : *Normal forms and quadratic nonlinear Klein-Gordon equations*, Comm. Pure Appl. Math. **38**, (1985) 685-696.

[10] J.C.H. Simon et E. Taflin : *The Cauchy problem for nonlinear Klein-Gordon equations*, Commun. Math. Phys. **152**, (1993) 433-478.

Jean-Marc Delort
Département de Mathématiques
Institut Galilée
Université Paris-Nord
Av Jean-Baptiste Clément
93430 Villetaneuse cedex

ERRATA

SEMINAIRE EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EXPOSE XIX du 29 Mai 1997

Frank MERLE et Hatem ZAAG

Page XIX-4 aux lignes 2 et 9 lire

$\frac{(N\kappa)}{(2p)}$ à la place de $\frac{\kappa}{2p}$