SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Christian Gérard

Théorie de la diffusion pour un atome couplé à un champ quantique

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° XXII, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A22_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

1 Introduction.

Nous allons décrire dans cet exposé un travail en collaboration avec Jan Dereziński. Nous renvoyons pour les détails à [DG]. Nous considérons dans ce travail un système physique constitué d'un petit système, comme par exemple un atome, en interaction avec un champ quantique bosonique.

Le petit système est décrit par un espace de Hilbert $\mathcal{K}$ et son évolution par un hamiltonien autoadjoint K borné inférieurement. Le champ quantique est décrit par l'espace de Fock bosonique $\Gamma(\langle)$, où l'espace à une particule $\langle$ est égal à $L^2(\mathbf{R}^n, dk)$. L'énergie cinétique des bosons est donnée par une fonction :

$$\mathbf{R}^n \ni k \mapsto \omega(k) \in \mathbf{R}^+,$$

appelée *relation de dispersion*. Le hamiltonien donnant l'évolution du champ de bosons est égal à :

$$d\Gamma(\omega) = \int \omega(k) a^*(k) a(k) dk \ ,$$

où $a(k), a^*(k)$ sont les opérateurs d'annihilation-création bosoniques.

Nous ferons sur la relation de dispersion les hypothèses suivantes :

$$(H1) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \nabla\omega \in L^\infty(\mathbf{R}^n), \\ \nabla\omega(k) = 0 \Rightarrow k = 0 \ , \\ \lim\limits_{|k|\to\infty} \omega(k) = +\infty \ . \end{array} \right.$$

La constante $m := \inf_k \omega(k) = \omega(0)$ est appelée la *masse* des bosons. L'exemple typique est $\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}$. Le cas des bosons sans masse ($m = 0$) est considérablement plus difficile que le cas massif ($m > 0$). La raison principale est que dans le cas sans masse, le hamiltonien $d\Gamma(\omega)$ ne contrôle plus *l'opérateur de nombre*

$$N := d\Gamma(\mathbf{1}) = \int a^*(k) a(k) dk.$$

L'interaction entre le petit système et le champ quantique est donnée par une fonction :

$$\mathbf{R}^n \ni k \mapsto \nu(k) \in B(\mathcal{K}) \ ,$$

telle que

$$(I0) \qquad \int v^*(k) v(k) dk \in B(\mathcal{K}, \mathcal{K}) \ .$$

On pose alors :

$$V := \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(v) + a(v)) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int v(k) \otimes a^*(k) + v^*(k) \otimes a(k) dk \ ,$$

agissant sur l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} := \mathcal{K} \otimes \Gamma(h) \ .$$

Le hamiltonien décrivant le système en interaction est alors donné par :

$$H = H_0 + V \ ,$$

où

$$H_0 = K \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes d\Gamma(\omega) \ .$$

De tels hamiltoniens seront appelés *hamiltoniens de Pauli-Fierz.*

2 Exemples.

L'exemple non trivial le plus simple est le modèle de spin-boson, où le petit système est un spin à 2 composantes. On a alors $\mathcal{K} = C^2$ et si $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ sont les matrices de Pauli :

$$K = \sigma_z, v(k) = \sigma_x \otimes g(k) \ , \text{pour } g \in L^2(\mathbf{R}^n, dk) \ .$$

Un autre modèle est obtenu à partir du modèle de Pauli-Fierz, qui décrit l'interaction d'un atome non relativiste avec un champ de photons. On a alors :

$$\mathcal{K} = L^2(\mathbf{R}^{3N}), \text{où } N \text{ est le nombre d'électrons,}$$

$$K = \sum_{i=1}^{N} -\frac{1}{2m}\Delta_{x_i} + \sum_{i<j} \frac{q^2}{|x_i - x_j|} + \sum_{i=1}^{N} W(x_i) \ .$$

Nous supposerons parfois dans la suite que

$$\lim_{|x| \to \infty} W(x) = +\infty \ ,$$

c'est à dire que l'atome est confiné.

L'interaction est donnée par :

$$v(k) = \sum_{j=1}^{N} \quad e^{i<x_j,k>} \frac{1}{\omega(k)} 1/2 \chi_\kappa(k) F(x_j),$$

où $\omega(k) = (k^2 + m^2)^{1/2}$, $\chi_\kappa \in C_0^\infty(\mathbf{R^3})$ est une troncature ultraviolette supportée dans $\{|k| \leq \kappa\}$ et $F' \in S(\mathbf{R}^3)$. (le facteur F peut être omis au prix de quelques complications techniques).

Finalement la relation de dispersion des bosons est égale à $(k^2 + m^2)^{1/2}$.

Notons qu'il existe beaucoup d'autres modèles, comme par exemple le modèle de Fröhlich en physique des solides, qui entrent dans notre cadre.

Finalement il est intéressant de placer les hamiltoniens de Pauli-Fierz dans le contexte plus général des modèles de théorie quantique des champs : on peut classer ces modèles selon deux critères :

1a) les modèles avec une interaction localisée,

1b) les modèles avec une interaction invariante par translation,

2a) les modèles conservant le nombre de particules,

2b) les modèles ne conservant pas le nombre de particules.

Le modèle de Pauli-Fierz appartient à la catégorie 1a), 2b).

Nous verrons dans la suite que dans le cas massif $m > 0$, on peut montrer des résultats très complets sur la théorie de la diffusion pour les hamiltoniens de Pauli-Fierz.

D'autres modèles où la théorie de la diffusion est bien comprise sont les modèles ayant l'invariance galiléenne considérés dans [De2] qui sont de type 1b), 2a). Dans ce cas les résultats se déduisent des résultats récents sur le problème à N-corps non relativiste.

Il n'y a par contre que très peu de résultats sur les modèles de type 1b), 2b) (à l'exception de résultats de type Haag-Ruelle pour les modèles relativistes), un des problèmes étant la difficulté de construire rigoureusement de tels modèles.

Mentionnons enfin qu'un autre modèle important de la théorie des champs, de type 1a), 2b) peut être traité par nos méthodes. Il s'agit du modèle $P(\phi)_2$ tronqué en espace qu'il serait trop long de décrire ici. (voir [Si] pour une excellente introduction à ce modèle).

3 Théorie spectrale des hamiltoniens de Pauli-Fierz.

L'avantage des modèles de Pauli-Fierz est qu'il est très facile de construire le hamiltonien H, comme le montre la proposition suivante :

Proposition 1 *Supposons en plus de (I0) l'hypothèse*

$$(I1): \qquad \int \frac{1}{\omega(k)} v^*(k)v(k)dk \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}) \ .$$

(qui suit de (I0) si $m > 0$*).*

Alors V *est* H_0*-borné avec borne relative* 0*. Le hamiltonien* H *est donc autoadjoint sur* $D(H_0)$ *et borné inférieurement.*

Le second problème est l'existence d'un état fondamental pour H. On verra dans la suite que cette question est en quelque sorte la première question de la théorie de la diffusion. En physique, l'absence d'un état fondamental pour H porte le nom de *catastrophe infrarouge.*

Le théorème suivant, qui est un théorème HVZ sur le spectre essentiel de H, répond à cette question dans le cas massif.

Théorème 1 *Supposons les hypothèses (H0), (H1), (I0), (I1). Soit* $\Sigma = \inf \sigma(H)$*. Alors :*

$$\sigma_{\text{ess}}(H) = [\Sigma + m, +\infty[\ .$$

En conséquence si $m > 0 \inf \sigma(H) \in \sigma_{pp}(H)$*.*

Dans le cas sans masse $m = 0$, il existe des résultats sur l'existence d'un état fondamental sous l'hypothèse supplémentaire :

$$(I1') \qquad \int \frac{1}{\omega(k)^2} v^*(k)v(k)dk \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}),$$

(voir [AH], [BFS], [Sp2]), au moins pour des constantes de couplage petites. L'étude du modèle résoluble où $\mathcal{K} = \mathbf{C}$ montre que la condition *(I1')* est d'ailleurs nécessaire pour l'existence d'un état fondamental, au moins dans le cadre que nous utilisons. Le deuxième résultat qui sera très important dans la suite est le théorème suivant, qui décrit une estimation de commutateurs positifs.

On supposera ici en plus de (H0), (H1), (I0), (I1) que :

$$(H2) \qquad |\partial_k^\alpha \omega(k)| \leq C_\alpha, |\alpha| \geq 1 \ ,$$

$$(I2) \qquad \int (av(k))^* av(k)dk \in \mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{K}) \ ,$$

où a est l'opérateur sur $L^2(\mathbf{R}^n, dk)$:

$$a := \frac{1}{2}(k.\nabla\omega(k) + \nabla\omega(k).k) \ .$$

On notera par τ *l'ensemble des seuils* :

$$\tau := \sigma_{pp}(H) + m\mathbf{N} \ ,$$

et on pose $A = d\Gamma(a)$, le second quantifié de a, agissant sur $\mathcal{H}$.

Théorème 2 *Supposons les hypothèses*

$$(H0) - (H2), (I0) - (I2) et\ m > 0 \ .$$

i) Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \tau$. Il existe $\Delta \ni \lambda$, intervalle ouvert, $c_0 > 0$ et R opérateur compact sur $\mathcal{H}$ tels que :

$$\mathbf{1}_\Delta(H)[H, iA]\mathbf{1}_\Delta(H) \geq c_0\mathbf{1}_\Delta(H) + R \ .$$

ii) le spectre ponctuel de H ne peut s'accumuler que sur τ

iii)Soit $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \tau \cup \sigma_{pp}(H)$. Il existe $\Delta \ni \lambda$, intervalle ouvert, $c_0 > 0$ tels que :

$$\mathbf{1}_\Delta(H)[H, iA]\mathbf{1}_\Delta(H) \geq c_0\mathbf{1}_\Delta(H) \ .$$

Les théorèmes 1 et 2 se montrent par des méthodes géométriques (construction de partitions de l'unité) inspirées du problème à N corps non relativiste.

4 Théorie de la diffusion.

En théorie des champs, la théorie de la diffusion se formule traditionnellement à l'aide des *champs asymptotiques.*

On verra à la fin de cette section une formulation à l'aide *d'opérateurs d'onde étendus.* Un point qui cause un certain nombre de difficultés est que les champs asymptotiques et les opérateurs d'onde étendus sont des opérateurs non bornés.

La plupart des résultats de cette section sont valables aussi pour $m = 0$. L'exception notable est l'unitarité des opérateurs d'onde. La condition naturelle sous laquelle on a l'existence des champs asymptotiques est la condition suivante, qui est une condition de *courte portée* :

$$(SR) \qquad \| \int \mathbf{1}_{\{|x| \geq R\}} \hat{v}^*(x)\hat{v}(x)dx\|_{\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{K})} \leq cR^{-1-\mu}, \mu > 0 \ .$$

Finalement pour $h \in \langle$, on pose

$$h_t = e^{-it\omega(k)}h.$$

On définit d'autre part les *opérateurs de Weyl* par:

$$W(h) := e^{i\phi(h)},\ h \in \langle$$

pour $\phi(h) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a^*(h) + a(h))$.

Théorème 3 *Supposons (H1), (H2), (I0), (I1), (SR). Alors :*
i) les limites :

$$W^{\pm}(h) = s \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH}W(h_t)e^{itH}$$

existent et sont appelés opérateurs de Weyl asymptotiques.
ii)l'application :
$h \ni h \to W^{\pm}(h)$ est continue pour la topologie forte.
iii)les opérateurs de Weyl asymptotiques vérifient les relations de commutation canoniques :

$$W^+(h)W^+(g) = W^+(h+g)e^{i/2Im(h|g)}, h, g \in \langle.$$

iv) les opérateurs de Weyl asymptotiques entrelacent l'évolution libre et p l'évolution perturbée :

$$e^{itH}W^+(h)e^{itH} = W^+(h_{-t}), t \in \mathbf{R}.$$

Le théorème 3 se montre par des arguments standard, qui correspondent à la méthode de Cook dans la théorie usuelle.

Théorème 4 *i) il existe des opérateurs autoadjoints $\phi^{\pm}(h)$ appelés* champs asymptotiques *tels que :*

$$W^{\pm}(h) = e^{i\phi^{\pm}(h)}, h \in h\ .$$

ii) Pour $h_i \in h$, $1 \leq i \leq n$, $D((H+i)^{n/2}) \subset D(\Pi_1^n \phi^{\pm}(h_i))$
et

$$\|\Pi_1^n \phi^{\pm}(h_i)(H+i)^{-n/2}\| \leq C_n \Pi_1^n \|h_i\|\ .$$

iii) les champs asymptotiques vérifient les relations de commutation canonique :

$$[\phi^{\pm}(h), i\phi^{\pm}(g)] = \frac{1}{2}Im(h|g)\ .$$

iv) $e^{itH}\phi^{\pm}(h)e^{-itH} = \phi^{\pm}(h_{-t}), t \in \mathbf{R}$.

Finalement à l'aide des champs asymptotiques, on peut construire les *opérateurs de création-annihilation asymptotiques* qui jouent un rôle fondamental.

Théorème 5 *Pour $h \in h$, on définit les* opérateurs de création -annihilation asymptotiques *par :*

$$a^{*\pm} := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^{\pm}(h) - i\phi^{\pm}(ih)) \ ,$$

$$a^{\pm}(h) := \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^{\pm}(h) + i\phi^{\pm}(ih)) \ ,$$

sur le domaine $D(\phi^{\pm}(h)) \cap D(\phi^{\pm}(ih))$.

i) les opérateurs $a^{\pm *}(h), a^{\pm}(h)$ sont fermés et adjoints l'un de l'autre.
ii) on a les relations de commutation canoniques :

$$[a^{\pm}(h), a^{\pm}(g)] = [a^{\pm *}(h), a^{\pm *}(g)] = 0,$$

$$[a^{\pm}(h), a^{\pm *}(g)] = (h|g).$$

iii)

$$e^{itH} a^{\pm *}(h) e^{-itH} = a^{\sharp\pm}(h_{-t}), \ \ h \in \langle, \sharp = *, ..$$

La version infinitésimale de iii) s'appelle la *formule de rétablissement*

$$\begin{aligned} a^{\pm}(h)H \quad &= (H + \omega h)a^{\pm}(h) \ , \\ a^{\pm *}(h)H \quad &= (H - \omega h)a^{\pm *}(h) \ . \end{aligned} \tag{2}$$

A l'aide des opérateurs d'annihilation asymptotiques, on introduit les espaces suivants, appelés *espaces de la matière asymptotique (ou espaces de la matière habillée)*

Définition 1 *L'espace de la matière asymptotique est*

$$\mathcal{K}^{\pm} := \{u \in \mathcal{H} | a^{\pm}(h)u = 0 \ , \forall h \in \langle\} \ .$$

Les espaces $\mathcal{K}^{\pm}$ sont fermés et H-invariants et s'interprètent comme l'espace des états ne contenant aucun boson libre pour des temps tendant vers $\pm\infty$.

La première question est de savoir si $\mathcal{K}^{\pm} \neq \{0\}$.

Comme on s'aperçoit facilement que

$$\mathcal{H}_{pp}(H) \subset \mathcal{K}^{\pm} \ ,$$

les résultats de la section 3 sur l'existence d'un état fondamental fournissent en particulier une réponse à cette question. Le fait que $\mathcal{K}^{\pm} \neq \{0\}$ signifie que les relations de commutation canoniques du théorème 5 ont une représentation de Fock sur une partie de l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Physiquement ce résultat s'interprète comme l'existence d'états décrivant l'atome "habillé" par le champ.

On définit maintenant les *opérateurs d'onde* de la façon suivante :

Définition 2 *i) L'espace* $\mathcal{K}^{\pm}$ *est inclus dans le domaine de* $\Pi_1^n a^{\sharp\pm}(hi)$, $h_i \in \langle, 1 \leq i \leq n$.

ii) On définit :

$$\begin{aligned} W^{\pm} : \mathcal{K} \otimes \Gamma(h) \quad & \to \mathcal{H} \\ \psi \otimes \Pi_1^n a^*(h_i)\Omega \quad & \mapsto \Pi_1^n a^{\pm *}(h_i)\psi \ . \end{aligned}$$

(Ω désigne le vide dans $\Gamma(h)$).

iii) L'opérateur $W^{\pm}$ *s'appelle* l'opérateur d'onde *et est isométrique.*

Le caractère isométrique de $W^{\pm}$ suit directement des relations de commutation et de la définition de $\mathcal{K}^{\pm}$ (qui joue le rôle du vide pour les opérateurs $a^{\pm}(h)$).

Le théorème suivant est due à Hoegh-Krohn :

Théorème 6 *Supposons que* $m > 0$. *Alors* $W^{\pm}$ *sont unitaires, i.e.* $\mathrm{Im}W^{\pm} = \mathcal{H}$.

Bien que ce résultat ait l'air profond, il ne l'est pas. C'est une conséquence assez facile de la formule (2). Les problèmes difficiles sont en quelque sorte poussés sous le tapis, dans la définition non explicite de $\mathcal{K}^{\pm}$.

En particulier on voudrait obtenir l'uniticité de l'opérateur de diffusion :

$$S := W^{+*}W^{-} \ ,$$

c'est à dire savoir que

$$\mathcal{K}^{+} = \mathcal{K}^{-} \ .$$

Une façon de montrer (3) est de montrer la propriété suivante qui mérite le nom de *complétude asymptotique.*

Définition 3 *Le système décrit par* H *est asymptotiquement complet si :* $\mathcal{K}^{\pm} = \mathcal{H}_{\mathrm{pp}}(H)$.

Le résultat principal de notre travail est alors :

Théorème 7 *Supposons les hypothèses (H0)-(H2), (I0), (SR) et* $m > 0$. *Alors le système décrit par* H *est asymptotiquement complet.*

5 Complétude asymptotique géométrique.

La preuve du Théorème 7 repose sur une analyse gémétrique du propagateur e^{-itH}. Pour ce faire on a besoin de certaines partitions de l'unité sur $\Gamma(h)$, qui peuvent être utiles dans d'autres contextes et que nous allons décrire maintenant.

Soient j_0, j_0 deux opérateurs sur h tels que

$$0 \leq j_0 \leq \mathbf{1} \ , 0 \leq j_\infty \leq \mathbf{1} \ , \ j_0^2 + j_\infty^2 = \mathbf{1} \ .$$

Soit

$$\begin{array}{rl} J : \langle & \to \langle \oplus \langle \\ h & \mapsto (j_0 h, j_\infty h) \ . \end{array}$$

On vérifie immédiatement que J est isométrique. L'opérateur $\Gamma(J) : \Gamma(h) \to \Gamma(h \oplus h)$ défini par :

$$\Gamma(J)\varphi_1 \otimes \ldots \otimes \varphi_n := J\varphi_1 \otimes \ldots \otimes J\varphi_n \ ,$$

est aussi isométrique.

On peut maintenant identifier $\Gamma(h \oplus h)$ et $\Gamma(h) \otimes \Gamma(h)$ de la manière suivante : on définit

$$U : \Gamma(h \oplus h) \to \Gamma(h) \otimes \Gamma(h)$$

par :

$$U\Omega = \Omega \otimes \Omega \ ,$$

$$Ua^\sharp((h_1, h_2)) = (a^\sharp(h_1) \otimes \mathbf{1} + \mathbf{1} \otimes a^\sharp(h_2))\mathcal{U} \ .$$

Comme U préserve les relations de commutation, on voit facilement que U est unitaire. On pose alors :

$$\check{\Gamma}(J) : \Gamma(h) \to \Gamma(h) \otimes \Gamma(h)$$

$$\check{\Gamma}(J) = U\Gamma(J) \ .$$

Sur l'espace $\Gamma(J) \otimes \Gamma(J)$, il existe deux opérateurs de nombre :

$$N_0 := N \otimes \mathbf{1} \ , \ N_\infty := \mathbf{1} \otimes N \ .$$

On pose alors :

$$P_k(J) := \check{\Gamma}(J)^+ \mathbf{1}_{\{k\}}(N_\infty)\Gamma(J) \ ,$$

et on vérifie facilement que :

$$0 \leq P_k(J) \leq \mathbf{1} \ ,$$

$$s - \Sigma_0^\infty P_k(J) = \mathbf{1} \ .$$

En d'autres termes, la famille $\{P_k(J)\}_{k\in\mathbf{N}}$ forme une partition de l'unité sur $\mathcal{H}$.

Nous utiliserons ces partitions de l'unité dans le cas suivant : $j_0 = j_0(x)$, $j_\infty = j_\infty(x)$, où $j_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^d), j_0 \equiv 1$ près de 0, $j_0^2(x) + j_\infty^2(x) = 1$.

Nous noterons par J^R pour $R >> 1$, l'opérateur $(j_0(\frac{x}{R}), j_\infty(\frac{x}{R}))$. L'opérateur $P_k(J^R)$ est localisé sur les états ayant exactement k bosons dans le support de $j_\infty(\frac{x}{R})$.

Le résultat suivant est une des clés de l'analyse géométrique :

Théorème 8 *i) les limites*

$$s - \lim_{t\to\pm\infty} e^{itH} P_k(J^t) e^{-itH} =: P_k^+(J)$$

existent et vérifient :

$$[P_k^+(J), H] = 0 \ , \ s - \sum_0^\infty P_k^+(J) = \mathbf{1} \ .$$

ii) Soit $U \subset \mathbf{R}^d \setminus \{0\}$ un ouvert. Soit $J_n = (j_{0,n}, j_{\infty,n})$ une suite avec $j_{0,n}^2 + j_{\infty,n}^2 = 1$, $j_{\infty,n} \leq j_{\infty,n+1} \leq \mathbf{1}_{\mathcal{U}}$, $j_{\infty,n}(x) \to \mathbf{1}_U(x), x \in \mathbf{R}^d$.

Alors la limite

$$P_k^+(U) := s \lim_{n\to\infty} P_k^+(J_n)$$

existe et est indépendante de la suite J_n. On a :

$$[P_k^+(U), H] = 0 \ , s - \sum_0^\infty P_k^+(U) = \mathbf{1} \ , P_k^+(U)^2 = P_k^+(U) \ ,$$

Le point i) se démontre à l'aide d'estimations de propagation similaires à celles du scattering non relativiste. Le point ii) est plus délicat et repose sur des propriétés de monotonie par rapport à J des opérateurs $P_k(J)$. Le projecteur $P_k^+(U)$ projette sur les états ayant exactement k bosons asymptotiquement dans U. Le cas où $U = \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ est particulièrement important. On notera alors $P_k^+(U)$ simplement par P_k^+.

Le résultat suivant peut s'interpréter comme la *complétude asymptotique géométrique*. Notons que l'hypothèse (H0) n'est pas nécessaire ici.

Théorème 9 *Supposons (H1), (H2), (I0), (SR) et $m > 0$. Alors*

$$\mathcal{K}^{\pm} = \mathrm{Im} P_0^{\pm}.$$

Enfin la complétude asymptotique (Thm.7) suit du Théorème 9 et du résultat suivant, qui se déduit de l'estimation de commutateur positif du Théorème 2.

Théorème 10 *Supposons (H0) - (H2), (I0), (SR) et $m > 0$. Alors*

$$\mathrm{Im} P_0^{\pm} = \mathcal{H}_{pp}(H) \ .$$

Références

[AH] Arai, A, Hirokawa, M: On the existence and uniqueness of ground states of the spin-boson Hamiltonian, preprint 1995

[BFS] V. Bach, J. Fröhlich, I. Sigal: Quantum electrodynamics of confined non-relativistic particles, Sonderforschungsbereich 288 preprint, 1996

[Bl] P. Blanchard: Discussion mathematique du modéle de Pauli et Fierz relatif à la catastrophe infrarouge, Comm. Math. Phys. 15 (1969) 156

[De] Dereziński, J.: Asymptotic completeness in quantum field theory. A class of Galilei-covariant models, preprint Ecole Polytechnique, 1996

[DG] :Asymptotic completeness in quantum field theory.
Massive Pauli-Fierz Hamiltonians, Preprint 1997.

[Ge] Gérard, C.: Asymptotic completeness for the spin-boson model with a particle number cutoff, Rev. Math. Phys. 8 (1996) 549-589

[HK1] Høegh-Krohn R.: Asymptotic limits in some models of quantum field theory, I J. Math. Phys. J. Math. Phys. 9 (1968) 2075-2079

[HK2] Høegh-Krohn R.: Boson fields under a general class of cut-off interactions, Comm. Math. Phys. 12 (1969) 216-225

[HuSp1] Hübner, M., Spohn, H.: Radiative decay: nonperturbative approaches, Rev. Math. Phys 7 (1995) 363-387

[HuSp2] Hübner, M., Spohn, H.: Spectral properties of the spin-boson Hamiltonian, Ann. Inst. H. Poincare 62 (1995) 289-323

[Si] Simon, B.: *The $P(\phi)_2$ Euclidean (Quantum) Field Theory*, Princeton University Press, Princeton 1974

[Sk] Skibsted, E.: Spectral analysis of N-body systems coupled to a bosonic system, preprint, 1997

[Sp1] Spohn, H.: Ground states of the spin-boson hamiltonian, Comm. Math. Phys. 1989.

[Sp2] Spohn, H.: Asymptotic completeness for Raleigh scattering, preprint 1996