Centre de Mathématiques Laurent Schwartz
ECOLE POLYTECHNIQUE

SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

François Bouchut

Un formalisme pour les estimations de type Kružkov pour les lois de conservation scalaires

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° XVIII, 12 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A18_0>

U.M.R. 7640 du C.N.R.S.
F-91128 PALAISEAU CEDEX
Fax : 33 (0)1 69 33 49 49
Tél : 33 (0)1 69 33 49 99

Un formalisme pour les estimations de type Kružkov pour les lois de conservation scalaires

François Bouchut
Université d'Orléans et CNRS, UMR 6628
Département de Mathématiques
BP 6759
45067 Orléans cedex 2, France
e-mail: fbouchut@labomath.univ-orleans.fr

Résumé

On montre comment le formalisme introduit récemment par l'auteur et Benoî t Perthame permet de justifier la plupart des estimations d'erreurs pour des solutions approchées d'une loi de conservation scalaire.

1 Introduction

Dans le domaine des lois de conservation hyperboliques, le cas scalaire est quasiment le seul pour lequel on ait la possibilité de faire des estimations d'erreur. Le but de cet article est de donner un aperçu, le moins technique possible, de ces estimations.

Nous considérons uniquement le problème sans second membre ni condition de bord

$$\partial_t v + \operatorname{div} f(v) = 0 \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R}^N, \qquad v(0,x) = v^0(x). \tag{1.1}$$

La fonction flux $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^N$ est supposée globalement Lipschitzienne, cette hypothèse pouvant être affaiblie à localement Lipschitzienne lorsqu'on ne considère que des fonctions v bornées.

Il est bien connu depuis les travaux de Lax [15] que même si v^0 est régulière, des discontinuités sur v peuvent apparaî tre à des temps ultérieurs, et que dans le cadre des fonctions bornées, il n'y a pas unicité des solutions faibles de (1.1) (au sens des distributions). On est donc amené à ajouter des conditions pour obtenir l'unicité, appelées génériquement «conditions d'entropie». L'approche de Lax est la plus simple à concevoir. Elle consiste à dire que pour une solution v régulière de (1.1), on a $\operatorname{div} f(v) =$

$f'(v)\cdot\nabla v$. Multipliant l'équation par $S'(v)$, pour une fonction scalaire S donnée, on obtient $\partial_t S(v) + \operatorname{div}\eta(v) = 0$, avec η définie par $\eta' = S'f'$. Ceci n'est en fait pas valable pour des solutions v discontinues, mais si v est la limite de solutions régulières v_ε d'un problème visqueux

$$\partial_t v_\varepsilon + \operatorname{div} f(v_\varepsilon) - \varepsilon\Delta v_\varepsilon = 0, \tag{1.2}$$

comme on a

$$\partial_t S(v_\varepsilon) + \operatorname{div}\eta(v_\varepsilon) - \varepsilon\Delta S(v_\varepsilon) = -\varepsilon S''(v_\varepsilon)|\nabla v_\varepsilon|^2, \tag{1.3}$$

on obtient à la limite les «inégalités d'entropie»

$$\partial_t S(v) + \operatorname{div}\eta(v) \le 0 \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R}^N, \tag{1.4}$$

ceci pour toute entropie S convexe. Notons qu'on retrouve l'équation (1.1) en prenant successivement $S = Id$ et $S = -Id$.

Il existe d'autres formulations des conditions d'entropie, notamment concernant l'admissibilité des discontinuités éventuelles de v. Nous référons à [24], [10], [23] pour la théorie générale des lois de conservation hyperboliques. Signalons également la «condition d'entropie de Oleinik» introduite par Oleinik [18] valable pour les fonctions flux f convexes en une dimension d'espace, qui peut s'écrire (voir Hoff [11])

$$\partial_x[f'(v)] \le \frac{A}{1+At} \tag{1.5}$$

avec $A = \max(\sup\partial_x[f'(v^0)], 0)$ (remplacer le membre de droite par $1/t$ si A est infini). Comme l'a montré Tadmor [26], [17], cette condition d'entropie permet également de faire des estimations d'erreur. Un problème ouvert important est de trouver comment affaiblir (1.5) pour une fonction f vraiment non linéaire en plusieurs dimensions.

2 La méthode de Kružkov

Revenons aux inégalités d'entropie (1.4), et prenons pour S les entropies introduites par Oleinik

$$S_k(\xi) = |\xi - k|, \tag{2.1}$$

pour $k\in\mathbb{R}$. Le flux d'entropie η_k associé étant défini à constante près par $\eta_k' = S_k' f'$, on peut prendre

$$\eta_k(\xi) = \operatorname{sgn}(\xi - k)[f(\xi) - f(k)]. \tag{2.2}$$

Il est capital de remarquer pour la suite que cette formule est symétrique en ξ et k. L'inégalité (1.4) s'écrit alors

$$\partial_t|v-k| + \operatorname{div}\operatorname{sgn}(v-k)[f(v)-f(k)] \le 0. \tag{2.3}$$

Notons que les inégalités (2.3) pour $k\in\mathbb{R}$ sont équivalentes à (1.4). En effet, écrivant

$$\partial_t(|v-k| - |k|) + \operatorname{div}\Big\{\operatorname{sgn}(v-k)[f(v)-f(k)] - \operatorname{sgn}(-k)[f(0)-f(k)]\Big\} \le 0 \tag{2.4}$$

et faisant successivement $k \to -\infty$ et $k \to +\infty$, on retrouve (1.1). Ensuite, il suffit d'approcher une fonction S convexe Lipschitzienne quelconque par la somme d'une fonction affine et d'une combinaison linéaire à coefficients positifs de fonctions S_k. On peut aussi utiliser la représentation $S(\xi) = \int \frac{1}{2}(|\xi - k| - |k|)S''(k)dk + A\xi + B$.

Cette formulation (2.3) a tout d'abord été utilisée par Oleinik [19] pour caractériser les discontinuités admissibles de la solution v, puis par Vol'pert [29] pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution dans la classe des fonctions à variation bornée, ceci étant possible grâce à l'estimation *a priori*

$$\frac{d}{dt}\,\mathrm{TV}_x(v(t,.)) \leq 0, \tag{2.5}$$

qui est valable aussi pour le problème visqueux (1.2). Kružkov a ensuite démontré [13] que ces mêmes inégalités permettaient en fait de montrer l'existence et l'unicité dans L^1. Son résultat d'unicité est le suivant :

Théorème 1 (Kružkov) *Soient $u, v \in C([0,\infty[, L^1(\mathbb{R}^N))$ deux solutions de (2.3) de données initiales u^0 et v^0. Alors pour tout $T \geq 0$*

$$\|u(T,.) - v(T,.)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1(\mathbb{R}^N)}. \tag{2.6}$$

Plus précisément, on a

$$\partial_t|u - v| + \operatorname{div}\operatorname{sgn}(u - v)[f(u) - f(v)] \leq 0 \quad \textit{dans} \quad]0,\infty[\times\mathbb{R}^N. \tag{2.7}$$

Bien entendu, la propriété de contraction (2.6) se déduit de (2.7) par intégration par rapport à x. Le résultat de Kružkov est en fait plus précis : on peut faire une estimation locale en intégrant (2.7) sur un cône. On se limite ici à des estimations globales pour simplifier la présentation. La démonstration de l'inégalité (2.7) peut se résumer de la façon suivante. On écrit l'équation sur u

$$\partial_t|u(t,x) - k| + \operatorname{div}_x \operatorname{sgn}(u(t,x) - k)[f(u(t,x)) - f(k)] \leq 0, \tag{2.8}$$

on prend $k = v(s,y)$ et on considère cette équation dans les variables indépendantes (t,x,s,y). On fait la même chose pour v en échangeant le rôle de (t,x) et (s,y), puis on additionne les deux. Grâce à la symétrie du flux, on obtient

$$(\partial_t+\partial_s)|u(t,x)-v(s,y)|+(\operatorname{div}_x + \operatorname{div}_y)\Big\{\operatorname{sgn}(u(t,x)-v(s,y))[f(u(t,x))-f(v(s,y))]\Big\} \leq 0. \tag{2.9}$$

Ensuite on évalue cette quantité contre une fonction test

$$\varphi(t,x,s,y) = \Phi\Big(\frac{t+s}{2}, \frac{x+y}{2}\Big)\,\zeta(t-s, x-y), \tag{2.10}$$

où Φ et ζ sont des fonctions C^∞ à support compact positives. Comme on a $(\partial_t + \partial_s)\zeta(t-s,x-y) = 0$ et $(\nabla_x + \nabla_y)\zeta(t-s,x-y) = 0$, les dérivées ne portent que sur la fonction Φ. Ainsi, on peut faire tendre ζ vers la masse de Dirac à l'origine, et on obtient l'inégalité cherchée (2.7) évaluée contre la fonction test Φ.

Lorsqu'on considère une solution u d'un problème approché, cette démonstration permet de faire des estimations d'erreur, selon la méthode introduite par Kuznetsov [14]. Elle consiste à prendre pour ζ une suite régularisante

$$\zeta(t,x) = \frac{1}{\delta}\zeta_1^t\Big(\frac{t}{\delta}\Big)\,\frac{1}{\Delta^N}\zeta_1^x\Big(\frac{x}{\Delta}\Big), \tag{2.11}$$

tout en gardant δ et Δ finis (contrairement à la preuve de Kružkov où δ, $\Delta \to 0$), ce qui induit des erreurs en $C\delta + C\Delta$. Cela est imposé par le fait que les termes d'erreur sont généralement en ε/δ et ε/Δ, avec ε l'ordre de grandeur de l'erreur. Optimisant le choix de δ et Δ, l'estimation en $C(\delta+\Delta+\varepsilon/\delta+\varepsilon/\Delta)$ donne $\sqrt{\varepsilon}$.

Ce programme a été réalisé dans de nombreuses situations, aussi bien dans des cas continus (comme l'approximation visqueuse (1.2)), voir [14], [16], [3], que dans des cas discrets provenant de l'analyse numérique ([22], [4], [25], [5], [28], [7]). C'est dans ce dernier cadre que se sont développées des méthodes de plus en plus élaborées, notamment pour les problèmes multidimensionnels où on n'a pas en général de borne sur la variation totale de u, contrairement à la dimension un où on a des méthodes à variation totale décroissante (TVD).

3 Un formalisme pour les estimations d'erreur

Lorsque la méthode de Kuznetsov [14] est appliquée aux approximations numériques pour des méthodes telles que volumes finis ou éléments finis, les formules deviennent rapidement très complexes, à cause du dédoublement de variables et des nombreux indices attachés à l'approximation discrète elle-même. C'est pourquoi l'auteur a proposé, en collaboration avec B. Perthame, un formalisme permettant d'éviter ces calculs de dédoublement de variables, en les remplaçant par une vérification que les termes d'erreurs ont une certaine forme.

On suppose que la solution approchée u vérifie pour $k \in \mathbb{R}$

$$\partial_t|u-k| + \operatorname{div}\operatorname{sgn}(u-k)[f(u)-f(k)] \le \partial_t G_k + \operatorname{div} H_k + \sum_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}L_k^{(ij)}, \tag{3.1}$$

où G_k, H_k, $L_k^{(ij)}$ sont des mesures vérifiant

$$|G_k(t,x)| \le \alpha_G(t,x), \quad |H_k^{(j)}(t,x)| \le \alpha_H^{(j)}(t,x), \quad |L_k^{(ij)}(t,x)| \le \alpha_L^{(ij)}(t,x), \tag{3.2}$$

avec α_G, $\alpha_H^{(j)}$, $\alpha_L^{(ij)}$ des mesures positives indépendantes de k.

Théorème 2 ([2]) *Si u vérifie (3.1)-(3.2) est continu à droite à valeurs $L^1(\mathbb{R}^N)$, on a pour toute solution exacte v et tous $\delta > 0$, $\Delta > 0$*

$$\|u(T)-v(T)\|_{L^1} \le \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\left(\mathrm{TV}(v^0)(M\delta+\Delta) + E^G + E^H + E^L\right), \tag{3.3}$$

avec $M = \mathrm{Lip}(f)$ *et*

$$E^H = \frac{1}{\Delta} \sum_j \iint_{t \le T} \alpha_H^{(j)}, \qquad E^L = \frac{1}{\Delta^2} \sum_{ij} \iint_{t \le T} \alpha_L^{(ij)}, \tag{3.4}$$

$$E^G = \left(1 + \frac{T}{\delta} + \frac{MT}{\Delta}\right) \sup_{t<2T} \int \alpha_G \, dx. \tag{3.5}$$

En d'autres termes, excepté le terme de dérivée en temps E^G, il suffit de remplacer chaque ∂_{x_i} par $1/\Delta$. Remarquons qu'apparaî t seulement la variation totale de la solution exacte v, et non celle de u. Ceci s'obtient en dissymétrisant la fonction test φ de (2.10) sous la forme

$$\varphi(t, x, s, y) = \Phi(t, x)\zeta(t - s, x - y), \tag{3.6}$$

une astuce déjà utilisée par Kuznetsov. Cependant, en pratique, la variation totale de u apparaî t quand même dans les mesures. Il faut utiliser des formes plus particulières pour arriver à s'en passer, voir la section 4.

Appliquons maintenant ce théorème au problème visqueux

$$\partial_t u + \operatorname{div} f(u) - \varepsilon \Delta u = 0. \tag{3.7}$$

Les inégalités d'entropie approchées s'écrivent (voir (1.3))

$$\partial_t |u - k| + \operatorname{div} \operatorname{sgn}(u - k)[f(u) - f(k)] \le \varepsilon \Delta |u - k|, \tag{3.8}$$

et le membre de droite est de la forme $\operatorname{div} H_k$, avec $H_k = \varepsilon \nabla |u - k|$. Comme u est à variation bornée (la variation en x de u décroî t), H_k et une mesure, et on a (voir [2]) $|H_k^j| \le \varepsilon |\partial_j u| \equiv \alpha_H^{(j)}$ qui est indépendant de k. On obtient donc pour tous $\delta > 0$ et $\Delta > 0$

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \le \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\left[\mathrm{TV}(v^0)(M\delta + \Delta) + \frac{1}{\Delta}\varepsilon T \; \mathrm{TV}(u^0)\right]. \tag{3.9}$$

Faisant $\delta \to 0$ et choisissant le meilleur Δ, on obtient

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \le \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\sqrt{\mathrm{TV}(v^0)\,\mathrm{TV}(u^0)\varepsilon T}, \tag{3.10}$$

et l'erreur est en $\sqrt{\varepsilon}$ dès que $u^0 \in \mathrm{BV}$. Mais on peut aussi écrire le membre de droite de (3.8) sous la forme $\Delta_x L_k$, avec $L_k = \varepsilon(|u - k| - |k|)$. Comme $|L_k| \le \varepsilon |u| \equiv \alpha_L$ qui est indépendant de k, on obtient pour tous $\delta > 0$ et $\Delta > 0$

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \le \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\left[\mathrm{TV}(v^0)(M\delta + \Delta) + \frac{N}{\Delta^2}\varepsilon T \|u^0\|_{L^1}\right]. \tag{3.11}$$

Faisant $\delta \to 0$ et choisissant le meilleur Δ, on obtient

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C_N \,\mathrm{TV}(v^0)^{2/3}(\varepsilon T \|u^0\|_{L^1})^{1/3}. \tag{3.12}$$

On voit qu'avec seulement $u^0 \in L^1$ (et non pas BV), on a une estimation moins bonne en $\varepsilon^{1/3}$.

On peut aussi appliquer le théorème 2 à la méthode de Godunov, sous sa forme la plus abstraite. On définit l'approximation u^n de $v(t^n)$, avec $t^n = n\Delta t$, $\Delta t > 0$, $n \in \mathbb{N}$, en résolvant de façon exacte

$$\partial_t u + \operatorname{div} f(u) = 0 \quad \text{dans} \quad]t^n, t^{n+1}[\times \mathbb{R}^N, \qquad u(t^n) = u^n, \tag{3.13}$$

et en posant $u^{n+1} = P^0(u(t^{n+1}-))$, où P^0 est la projection constante par mailles associée à un maillage $(C_i)_{i\in I}$ de $\mathbb{R}^N$. En d'autres termes,

$$(u^{n+1})_{|C_i} = \frac{1}{|C_i|}\int_{C_i} u(t^{n+1}-, y)\, dy. \tag{3.14}$$

Comme la solution exacte de (3.13) dissipe l'entropie, on peut écrire pour toute fonction S convexe et Lipschitzienne, en tenant compte des sauts aux temps t^n,

$$\begin{aligned} \partial_t S(u) + \operatorname{div} \eta(u) &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - t^n)\Big[S\Big(P^0(u(t^n-))\Big) - S\Big(u(t^n-)\Big)\Big] \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - t^n) S'\Big(P^0(u(t^n-))\Big)\Big[P^0(u(t^n-)) - u(t^n-)\Big]. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Le membre de droite de (3.15)

$$R_S = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - t^n) S'\Big(P^0(u(t^n-))\Big)\Big[P^0(u(t^n-)) - u(t^n-)\Big] \tag{3.16}$$

est une mesure, qui vérifie sous réserve de régularité du maillage

$$\begin{aligned} \iint_{t\leq T} |R_S| &\leq \sum_{t^n \leq T} \Big\| S'\Big(P^0(u(t^n-))\Big)\Big[P^0(u(t^n-)) - u(t^n-)\Big]\Big\|_{L^1} \\ &\leq \sum_{t^n\leq T} \mathrm{Lip}(S)\, \kappa h \,\mathrm{TV}(u(t^n-)), \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $h = \sup_i \operatorname{diam}(C_i)$ et κ dépend de la régularité du maillage ($\kappa = 1/2$ en dimension un). Ainsi, si $\mathrm{TV}(u^n)$ et uniformément borné (ce qui est le cas en dimension un car P^0 fait décroî tre la variation) et si Δt et h sont du même ordre, R_S est borné en norme. On utilise alors le lemme suivant

Lemme 1 ([2]) *Soit $m \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que pour tout $i \in I$ $\int_{C_i} m = 0$. Alors il existe un champ de vecteurs $H \in L^1(\mathbb{R}^N)$ tel que* $\operatorname{div} H = m$ *et* $\|H\|_{L^1} \leq h\|m\|_{L^1}$.

Comme $\int_{C_i} R_S = 0$, on a $R_S = \operatorname{div} H_S$, avec $\iint_{t\leq T} |H_S| \leq h \iint_{t\leq T} |R_S|$. Prenant $S(\xi) = |\xi - k|$, on peut donc appliquer le théorème 2 (on peut vérifier à l'aide de la preuve du lemme 1 qu'on a en fait une domination par un terme indépendant de k) et on obtient une estimation en $\sqrt{h}$.

Une alternative à l'inégalité de convexité utilisée dans (3.15) consiste à écrire une inégalité de Jensen

$$S\Big(P^0(u(t^n-))\Big) - S\Big(u(t^n-)\Big) \leq P^0\Big[S\Big(u(t^n-)\Big)\Big] - S\Big(u(t^n-)\Big) \tag{3.18}$$

et de considérer le terme d'erreur correspondant

$$\widetilde{R}_S = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-t^n)\Big\{P^0\Big[S\Big(u(t^n-)\Big)\Big] - S\Big(u(t^n-)\Big)\Big\}, \tag{3.19}$$

qui est encore de moyenne nulle sur chaque maille. Le problème est qu'alors il n'est pas clair que $\widetilde{H}_k$ soit dominé par un terme indépendant de k.

Remarquons que le membre de droite R_S est seulement borné en norme, et ne tend pas vers 0 fortement. La consistance est obtenue seulement au sens des distributions, $R_S = \operatorname{div} H_S$ avec H_S de l'ordre de h, grâce à la consistance des moyennes sur chaque maille. On peut conjecturer que $u-v$ est en fait de l'ordre de h au sens des distributions, bien que $\|u-v\|_{L^1} \sim \sqrt{h}$ soit optimal avec seulement la régularité BV [27]. Ceci peut se justifier dans le cas linéaire $f(\xi) = a\xi$ où les entropies sont inutiles. En effet, prenant $S = Id$ on a en fait égalité dans (3.15), et notant $u = \partial_x U$, $v = \partial_x V$, on a en intégrant

$$\partial_t(U-V) + a\partial_x(U-V) = H_{Id}, \tag{3.20}$$

avec H_{Id} de l'ordre de h. D'où $u - v = \partial_x(U-V)$, $\|U-V\|_{L^1} \sim h$. On peut en déduire l'estimation L^1 par interpolation

$$\|u-v\|_{L^1} = \|\partial_x(U-V)\|_{L^1} \leq C\sqrt{\|U-V\|_{L^1}\|\partial^2_{xx}(U-V)\|_{L^1}} \sim \sqrt{h}. \tag{3.21}$$

Par contre, si par hasard on a plus de régularité, par exemple $\partial_x^k(u-v) \in L^1$, on peut écrire

$$\|u-v\|_{L^1} = \|\partial_x(U-V)\|_{L^1} \leq C\|U-V\|_{L^1}^{k/(k+1)}\|\partial_x^{k+1}(U-V)\|_{L^1}^{1/(k+1)} \sim h^{k/(k+1)}. \tag{3.22}$$

Une estimation du même genre a été justifiée par Tadmor [26], [17] dans l'autre cas où on peut éviter l'utilisation des inégalités d'entropie : lorsqu'on utilise la condition de Oleinik (1.5). Les estimations sont alors écrites dans le dual de Lip($\mathbb{R}$), ce qui est presque équivalent à écrire des dérivées de mesures.

Lorsqu'on utilise une méthode numérique d'ordre deux, il est beaucoup plus difficile d'avoir des inégalités d'entropie. Dans les bons cas on arrive à montrer la convergence en $h^{1/2}$ ([20], [1], [12]), mais le problème d'obtenir des estimations meilleures reste ouvert.

4 Estimations d'erreurs sans contrôle de la variation totale

En plusieurs dimensions et sur des maillages non cartésiens, les méthodes numériques de type volumes finis sont confrontées au problème d'une variation totale non bornée. Cela peut se voir par le fait que la projection constante par mailles P^0 ne fait pas décroî tre la variation en général. Dans ce contexte, il est quand même possible de faire des estimations locales en $h^{1/4}$, voir par exemple [4], [25], [5], [28], [7], [9], [21]. La méthode consiste à utiliser la dissipation de l'entropie $S(\xi) = \xi^2/2$ pour en déduire une estimation plus ou moins équivalente à $\mathrm{TV}(u) \leq Ch^{-1/2}$, et ceci donne une erreur en $h^{1/4}$.

Par exemple pour la méthode de Godunov considérée dans la partie 3, on écrit l'inégalité (3.15) pour $S(\xi) = \xi^2/2$ sous la forme

$$\begin{aligned}&\partial_t \frac{u^2}{2} + \operatorname{div} \eta(u) \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t-t^n) \left\{ P^0(u(t^n-)) \Big[P^0(u(t^n-)) - u(t^n-) \Big] - \frac{1}{2} \Big[P^0(u(t^n-)) - u(t^n-) \Big]^2 \right\},\end{aligned} \tag{4.1}$$

et intégrant en espace-temps il vient

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} \int \Big| P^0(u(t^n-)) - u(t^n-) \Big|^2 \, dx \leq \int |u^0|^2/2. \tag{4.2}$$

Ensuite, par Cauchy-Schwarz on obtient si ω est borné

$$\sum_{t^n \leq T} \int_{x \in \omega} \Big| P^0(u(t^n-)) - u(t^n-) \Big| \, dx \leq \sqrt{\frac{T|\omega|}{\Delta t}} \|u^0\|_{L^2}, \tag{4.3}$$

ce qui permet d'estimer R_S dans (3.17) (au moins localement en x) sans utiliser la variation de u. Après utilisation du lemme 1, on obtient $R_S = \operatorname{div} H_S$, avec H_S de l'ordre de $h/\sqrt{\Delta t}$, et l'estimation finale est en $h^{1/2}/\Delta t^{1/4} \sim h^{1/4}$.

Plus récemment, Cockburn et Gremaud [6], [8] ont proposé une méthode permettant d'obtenir des estimations en $h^{1/2}$ sans utiliser d'estimation sur la variation totale de u. L'idée consiste à exploiter la forme de la fonction test φ définie en (3.6). La fonction Φ étant une approximation de $\mathbb{1}_{t<T}$, on a quasiment $\nabla_x \varphi = -\nabla_y \varphi$. Ainsi, des dérivées en x équivalent à des dérivées en y et on peut espérer reporter la régularité manquante de $u(x)$ sur celle de $v(y)$, la solution exacte. Cela se formalise de la façon suivante.

Théorème 3 ([2]) *Sous les hypothèses du théorème 2, supposons que $L_k^{(ij)}$ s'écrive sous la forme d'une fonction*

$$L_k^{(ij)}(t,x) = L^{(ij)}(t,x,k) \tag{4.4}$$

vérifiant une condition de Lipschitz en k uniforme en (t,x)

$$|L^{(ij)}(t,x,k_1) - L^{(ij)}(t,x,k_2)| \leq M_L^{(ij)}|k_1 - k_2|. \tag{4.5}$$

Alors le terme E^L de l'estimation (3.3) peut être remplacé par le terme intégré par parties $E^{\partial L}$,

$$E^{\partial L} = \frac{T+\delta}{\Delta} \sum_{ij} M_L^{(ij)} \int \Big| \frac{\partial v^0}{\partial x_j} \Big|. \tag{4.6}$$

Appliquons ce résultat au problème visqueux (3.7). On a vu dans la partie 3 que le terme d'erreur s'écrit $\Delta_x L_k$, avec $L(t,x,k) = \varepsilon(|u-k| - |k|)$. Ainsi, (4.5) est vérifié avec $M_L^{(ij)} = 2\varepsilon\delta_{ij}$. On en déduit pour tous $\delta > 0$ et $\Delta > 0$

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\left[\mathrm{TV}(v^0)(M\delta + \Delta) + \frac{T+\delta}{\Delta}\varepsilon\,\mathrm{TV}(v^0)\right]. \tag{4.7}$$

Faisant $\delta \to 0$ et choisissant le meilleur Δ on trouve

$$\|u(T) - v(T)\|_{L^1} \leq \|u^0 - v^0\|_{L^1} + C\,\mathrm{TV}(v^0)\sqrt{T\varepsilon}. \tag{4.8}$$

Cette estimation est la même que (3.10) sauf qu'on a remplacé $\mathrm{TV}(u^0)$ par $\mathrm{TV}(v^0)$.

Il est plus délicat d'appliquer cette méthode à des approximations discrètes. En effet, il faut faire apparaî tre le membre de droite sous la forme de dérivées secondes de termes petits. Cela nécessite d'utiliser des propriétés plus profondes que précédemment. Voyons comment Cockburn et Gremaud s'y prennent en une dimension, en utilisant la formulation de Kuznetsov (bien que dans ce cas la propriété TVD permette de conclure). Les inégalités d'entropie discrètes, moyennes sur une maille espace-temps de (1.4), s'écrivent

$$\frac{S(u_i^{n+1}) - S(u_i^n)}{\Delta t} + \frac{\eta_{i+1/2}^{n+1/2} - \eta_{i-1/2}^{n+1/2}}{\Delta x_i} \leq 0. \tag{4.9}$$

Définissons u constant par mailles espace-temps

$$u(t,x) = u_i^n \qquad \text{si} \quad t^n \leq t < t^{n+1} \text{ et } x \in C_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[, \tag{4.10}$$

et définissons également les termes Y_S et X_S constants par mailles espace-temps égaux respectivement à $[S(u_i^{n+1}) - S(u_i^n)]/\Delta t$ et $[\eta_{i+1/2}^{n+1/2} - \eta_{i-1/2}^{n+1/2}]/\Delta x_i$. Ainsi, (4.9) s'écrit $Y_S + X_S \leq 0$, et on peut écrire l'équation approchée sur u

$$\partial_t S(u) + \partial_x \eta(u) \leq \partial_t S(u) - Y_S + \partial_x \eta(u) - X_S. \tag{4.11}$$

Evaluons tout d'abord le terme d'erreur en temps contre une fonction test $\varphi(t,x)$,

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_t S(u) - Y_S, \varphi\rangle \\
&= -\langle S(u), \partial_t\varphi\rangle - \langle Y_S, \varphi\rangle \\
&= \sum_{n,i}\Big\{ -S(u_i^n)\left[\int_{C_i}\varphi(t^{n+1},x)\,dx - \int_{C_i}\varphi(t^n,x)\,dx\right] \\
&\qquad\quad - \left[S(u_i^{n+1}) - S(u_i^n)\right]\oint_{t^n}^{t^{n+1}}\int_{C_i}\varphi(t,x)\,dtdx\Big\} \\
&= \sum_{n,i} S(u_i^n)\int_{C_i}\left[\oint_{t^n}^{t^{n+1}}\varphi(t,x)\,dt - \oint_{t^{n-1}}^{t^n}\varphi(t,x)\,dt - \varphi(t^{n+1},x) + \varphi(t^n,x)\right]dx,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

où $\oint$ désigne l'intégrale normalisée. On voit apparaî tre un terme ressemblant à $\Delta t\partial_{tt}^2\varphi$. Estimons maintenant l'erreur en x,

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_x \eta(u) - X_S, \varphi\rangle \\
&= -\langle \eta(u), \partial_x\varphi\rangle - \langle X_S, \varphi\rangle \\
&= \sum_{n,i}\Big\{ -\eta(u_i^n)\left[\int_{t^n}^{t^{n+1}}\varphi(t,x_{i+1/2})\,dt - \int_{t^n}^{t^{n+1}}\varphi(t,x_{i-1/2})\,dt\right] \\
&\qquad\quad - (\eta_{i+1/2}^{n+1/2} - \eta_{i-1/2}^{n+1/2})\int_{t^n}^{t^{n+1}}\oint_{C_i}\varphi(t,x)\,dtdx\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

Supposons maintenant qu'on ait une décomposition des flux d'entropie

$$
\begin{aligned}
\eta_{i+1/2}^{n+1/2} &= \eta_+(u_i^n) + \eta_-(u_{i+1}^n), \\
\eta(u_i^n) &= \eta_+(u_i^n) + \eta_-(u_i^n).
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

Alors on obtient en re-sommant (4.13)

$$
\begin{aligned}
&\langle \partial_x \eta(u) - X_S, \varphi\rangle \\
&= \sum_{n,i}\Big\{ \eta_+(u_i^n)\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left[\oint_{C_{i+1}}\varphi(t,x)dx - \oint_{C_i}\varphi(t,x)dx - \varphi(t,x_{i+1/2}) + \varphi(t,x_{i-1/2})\right]dt \\
&\qquad + \eta_-(u_i^n)\int_{t^n}^{t^{n+1}}\left[\oint_{C_i}\varphi(t,x)dx - \oint_{C_{i-1}}\varphi(t,x)dx - \varphi(t,x_{i+1/2}) + \varphi(t,x_{i-1/2})\right]dt\Big\}.
\end{aligned}
\tag{4.15}
$$

On voit apparaî tre un terme en $\Delta x_i\partial_{xx}^2\varphi$ et un terme en $\frac{\Delta x_{i+1}-\Delta x_i}{\Delta x_i}\partial_x\varphi$. Cela permet de conclure sous une condition de régularité forte du maillage, $\Delta x_{i+1} - \Delta x_i = O(h^2)$. Il faut aussi vérifier que les termes $\eta_+(u_i^n)$ et $\eta_-(u_i^n)$ sont Lipschitziens par rapport à k pour $S(\xi) = |\xi - k|$. Ceci est vrai par exemple pour le schéma de Engquist-Osher où

$$
\begin{aligned}
\eta_+(\xi) &= \mathrm{sgn}(\xi - k)[f_+(\xi) - f_+(k)], \\
\eta_-(\xi) &= \mathrm{sgn}(\xi - k)[f_-(\xi) - f_-(k)],
\end{aligned}
\tag{4.16}
$$

et f_+ et f_- sont définis par leurs dérivées

$$
(f_+)' = \max(f', 0), \qquad (f_-)' = \min(f', 0). \tag{4.17}
$$

Références

[1] F. Bouchut, Ch. Bourdarias, B. Perthame, *A MUSCL method satisfying all the numerical entropy inequalities*, Math. Comp. **65** (1996), 1439-1461.

[2] F. Bouchut, B. Perthame, *Kružkov's estimates for scalar conservation laws revisited*, à paraî tre dans Trans. of the A.M.S.

[3] Y. Brenier, *Résolution d'équations d'évolution quasilinéaires en dimension N d'espace à l'aide d'équations linéaires en dimension $N+1$*, J. Diff. Eq. **50** (1983), 375-390.

[4] S. Champier, T. Gallouët, R. Herbin, *Convergence of an upstream finite volume scheme for a nonlinear hyperbolic equation on a triangular mesh*, Numer. Math. **66** (1993), 139-157.

[5] B. Cockburn, F. Coquel, P. Le Floch, *An error estimate for finite volume methods for multidimensional conservation laws*, Math. Comp. **63** (1994), 77-103.

[6] B. Cockburn, P.-A. Gremaud, *A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation laws. Part I: The general approach*, Math. Comp. **65** (1996), 533-573.

[7] B. Cockburn, P.-A. Gremaud, *Error estimates for finite element methods for scalar conservation laws*, SIAM J. Numer. Anal. **33** (1996), 522-554.

[8] B. Cockburn, P.-A. Gremaud, *A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation laws. Part II: flux-splitting monotone schemes on irregular cartesian grids*, prépublication.

[9] R. Eymard, T. Gallouët, R. Herbin, *The finite volume method*, book to appear, "Handbook of Numerical Analysis", Ph. Ciarlet and J.L. Lions eds.

[10] E. Godlewski, P.-A. Raviart, *Hyperbolic systems of conservation laws*, Coll. Math. et Appl., Ellipses, Paris (1991).

[11] D. Hoff, *The sharp form of Oleinik's entropy condition in several space variables*, Trans. of the A.M.S. **276** (1983), 707-714.

[12] G. Jiang, C.-W. Shu, *On a cell entropy inequality for discontinuous Galerkin methods*, Math. Comp. **62** (1994), 531-538.

[13] S.N. Kružkov, *First order quasilinear equations in several independent variables*, Math. USSR Sb. **10** (1970), 217-243.

[14] N.N. Kuznetsov, *Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi-linear equation*, USSR Comp. Math. and Math. Phys. **16** (1976), 105-119.

[15] P.D. Lax, *Hyperbolic systems of conservation laws II*, Comm. Pure Appl. Math. **10** (1957), 537-566.

[16] B.J. Lucier, *A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws*, Math. Comp. **46** (1986), 59-69.

[17] H. Nessyahu, E. Tadmor, T. Tassa, *The convergence rate of Godunov type schemes*, SIAM J. Num. Anal. **31** (1994), 1-16.

[18] O.A. Oleinik, *Discontinuous solutions of nonlinear differential equations*, Amer. Math. Soc. Transl. (2) **26** (1963), 95-172.

[19] O.A. Oleinik, *On the uniqueness and stability of the generalized solution of the Cauchy problem for a quasilinear equation*, A.M.S. Transl. (2) **33** (1963), 285-290.

[20] S. Osher, E. Tadmor, *On the convergence of difference approximations to scalar conservation laws*, Math. of Comp. **50** (1988), 19-51.

[21] B. Perthame, *Convergence of N-schemes for linear advection equations*, Trends in Applications of Mathematics to Mechanics, Pitman M SPAM77, New-York (1995).

[22] R. Sanders, *On convergence of monotone finite difference schemes with variable spatial differencing*, Math. Comp. **40** (1983), 91-106.

[23] D. Serre, *Systèmes de lois de conservation I et II*, Diderot ed., Paris (1996).

[24] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion equations*, Springer-Verlag, N.Y. (1983).

[25] A. Szepessy, *Convergence of a shock-capturing streamline diffusion finite element method for scalar conservation laws in two space dimensions*, Math. Comp. (1989), 527-545.

[26] E. Tadmor, *Local error estimates for discontinuous solutions of nonlinear hyperbolic equations*, SIAM J. Num. Anal. **28** (1991), 891-906.

[27] T. Tang, Z.-H. Teng, *The sharpness of Kuznetsov's $O(\sqrt{\Delta x})$ L^1-error estimate for monotone difference schemes*, Math. Comp. **64** (1995), 581-589.

[28] J.-P. Vila, *Convergence and error estimates in finite volume schemes for general multidimensional scalar conservation laws I. Explicite monotone schemes*, Math. Modeling and Num. Anal. **28** (1994), 267-295.

[29] A.I. Vol'pert, *The spaces BV and quasilinear equations*, Math. USSR-Sbornik **2** (1967), 225-267.