SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Yves Meyer, Patrick Gérard, and Frédérique Oru

Inégalités de Sobolev précisées

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° IV, 8 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A4_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

1 Introduction.

Notre point de départ est l'inégalité de Sobolev usuelle

$$\|f\|_6 \leq C\|\nabla f\|_2 \tag{1.1}$$

où $\|f\|_6$ est la norme de f dans $L^6(\mathbf{R}^3)$ et où f appartient à l'espace de Sobolev homogène associé à $H^1(\mathbf{R}^3)$.

Cette estimation présente le caractère remarquable d'être invariante sous l'action du groupe affine $(x \to ax+b, a>0, b \in \mathbf{R}^3)$.

En revanche (1.1) n'est pas invariante sous l'action du groupe de Weyl-Heisenberg. Plus précisément si l'on remplace $f(x)$ par $e^{i\omega.x}f(x)$ dans (1.1) et si $|\omega|$ tend vers l'infini, alors le membre de gauche de (1.1) ne change pas tandis que le membre de droite tend vers l'infini (l'asymptotique est $|\omega|\ \|f\|_2$).

Nous nous proposons d'améliorer (1.1) en une estimation précisée qui soit, en ce qui concerne les ordres de grandeur, invariante sous l'action du groupe de Weyl-Heisenberg.

Nous devons pour cela définir un nouvel espace fonctionnel, à savoir l'espace homogène $\dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$. Commençons par $\dot{C}^{1/2}(\mathbf{R}^3)$ ou plus généralement $\dot{C}^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$ si $0<\alpha<1$. Cet espace (homogène) est défini par $|f(x)-f(y)| \leq C|x-y|^{\alpha}$ et la norme de f dans $\dot{C}^{\alpha}(\mathbf{R}^n)$ est alors la borne inférieure de ces constantes C.

Alors $\dot{C}^{1/2}(\mathbf{R}^3)$ est un espace de fonctions continues modulo les fonctions constantes et l'on définit $\dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ comme l'espace des distributions tempérées $f(x)$ qui s'écrivent $f(x) = \frac{\partial}{\partial x_1}u_1(x) + \frac{\partial}{\partial x_2}u_2(x) + \frac{\partial}{\partial x_3}u_3(x)$ où u_1, u_2 et u_3 appartiennent à $\dot{C}^{1/2}(\mathbf{R}^3)$. En utilisant la continuité des transformations de Riesz sur l'espace $\dot{C}^{1/2}(\mathbf{R}^3)$, on montre que $\sqrt{-\Delta} = \Lambda : \dot{C}^{1/2}(\mathbf{R}^3) \to \dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ est un isomorphisme. On décide alors que cet isomorphisme doit être une isométrie et cela définit la norme de f dans $\dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$. Cette norme est notée $\|f\|_*$.

Avec ces notations il vient

Théorème 1 *Il existe une constante C telle que l'on ait*

$$\|f\|_6 \leq C\|\nabla f\|_2^{1/3}\|f\|_*^{2/3} \ . \tag{1.2}$$

Cette estimation améliore (1.1). En effet on a toujours $\|f\|_* \leq C\|\nabla f\|_2$ et, en général, $\|f\|_*$ est beaucoup plus petit que $\|\nabla f\|_2$. Si donc $\theta = \|f\|_*/\|\nabla f\|_2$, il vient $\|f\|_6 \leq C\theta^{2/3}\|\nabla f\|_2$ ce qui est une amélioration très sensible de (1.1).

D'autre part (1.2) est isométriquement invariante sous l'action du groupe affine.

Enfin (1.2) est essentiellement invariante sous l'action du groupe de Weyl-Heisenberg au sens suivant : si $f(x) = e^{i\omega.x}g(x)$ où g est fixée et $|\omega| \to +\infty$, alors $\|\nabla f\|_2 \sim |\omega|\ \|g\|_2$ tandis que $\|f\|_* \sim |\omega|^{-1/2}\|g\|_\infty$.

L'estimation (1.2) devient après passage à la limite,

$$\|g\|_6 \leq C\|g\|_2^{1/3}\|g\|_\infty^{2/3}\ .$$

Les estimations (1.2) sont généralement reliées à la théorie de l'interpolation, qu'il s'agisse de l'interpolation complexe ou de l'interpolation réelle par la méthode de Lions-Peetre.

L'utilisation des techniques d'interpolation se heurte à un obstacle important. D'une part, l'espace d'interpolation réel $(E_0, E_1)_{\theta,q}$ n'est pas un espace classique lorsque $E_0 = \dot{B}_{p_0}^{s_0,q_0}, E_1 = \dot{B}_{p_1}^{s_1,q_1}$ et $p_0 \neq p_1$. C'est notre cas puisque $E_0 = \dot{C}^{-1/2} = \dot{B}_\infty^{-1/2,\infty}$ et $E_1 = \dot{B}_2^{1/2}$.

D'autre part, l'espace d'interpolation complexe $[E_0, E_1]_\theta$ est $\dot{B}_6^{0,6}(\mathbf{R}^3)$ si $\theta = 1/3$. Or $\dot{B}_6^{0,6}$ n'est pas inclus dans $L^6(\mathbf{R}^3)$.

On ne peut donc établir (1.2) par les techniques existantes d'interpolation. Cela ne signifie pas que l'on ne puisse pas utiliser une méthode d'interpolation. En fait nous montrerons dans le paragraphe suivant comment faire fonctionner l'interpolation réelle. Ensuite nous aborderons ce même problème par une méthode assez différente qui conduira naturellement à des généralisations de (1.2).

2 La méthode d'interpolation réelle.

Commençons par une remarque évidente

Lemme 1 *Si E_0 et E_1 sont deux espaces de Banach contenus dans un espace de Banach X et si $Y = E_0 \cap E_1$ est l'intersection entre ces deux espaces, il* *vient*

$$\|y\|_{E_{\theta,q}} \le C(\theta)\|y\|_{E_0}^{1-\theta}\|y\|_{E_1}^{\theta} \tag{2.1}$$

si $0 < \theta < 1$, $1 \le q \le \infty$ *et* $y \in Y$.

On a le même résultat si l'on utilise la méthode d'interpolation complexe.

Il existe une forme de réciproque qui conduira notre démarche.

Lemme 2 *Si* X, E_0, E_1 *et* Y *sont définis comme ci-dessus et si l'on dispose d'une norme* $\| \ \|$ *sur* Y *telle que, pour un* $\theta \in (0,1)$ *et une constante* C *on ait*

$$\|y\| \le C\|y\|_{E_0}^{1-\theta}\|y\|_{E_1}^{\theta} \tag{2.2}$$

alors on a nécessairement

$$\|y\| \le C'\|y\|_{E_{\theta,1}} \ . \tag{2.3}$$

Revenant à (1.2), nous voilà conduits à une stratégie bien définie.

Il s'agit de démontrer que l'espace d'interpolation E réelle entre $E_0 = \dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ et $E_1 = \{f; \nabla f \in L^2(\mathbf{R}^3)\}$ par la méthode réelle où $\theta = 1/3, q = 1$ est inclus dans $L^6(\mathbf{R}^3)$.

3 La caractérisation de l'espace d'interpolation E.

Nous utiliserons la méthode la plus simple et la plus efficace, à savoir l'utilisation d'une base orthonormée d'ondelettes. Soit donc F un ensemble de 7 fonctions (toutes nommées ψ) de la classe $\mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$ de Schwartz ayant la propriété que $\{2^{3j/2}\psi(2^j x - k)\ ,\ j \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}^3, \psi \in F\}$ soit une base orthonormée de $L^2(\mathbf{R}^3)$.

On peut imposer [2] à la transformée de Fourier de ψ d'avoir un support compact ne contenant pas 0.

Alors on écrit (en changeant la normalisation)

$$f(x) = \sum_j \sum_k \alpha(j,k) 2^{j/2}\psi(2^j x - k) \tag{3.1}$$

et la norme de f dans $\dot{C}^{-1/2}(\mathbf{R}^3)$ est équivalente à $\|\alpha(j,k)\|_{\ell^\infty}$. De même la norme L^2 de ∇f est équivalente à $\|\alpha(j,k)\|_{\ell^2}$. En choisissant $\theta = 1/3$ et $q = 1$, l'espace d'interpolation réel est donc $\ell^{6,1}$.

Nous devons identifier l'espace fonctionnel E défini par la condition $(\alpha(j,k)) \in \ell^{6,1}(\mathbf{Z}^4)$ dans (3.1). On a alors

Lemme 3 *On a $E \subset L^6(\mathbf{R}^3)$.*

En fait on a un résultat plus précis : E est inclus dans l'espace de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_6^{0,1}$ dont nous rappelons la définition :

On considère une décomposition de Littlewood Paley sous la forme $I = \sum_{-\infty}^{\infty} \Delta_j$, $\Delta_j = S_{j+1} - S_j$, $S_j(f) = f * \varphi_j$, $\varphi_j(x) = 2^{3j}\varphi(2^j x)$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}^3)$, $\int \varphi dx = 1$ et $\int x^\alpha \varphi(x) dx = 0$ si $|\alpha| \geq 1$.

On a alors

$$f \in \dot{F}_6^{0,1} \Leftrightarrow \sum_{-\infty}^{\infty} |\Delta_j(f)(x)| \in L^6(\mathbf{R}^3). \tag{3.2}$$

Revenons à notre propos. Il s'agit de vérifier que si $(\alpha(j,k)) \in \ell^{6,1}$, alors $f(x) = \Sigma\Sigma\alpha(j,k)2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ appartient à $\dot{F}_6^{0,1}$. Cela revient à vérifier que $\Sigma\Sigma|\alpha(j,k)|2^{j/2}|\psi(2^j x - k)| \in L^6(\mathbf{R}^3)$. L'analyse par ondelettes décrite dans [2] est, comme on sait, une analyse de Littlewood-Paley.

Pour conclure, on utilise le lemme suivant

Lemme 4 *Si $\alpha > 0$, il existe une constante $C(\alpha)$ telle que, pour tout $\theta \geq 1$ et toute suite $a_j \in [0,1]$ on ait*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} a_j 2^{j\alpha} \leq C(\alpha)(\sum_{\infty}^{\infty} a_j 2^{j\alpha\theta})^{1/\theta} . \tag{3.3}$$

En effet, on désigne par σ la somme $\sum_{-\infty}^{\infty} a_j 2^{j\alpha\theta}$ et l'on définit $q \in \mathbf{Z}$ par $2^{q\alpha\theta} \leq \sigma < 2^{(q+1)\alpha\theta}$. Alors $\sum_{-\infty}^{q} a_j 2^{j\alpha} \leq \frac{2^{q\alpha}}{1-2^{-\alpha}} = (1-2^{-\alpha})^{-1}\sigma^{1/\theta}$.

Ensuite

$$\sum_{q+1}^{\infty} a_j 2^{j\alpha} = \sum_{q+1}^{\infty} a_j 2^{j\alpha\theta} 2^{j\alpha(1-\theta)} \leq 2^{\alpha(1-\theta)(q+1)}\sigma \leq \sigma^{1/\theta} .$$

La vérification que nous venons de faire conduit à $C(\alpha) \leq (1-2^{-\alpha})^{-1} + 1$.

Revenons à l'implication que nous avons en vue

Lemme 5 *Si* $(\alpha(j,k))$ *appartient à* $\ell^{6,1}(\mathbf{Z}^4)$, *alors*

$$\Sigma\Sigma\alpha(j,k)2^{j/2}\psi(2^jx-k) \in \dot{F}_6^{0,1}(\mathbf{R}^3)\ .$$

En fait $\ell^{6,1}$ admet une décomposition atomique.

Un espace de Banach E admet une décomposition atomique relative à un ensemble A d'atomes si les deux conditions suivantes sont vérifiées

$$\text{(3.4)} \qquad A \textit{ est une partie bornée de } E$$

$$\text{(3.5)} \qquad \textit{tout } x \in\ E \text{ s}'\textit{écrit } x = \sum_0^\infty \alpha_k a_k \text{ où } \sum_0^\infty |\alpha_k| < \infty \text{ et } a_k \in A.$$

La décomposition (3.4) n'est pas nécessairement unique.

En ce qui concerne $\ell^{6,1}(\mathbf{Z}^4)$, les atomes sont des suites vérifiant $|a(j,k)| \leq |E|^{-1/6}\mathbf{1}_E$ où E est une partie finie arbitraire de $\mathbf{Z}^4$ et $|E|$ désigne le Cardinal de E. Pour établir le lemme 5, il suffit de "faire la démonstration atome par atome". Considérons $f(x) = \sum\sum_{(j,k)\in E} \alpha(j,k)2^{j/2}\psi(2^jx-k)$ où $|\alpha(j,k)| \leq 1$ et montrons que la norme de f dans $\dot{F}_6^{0,1}(\mathbf{R}^3)$ ne dépasse pas $|E|^{1/6}$.

On remplace $\alpha(j,k)$ par son produit par la fonction indicatrice de E ce qui permet d'oublier d'écrire $(j,k) \in E$.

A cet effet, on doit estimer la norme $L^6(\mathbf{R}^3)$ de $\sum_j \sum_k |\alpha(j,k)|2^{j/2}|\psi(2^jx-k)|$. On pose $\sigma_j(x) = \sum_k |\alpha(j,k)||\psi(2^jx-k)|$ et l'on a évidemment $0 \leq \sigma_j(x) \leq C$. On peut appliquer le lemme 4 et il vient

$$\text{(3.6)} \qquad (\Sigma\sigma_j(x)2^{j/2})^6 \leq C'\Sigma\sigma_j(x)2^{3j}\ .$$

On intègre alors par rapport à x et l'on obtient $C|E|$ comme annoncé.

Cette démonstration est intéressante car elle prouve que (1.2) n'est toujours pas optimale.

En effet on peut d'abord remplacer $\|f\|_6$ par une norme plus précise (nous avons vu que la norme de f dans l'espace de Triebel-Lizorkin $\dot{F}_6^{0,1}$ convient).

D'autre part on peut remplacer $\|\nabla f\|_2$ par une norme moins précise.

En reprenant la démonstration précédente, l'espace de Beppo Levi peut être remplacé par l'espace de Banach E défini par $f(x) = \Sigma_j, \Sigma_k \alpha(j,k) 2^{j/2}\psi(2^j x - k)$ où $(\alpha(j,k))$ au lieu d'appartenir à $\ell^2(\mathbf{Z}^4)$ appartient maintenant à ℓ^2 faible.

Il reste à caractériser E tout comme l'espace de Banach F défini cette fois par la condition $(\alpha(j,k)) \in \ell^{6,1}(\mathbf{Z}^4)$.

Passons maintenant à la seconde technique de démonstration du théorème 1 qui nous conduira à un résultat plus élaboré.

4 Généralisations du théorème 1.

Nous nous situons maintenant dans $\mathbf{R}^n$ et désignons par $\Lambda = \sqrt{-\Delta}$ l'opérateur de Calderón.

Ensuite nous appelons α un nombre réel strictement positif et désignons par $\dot{C}^{-\alpha}$ l'espace de Besov homogène $\dot{B}_\infty^{-\alpha,\infty}$. Rappelons que si $\beta > 0$, alors $\Lambda^{\alpha+\beta} : \dot{C}^\beta(\mathbf{R}^n) \to \dot{C}^{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$ est un isomorphisme.

Enfin on suppose $1 < p < q < \infty$ et l'on définit $s > 0$ par $s = \alpha(\frac{q}{p} - 1)$. On a alors

Théorème 2 *Il existe une constante $C = C(n, \alpha, p, q)$ telle que, pour toute fonction f appartenant à $\dot{C}^{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$ et vérifiant $\Lambda^s f \in L^p(\mathbf{R}^n)$, on ait*

$$\|f\|_q \leq C \|\Lambda^s f\|_p^{p/q} \|f\|_*^{1-p/q} \tag{4.1}$$

où $\|f\|_*$ désigne la norme de f dans $\dot{C}^{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$.

Le théorème 2 améliore l'inégalité classique de Sobolev si $\frac{s}{n} = \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. En effet on a alors $\|f\|_* \leq C\|\Lambda^s f\|_p$ et le rapport $\theta = \|f\|_* / \|\Lambda^s f\|_p$ est souvent très petit. Alors (4.1) s'écrit

$$\|f\|_q \leq C\theta^{1-p/q} \|\Lambda^s f\|_p\ . \tag{4.2}$$

Mais le théorème 2 s'applique à des situations où l'on ne peut utiliser l'inégalité de Sobolev. Si $\frac{s}{n} \neq \frac{1}{p} - \frac{1}{q}, \Lambda^s f \in L^p(\mathbf{R}^n)$ n'entraîne pas $f \in L^q(\mathbf{R}^n)$.

En fait le problème peut venir du comportement de f à l'infini (et c'est le cas si $\frac{s}{n} > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$) ou du comportement local déficient de f (et c'est le cas si

$\frac{s}{n} < \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$). Dans tous les cas la situation est sauvée en imposant la condition supplémentaire $f \in \dot{C}^{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$. On peut, en principe, démontrer le théorème 2 en calculant l'espace $(E_0, E_1)_{\theta,1}$ entre $E_0 = \dot{C}^{-\alpha}(\mathbf{R}^n)$ et $E_1 = \{f; \Lambda^s f \in L^p\}$. Cette démarche, suivie par l'un des auteurs, paraîtra dans [4]. Mais il est plus simple de procéder directement en utilisant le lemme 4.

On part de l'équivalence classique (théorie de Littlewood-Paley)

$$c(p,s)\|\Lambda^s f\|_p \leq \|(\sum_{-\infty}^{\infty} 4^{js}|\Delta_j(f)|^2)^{1/2}\|_p \leq C(p,s)\|\Lambda^s f\|_p \tag{4.3}$$

où $1 < p < \infty$, $s \in \mathbf{R}$. On se ramène (quitte à multiplier f par $\lambda > 0$) au cas où $\|f\|_* = 1$. On pose, pour alléger les notations $f_j(x) = \Delta_j f(x)$ et l'on a $\|f_j\|_\infty \leq 2^{j\alpha}, j \in \mathbf{Z}$. On écrit alors $|f_j(x)|^2 = a_j 2^{2j\alpha}$ où $0 \leq a_j \leq 1$ et l'on applique le lemme 4 avec $\theta = q/p$ et 2α au lieu de α. Il vient

$$(\Sigma|f_j(x)|^2)^{q/p} = (\Sigma a_j 2^{2j\alpha})^{q/p} \leq C(\alpha)\Sigma a_j 2^{2j\alpha q/p} =$$

$$\Sigma|f_j(x)|^2 2^{2j\alpha(q/p-1)} = \Sigma|f_j(x)|^2 2^{2js} .$$

En d'autres termes

$$(\Sigma|f_j(x)|^2)^{1/2} \leq C(\alpha)(\Sigma|f_j(x)|^2 2^{2js})^{p/2q} . \tag{4.4}$$

Il ne reste plus qu'à évaluer les normes L^q des deux membres de (4.4) en se servant de (4.3).

5 L'autre direction.

Le théorème 2 est évidemment faux si $\alpha = s = 0$. Il suffit pour le voir de partir d'une suite $P_j(x)$ de polynômes trigonométriques positifs ou nuls tels que $0 \leq P_j(x) \leq 1$ et vérifiant $\|\sum_0^\infty P_j(x)\|_{p/2} = 1$, $\|\sum_0^\infty P_j(x)\|_{q/2} = +\infty$ (observer que les polynômes trigonométriques vérifiant $0 \leq P(x) \leq 1$ sont denses dans les fonctions continues vérifiant cette même condition). On utilise le lemme de Fejer-Riesz et l'on écrit $P_j(x) = |A_j(x)|^2$ où $A_j(x)$ est un polynôme trigonométrique. La fonction qui fournit le contre-exemple est alors (en dimension 1)

$$f(x) = \sum_0^\infty A_j(x) e^{i\lambda_j x}\varphi(x) \tag{5.1}$$

où $\varphi > 0$, $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ et où la transformée de Fourier de φ a un support compact.

La suite λ_j est lacunaire ce qui permet d'appliquer la théorie de Littlewood-Paley. On a bien $f \in L^p \cap \dot{B}_\infty^{0,\infty}$ sans avoir $f \in L^q$.

En revanche, il est surprenant que le théorème 2 reste vrai en changeant simultanément s en $-s$ et α en $-\alpha$.

On a si $1 < p < q < \infty$, $s > 0$, $s = \alpha(\frac{q}{p} - 1)$

$$\|f\|_q \leq C\|\Lambda^{-s} f\|_p^{-p/q} \|f\|_{\dot{C}^\alpha}^{1-p/q} \ . \tag{5.2}$$

La preuve est identique à celle que nous avons donnée à condition d'utiliser une variante du lemme 4 où α est changé en $-\alpha$. Cette version du lemme 4 s'obtient en changeant j en $-j$ dans le lemme 4.

References

[1] J. Bergh, J. Löfström, Interpolation Spaces, Grundlehren 223, Springer-Verlag (1976).

[2] P. G. Lemarié et Y. Meyer, Ondelettes et bases hilbertiennes, Revista Matematica Iberoamericana, 2, (1986), 1-18.

[3] Y. Meyer, Ondelettes et opérateurs, Hermann 1992.

[4] F. Oru, Thèse à paraître.

[5] J. Peetre, New thoughts on Besov Spaces Duke University Math. Series 1 (1976).

[6] H. Triebel, Interpolation theory, Function Spaces, Differential operators, North-Holland (1978)

[7] H. Triebel, Theory of function spaces, Birkhäuser (1983).

Yves Meyer
Ecole Normale Supérieure
Département de Mathématiques
61 av du Président Wilson
94235 Cachan cedex