SEMINAIRE

Equations aux Dérivées Partielles

1996-1997

Jean-Luc Joly, Guy Métivier, and Jeffrey Rauch

Solutions globales du système de Maxwell dans un milieu ferromagnétique

Séminaire É. D. P. (1996-1997), Exposé n° XI, 10 p.

<http://sedp.cedram.org/item?id=SEDP_1996-1997____A11_0>

Solutions globales du système de Maxwell dans un milieu ferromagnétique*

Jean-Luc JOLY
MAB, Université Bordeaux I
33405 Talence, FRANCE

Guy MÉTIVIER
IRMAR, Université Rennes I
35042 Rennes, FRANCE

Jeffrey RAUCH
Department of Mathematics, University of Michigan
Ann Arbor 48109 MI, USA

1. Introduction

Le modèle de Landau-Lifschitz pour la propagation des ondes électromagnétiques en présence d'un matériaux ferromagnétique fait intervenir (cf [JV1] et ses références) la fonction

$$F(m,h) := \frac{\gamma}{1+\alpha^2}\left(h\wedge m + \frac{\alpha}{|m|}\,(m\wedge(h\wedge m))\right)\,,\quad h,m\in\mathbb{R}^3, \tag{1}$$

où γ et α sont deux constantes positives.
Notre propos est de montrer que le système de Maxwell correspondant

$$\begin{cases} \partial_t E - \operatorname{rot} H &= 0 \\ \partial_t H + \operatorname{rot} E &= -\partial_t M \\ \partial_t M &= F(M,H) \end{cases} \tag{2}$$

possède des solutions d'énergie finie globales en temps et propage certaines régularités.
On dira que $U=(E,H,M)$ est une solution d'énergie finie dans la bande $S_T=[0,T]\times\mathbb{R}^3$ si chaque composante E,H,M appartient à $C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)$, si M est dans $L^\infty([0,T]\times\mathbb{R}^3)$ et si U satisfait (2) au sens des distributions avec

$$\operatorname{div} E = \operatorname{div}(H+M) = 0.$$

Pour de telles solutions le théorème linéaire sur les systèmes symétriques assure que l'énergie

$$\int_{\mathbb{R}^3}(|E(t,x)|^2+|H(t,x)|^2)\,dx\,,\quad 0\le t\le T$$

* Research partially supported by the U.S. National Science Foundation, U.S. Office of Naval Research, and the NSF-CNRS cooperation program under grants number NSF-DMS-9203413 and OD-G-N0014-92-J-1245 NSF-INT-9314095 respectively, and the CNRS through the Groupe de Recherche G1180 POAN.

est soit constante en fonction du temps, si $\alpha = 0$ dans (1), soit décroissante si $\alpha > 0$. De plus, pour presque tout $x \in \mathbb{R}^3$, la quantité

$$|M(t,x)|\,, \quad 0 \le t \le T \tag{3}$$

est invariante au cours du temps.

Définition. *On note $\mathcal{U}$ l'espace vectoriel formé par les distributions $U_0 = (E_0, H_0, M_0)$ qui appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3)\times L^2(\mathbb{R}^3)\times(L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3))$ et qui satisfont* $\mathrm{div}E_0 = \mathrm{div}(H_0 + M_0) = 0$. *L'espace $\mathcal{U}$ est normé par*

$$\|U_0\|_{\mathcal{U}} = \sqrt{\|E_0\|_2^2 + \|H_0\|_2^2} + \|M_0\|_{L^2\cap L^\infty}.$$

Si U est une solution d'énergie finie, la quantité $\|U(t)\|_{\mathcal{U}}$ décroî t donc au sens large avec le temps, restant constante si $\alpha = 0$.

2. Résultats sur le problème de Cauchy

On fait les hypothèses suivantes sur le terme d'interaction. La fonction $(m,h) \mapsto F(m,h)$ appartient à $C^\infty(\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3; \mathbb{R}^3)$, est linéaire par rapport à h, s'annule pour $m = 0$ et satisfait

$$F(m,h)\cdot m = 0\,,\ m,\ h\ \in \mathbb{R}^3$$

$$F(m,h)\cdot h \le 0\,,\ m,\ h\ \in \mathbb{R}^3$$

On notera $C(R)$ une constante telle que pour tout $|m|\,, |m'| \le R$

$$|F(m',h) - F(m,h)| \le C(R)\,|m'-m|\,|h|$$

La fonction donnée par

$$F(m,h) := \frac{\gamma}{1+\alpha^2}\left(h\wedge m + \frac{\alpha}{\sqrt{\delta^2+|m|^2}-\delta}\,(m\wedge(h\wedge m))\right)\,, \quad h, m\in\mathbb{R}^3,\ \delta > 0$$

satisfait toutes les propriétés. La fonction donnée par (1), qui est homogène de degré 1 par rapport à chaque variable, est seulement localement lipschitzienne mais satisfait toutes les autres propriétés. Nous indiquerons plus loin les modifications que ceci entraine dans les résultats que nous présentons maintenant.

On note $\mathbf{U_0}$ un sous-ensemble non vide de $\mathcal{U}$ tel que $\mathbf{M_0} = \{M_0;\ (E_0,H_0,M_0)\in\mathbf{U_0}\}$ soit dominé dans $L^2(\mathbb{R}^3)\cap L^\infty(\mathbb{R}^3)$.

Théorème 0. *L'ensemble $\mathbf{U}$ des solutions U d'énergie finie, définies sur S_∞ et telles que $U_{|t=0}\in\mathbf{U_0}$, est non vide. Si de plus $\mathbf{U_0}$ est compact dans $(L^2(\mathbb{R}^3))^3$, alors pour tout $T>0$, $\mathbf{U}_T = \mathbf{U}_{|S_T}$ est compact dans $(C^0([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)))^3$.*

Théorème 1. *Soit $U_0 \in \mathcal{U}$ tel que de plus* $\operatorname{rot} E_0$ *et* $\operatorname{rot} H_0$ *appartiennent à $L^2(\mathbb{R}^3)$. Il existe alors une unique solution d'énergie finie sur S_∞ telle que $U_{|t=0} = U_0$. De plus* $\operatorname{rot} E$ *et* $\operatorname{rot} H$ *appartiennent à $C^0([0,+\infty[; L^2(\mathbb{R}^3))$.*

Théorème 2. *Soit $U_0 \in \mathbf{U_0} \cap H^2(\mathbb{R}^3)$. Alors l'unique solution globale d'énergie finie telle que $U_{|t=0} = U_0$ vérifie $U \in C^0([0,+\infty[; H^2(\mathbb{R}^3))$.*

Le premier résultat établit l'existence de solutions d'énergie finie globales en temps, l'unicité restant une question ouverte. Il donne aussi une propriété de stabilité. Pour tout $T > 0$, l'application qui, à une donnée initiale, associe une des solutions du problème de Cauchy est, d'une certaine façon, continue de $\mathbf{U_0}$ muni de la topologie de L^2 dans $C^0([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3))$.

Le second théorème démontre l'unicité de la solution du problème de Cauchy sous l'hypothèse que les données initiales pour E et H ont un rotationnel dans L^2. Il dit aussi que cette régularité supplémentaire sur les rotationnels de E et H se propage.

Le dernier résultat montre que les solutions locales habituelles du problème de Cauchy à valeurs dans l'algèbre $H^2(\mathbb{R}^3)$ sont en fait globales en temps, de même que les solutions plus régulières.

Les preuves des théorèmes 1 et 2 utilisent une inégalité de Strichartz limite pour laquelle la dimension d'espace $d = 3$ apparait comme critique. Ainsi les théorèmes 1 et 2 sont vrais pour $d \leq 3$ mais l'estimation principale sur laquelle ils reposent, qui concerne une équation des ondes semi-linéaire, n'est sans doute plus valable si $d \geq 4$. En revanche le théorème 0 ne nécessite aucune restriction sur la dimension d'espace.

L'aspect critique de la dimension 3 se remarque sur la stabilité des estimations L^2 sur les rotationnels du champ électromagnétique. En dimension 2 les constantes dépendent de façon exponentielle du temps, alors qu'en dimension 3 la dépendance est en double exponentielle.

Les conclusions des théorèmes 0 et 1 demeurent pour une fonction F qui est seulement localement lipschitzienne comme celle qui est donnée par (1). Mais il est utile dans ce cas de remplacer le théorème 2 par un autre résultat d'approximation.

Pour tout $\lambda > 1$ définissons $S_\lambda = \varphi(\lambda^{-1} D_x)$ où $\varphi \in C_0^\infty$ est une fonction de troncature, $0 \leq \varphi \leq 1$, portée par $|\xi| \leq 2$ et égale à 1 sur $|\xi| = 1$. On s'intéresse à l'approximation des solutions d'énergie finie par les solutions du système d'équations

$$\begin{cases} \partial_t E^\lambda - \operatorname{rot} H^\lambda &= 0 \\ \partial_t H^\lambda + \operatorname{rot} E^\lambda &= -S_\lambda F(M^\lambda, H^\lambda) \\ \partial_t M^\lambda &= F(M^\lambda, H^\lambda) \end{cases}$$

et les conditions initiales

$$E_0^\lambda = S_\lambda E_0,\ H_0^\lambda = S_\lambda H_0,\ M_0^\lambda = M_0.$$

Théorème 3. *Soit F donnée par (1). Soit $U_0 \in \mathbf{U_0}$. Alors pour tout $\lambda \geq 1$, le problème de Cauchy précédent possède une unique solution globale U^λ appartenant à*

$C^1([0,+\infty[; L^2 \times L^2 \times L^\infty)$. De plus lorsque $\lambda \to +\infty$, U^λ possède une sous-suite convergeant vers une solution d'énergie finie globale U satisfaisant $U_{|t=0} = U_0 = (E_0, H_0, M_0)$.

Le modèle (1), (2) est discuté dans [JV1]. Le problème de Cauchy en dimension d'espace $d = 1$ ainsi que d'autres propriétés (comportement asymptotique, approximation numérique ...) du modèle sont étudiés dans [JV1], [JV2].

3. Une estimation a priori sur les rotationnels de E et H

Les résultats de ce paragraphe s'appliquent à la fonction F donnée par (1).

On introduit la décomposition orthogonale habituelle de $L^2(\mathbb{R}^3)$

$$L^2 = L^2_{\|} \oplus L^2_{\perp},$$

l'opérateur de projection $P_{\|} : L^2 \to L^2_{\|}$ donnant la composante de rotationnel nul et $P_{\perp} : L^2 \to L^2_{\perp}$ celle dont la divergence est nulle. On utilisera la même notation pour les homologues de ces opérateurs agissant dans les espace L^p, $1 < p < +\infty$. Si U est une solution d'énergie finie, sa composante H n'est pas en général à divergence nulle. On a $H = H_{\perp} + H_{\|}$ avec la relation $H_{\|} + M_{\|} = 0$: dans la partie de l'espace où $M_0(x) \neq 0$, qui figure l'emplacement du matériaux ferromagnétique, l'onde H est, compte tenu de (3), la superposition de deux ondes non nulles se propageant respectivement aux vitesses 1 et 0. Cette remarque sur les différents modes de propagation sera exploitée dans la preuve du Théorème 0.

PROPOSITION 3. *Soit U une solution d'énergie finie suffisamment régulière sur S_T. Il existe alors une constante C dépendant de T, de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$ et des normes de* $\mathrm{rot}\, E(0)$ *et* $\mathrm{rot}\, H(0)$ *dans $L^2(\mathbb{R}^3)$, telle que*

$$\sup_{0 \le t \le T} \big(\|\mathrm{rot}\, E(t)\|_2 + \|\mathrm{rot}\, H(t)\|_2 \big) \le C.$$

On commence par remarquer que les normes L^2 des rotationnels de $E(t)$ et $H(t)$ sont contrôlées par celle du gradient complet de $H_{\perp}(t)$ avec des constantes ne dépendant que de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$. On constate ensuite que $H_{\perp}$, dont la norme dans $C^0\big([0,T]; L^2)\big)$ est contrôlée par $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$, satisfait une équation des ondes semi-linéaire dont le terme de source g vérifie essentiellement

$$\|g(t)\|_2 = O(\| \, |H_{\perp}(t)|^2 \|_2),$$

avec des constantes ne dépendant que de la norme $\|U(0)\|_{\mathcal{U}}$.

Soit u une fonction scalaire régulière qui satisfait sur S_T

$$\Box u = g \,, \quad \|g(t)\|_2 = O(\| \, u(t)^2 \|_2). \tag{4}$$

L'objectif est d'obtenir une estimation a priori sur l'énergie à l'instant t , $0 \le t \le T$,

$$n(t) = \sqrt{\frac{1}{2}\|\partial_x u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\partial_t u(t)\|_2^2}.$$

en fonction de l'énergie $n(0)$ à $t=0$, avec des constantes ne dépendant que de la norme de u dans $C^0\big([0,T];L^2)\big)$. Lorsque $d=2$, l'inégalité de Sobolev $\|v\|_2 \leq C\|\partial_x v\|_1$ appliquée à $v=u^2(t)$ permet de linéariser le carré dans (4) et d'obtenir immédiatement le résultat.

Pour $d=3$, la même stratégie, à base d'inégalités de Sobolev, ne permet qu'un contrôle local qui explose en temps fini. Il est aussi habituel dans ce type de problème d' utiliser des estimations $L^q(L^p)$ dans l'espace-temps . Si p et q sont des réels tels que

$$\frac{1}{q}+\frac{3}{p}=\frac{1}{2}, \quad q>2,$$

alors toute fonction régulière vérifie l'inégalité de Strichartz généralisée (cf. [GV] par exemple)

$$\|u\|_{L^q([0,T];\,L^p(\mathbb{R}^3))} \leq C_{q,p,T}\big(n(0)+\|\Box u\|_{L^1([0,T];\,(L^2(\mathbb{R}^3))}\big),$$

Cependant l'estimation qui nous intéresse pour contrôler le terme u^2, qui correspond à $q=2$, $p=\infty$, est exclue. La constante $C_{q,p,T}$ explose comme un facteur de p lorsque $p\to+\infty$; des contrexemples de Lindblad [L] et Klainerman et Machedon [KM] indiquent qu'il est impossible d'espérer l'estimation pour $q=2$ et $p=+\infty$. La stratègie que nous présentons consiste cependant à suivre cette idée. Elle s'appuie sur une inégalité de Strichartz précisée en fréquence dans le cas limite $q=2$ et $p=+\infty$, dont un preuve est donnée dans [JMR].

Définissons pour $\lambda>1$ la famille de troncatures en fréquences $S_\lambda=\varphi(\lambda^{-1}D_x)$ où $\varphi\in C_0^\infty$ est portée par $|\xi|\leq 2$ et vaut 1 sur $|\xi|=1$.

LEMME 4. *Il existe une constante c telle que pour tout $\lambda>0$, tout $T>0$ et toute fonction $u\in C^0\big([0,\infty[;H^2(\mathbb{R}^3)\big)$,*

$$\|S_\lambda(u)\|_{L^2([0,T];\,L^\infty(\mathbb{R}^3))} \leq c\sqrt{\log(1+\lambda T)}\big(n(0)+\|\Box u\|_{L^1([0,T];\,(L^2(\mathbb{R}^3))}\big).$$

Soit u régulière sur S_T satisfaisant (4). Posons $\alpha_\lambda(s)=\|S_\lambda(u)(s)\|_\infty$, $0\leq s\leq T$. D'après (4) il existe une constante C qui ne dépend que de $\|u\|_{C^0\left([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\right)}$ telle que $\|\Box u(s)\|_2\leq C\|u(s)^2\|_2$. On écrit $u^2(s)=u(s)S_\lambda(u(s))+u(s)(I-S_\lambda)(u(s))$ et on vérifie que

$$\|u(s)^2\|_2 \leq C\Big(\alpha_\lambda(s)+\frac{n(s)^2}{\sqrt{\lambda}}\Big) \tag{5}$$

où C ne dépend que de $\|u\|_{C^0\left([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\right)}$.

Soit $(t_p)_p$ une suite finie strictement croissante de réels, commençant avec $t_0=0$ et bornée supérieurement par T. Introduisons les quantités

$$m(t_p,t_{p+1})=\sup_{t_p\leq s\leq t_{p+1}} n(s)+\sup_{\substack{0\leq\lambda\\ t_p\leq t\leq t_{p+1}}}\frac{\sqrt{\int_{t_p}^t \alpha_\lambda(s)^2ds}}{c\sqrt{\log(1+\lambda(t-t_p))}}, \quad p\geq 0. \tag{6}$$

Le contrôle de $n(T)$ sera obtenu par le contrôle de la fonction m, lui-même obtenu en ajustant la croissance de la suite (t_p) à la croissance de m par une méthode de petits pas. Additionnons l'estimation d'énergie pour $\square$,

$$n(t_{p+1}) \leq n(t_p) + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|\square u(s)\|_2 ds,$$

à celle que donne le Lemme 4, appliqué entre t_p et t_{p+1}. Il en résulte, compte tenu de (6), que

$$m(t_p, t_{p+1}) \leq 2\,(n(t_p) + \int_{t_p}^{t_{p+1}} \|\square u(s)\|_2 ds). \tag{7}$$

Reportant (5) dans (7), on obtient, en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz et la définition (6) de $m(s,t)$, que pour tout $\lambda > 0$,

$$\begin{aligned}(8)\qquad & m(t_p, t_{p+1}) \leq 2n(t_p) + \\ & C\sqrt{(t_{p+1}-t_p)\log(1+\lambda(t_{p+1}-t_p))}\, m(t_p,t_{p+1}) + C\int_{t_p}^{t_{p+1}} \frac{m(t_p,s)^2}{\sqrt{\lambda}} ds,\end{aligned}$$

où C ne dépend que de $\|u\|_{C^0\left([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\right)}$. Maintenant, grâce à (6) appliqué entre t_{p-1} et t_p, on majore $n(t_p)$ par $m(t_{p-1}, t_p)$; ensuite on choisit $\lambda = m(t_p, t_{p+1})^2$; enfin on majore l'intégrale dans (8) en utilisant la croissance de m. Pour simplifier, posons

$$m_0 = n(0), \quad m_p = m(t_{p-1}, t_p), \quad \delta_p = t_p - t_{p-1}, \quad p \geq 1.$$

Avec ces nouvelles notations et les majorations indiquées, l'inégalité (8) implique

$$\frac{m_{p+1}-m_p}{m_p} \leq 1 + C\sqrt{\delta_{p+1}\log(1+\delta_{p+1}m_{p+1}^2)}\frac{m_{p+1}}{m_p} + C\,\delta_{p+1}\frac{m_{p+1}}{m_p}, \quad p \geq 1. \tag{9}$$

Le choix

$$\delta_p = \inf(\frac{1}{4C}, \frac{1}{16C^2\log(1+\frac{4m_{p-1}^2}{C})}), \quad p \geq 1 \tag{10}$$

assure que les deux derniers termes à droite de (9) sont inférieurs à 1 si l'on y remplace m_{p+1} par $4m_p$. Ceci entraine que, pour tout s vérifiant $t_p \leq s \leq t_{p+1}$, on a $\frac{m(t_p,s)-m_p}{m_p} < 3$ donc $\frac{m_{p+1}-m_p}{m_p} \leq 3$. Par récurrence, il en résulte que

$$m_p \leq 4^p n(0), \quad p \geq 1. \tag{11}$$

Comme δ_p donné par (10) vérifie, à cause de (11),

$$\delta_p \geq \frac{1}{32C^2\log(1+2\frac{4^{p-1}n(0)}{\sqrt{C}})},$$

le réel $t_p = \sum_{1\leq j\leq p} \delta_j$ est minoré par $C_1 \log p$, donc supérieur à T pour p supérieur à e^{T/C_1}, ce qui achève la preuve de la Proposition 3.

La propriété d'unicité dans le théorème 1 résulte d'une propriété de stabilité des solutions d'énergie finie autour d'une solution d'énergie finie à rotationnels dans L^2 i.e., une solution $\underline{U}$ telle que $\mathrm{rot}\, \underline{E} \in C^0\big([0,+\infty[; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ and $\mathrm{rot}\, \underline{H} \in C^0\big([0,+\infty[; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$. La dimension $d = 3$ est toujours critique.

Proposition 5. *Soit $\underline{U}$ et U deux solutions d'énergie finie sur S_T. Supposons que $\mathrm{rot}\, \underline{E} \in C^0\big([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ et $\mathrm{rot}\, \underline{H} \in C^0\big([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$. Alors il existe $\underline{T}$ tel que $0 < \underline{T} < T$, une constante c et γ, une fonction décroissante vérifiant $\gamma(0) = 1$ et $\gamma(\underline{T}) > 0$, ne dépendant que de $\underline{U}$, tels que*

$$\|U(s) - \underline{U}(s)\|_2 \leq c\|U(0) - \underline{U}(0)\|_2^{\gamma(s)}, \quad 0 \leq s \leq \underline{T}$$

si $\|U(s) - \underline{U}(s)\|_2$ est assez petit.

4. Estimation $H^2(\mathbb{R}^3)$

On suppose dans ce paragraphe que la fonction F est de classe C^∞ à l'origine.

Proposition 6. *Soit $T > 0$ et U une solution d'énergie finie sur S_T suffisamment régulière. Il existe une constante C ne dépendant que de $\|U(0)\|_{H^2}$* telle que

$$\sup_{0\leq t\leq T} \|U(t)\|_{H^2} \leq C.$$

On écrit les équations pour les dérivées de U. Notant L l'opérateur différentiel intervenant dans (2), on obtient

$$LU = O(|H|), \quad L(\partial_x U) = O(|H||\partial_x M|),$$
$$L(\partial_x^2 U) = O(|\partial_x^2 M|, |\partial_x H||\partial_x M|, |H||\partial_x^2 M|, |H||\partial_x M|^2)$$

où les constantes dans les O ne dépendent que de la norme $\|M_0\|_\infty$.
Examinons l'équation pour $\partial_x^2 U$, l'équation pour $\partial_x U$ se traitant de façon analogue. On a $\||H(t)||\partial_x M(t)|^2\|_2 = O(\||H(t)||\partial_x^2 M(t)|\|_2)$ la constante ne dépendant que de $\|M_0\|_\infty$. Posons

$$n_2(t) = \sup_{0\leq t\leq T} \|\partial_x^2 U(t)\|_2.$$

On montre, en utilisant le même type d'argument qu'au paragraphe 3, que

$$\| \, |\partial_x H(t)| \, |\partial_x M(t)| \, \|_2 \leq C\Big(n_2(t) + \alpha_\lambda(t) n_2(t) + \frac{n_2(t)^2}{\sqrt{\lambda}}\Big) \tag{12}$$

et, en utilisant l'inégalité suivante du type Judovic,

$$\|M_\|(t)\|_\infty \leq C(\|M_0\|_{L^2\cap L^\infty}) \log\Big(\frac{\|\partial_x^2 M(t)\|_2}{\|M_0\|_\infty}\Big)$$

que

$$(13) \qquad \| \, |H(t)| \, |\partial_x^2 M(t)| \, \|_2 \le C\Big(n_2(t)\log n_2(t) + \alpha_\lambda(t) n_2(t) + \frac{n_2(t)^2}{\sqrt{\lambda}}\Big),$$

où, dans (12) et (13), la constante C ne dépendent que de $\|M_0\|_{L^2\cap L^\infty}$. L'estimation d'énergie pour le système symétrique L donne

$$n_2(t) \le n_2(0) + C\int_0^t \Big(\big(1+\alpha_\lambda(s)\big)n_2(s) + n_2(s)\log n_2(s) + \frac{n_2(s)^2}{\sqrt{\lambda}}\Big)\,ds, \; 0 \le t \le T.$$

Choisissons $\sqrt{\lambda} = n_2(T)$. L'inégalité précédente donne

$$n_2(t) \le n_2(0) + C\int_0^t \big((2+\alpha_\lambda(s))n_2(s) + n_2(s)\log n_2(s)\big)\,ds, \; 0 \le t \le T.$$

Soit $n_2^\sharp(t)$ la solution de

$$\frac{d}{dt}n_2^\sharp(t) = C\Big(\big(2+\alpha_\lambda(s)\big)n_2^\sharp(s) + n_2^\sharp(s)\log n_2^\sharp(s)\Big), 0 \le t \le T, \; n_2^\sharp(0) = n(0).$$

La fonction $n_2^\sharp(t)$ majore $n_2(t)$ pour $0 \le t \le T$ et satisfait

$$(14) \qquad \log n_2^\sharp(t) \le e^{Ct}\Big(\log n_2(0) + C\sqrt{t}\sqrt{\int_0^t \alpha_\lambda(s)^2 ds} + 2Ct\Big), \; 0 \le t \le T.$$

En utilisant (6) et la fin de la démonstration de la Proposition 3, on majore

$$\sqrt{\int_0^t \alpha_\lambda(s)^2 ds} = \sqrt{\sum_{t_{p+1}\le T} \int_{t_p}^{t_{p+1}} \alpha_\lambda(s)^2 ds}$$

par $C(T, n(0))\sqrt{\log(1+n_2(T)T)}$.
On déduit alors de (14), avec $t = T$, une majoration de $n_2(T)$ en fonction de T, $n(0)$ et $n_2(0)$.

La preuve du Théorème 2 est claire. Soit $U(0) \in H^2(\mathbb{R}^3)$. Supposons que le temps de vie T de la solution U du problème de Cauchy semi-linéaire (2) de données $U(0)$ soit fini. On sait qu'alors $\lim_{t\to T}\|U(t)\|_\infty = +\infty$ ce qui contredit la Proposition 4 qui affirme que $\lim_{t\to T}\|U(t)\|_{H^2} < +\infty$. La solution locale U est donc globale.

5. Le Théorème 0 et la stabilité L^2

Soient $(U^n)_n$ une suite de solutions d'énergie finie dans la bande S_T telle que la suite $(U^n(0))_n$ converge dans L^2 vers un élément qu'on note $U^\infty(0)$. A cause de l'estimation dans l'espace $\mathcal{U}$ on peut supposer que la suite $(U^n)_n$ converge faiblement dans $L^\infty\big([0,T]; L^2(\mathbb{R}^3)\big)$ vers un élément noté U^∞. L'objectif est de montrer que la convergence de U^n vers U^∞ a lieu dans $C^0\big([0,T];L^2(\mathbb{R}^3)\big)$. La clé est une estimation L^2 sur la différence $M^p(t)-M^q(t)$ en fonction de $M^p(0)-M^q(0)$. En écrivant

$$\begin{aligned} F(M^p,H^p)-F(M^q,H^q) &= F(M^p,H^\infty)-F(M^q,H^\infty)\\ &\qquad +F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty), \end{aligned}$$

on constate que, si $|M_0^n(x)|\le R$, on a, pour presque tout (t,x),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t|M^p-M^q|^2 &\le C(R)|H^\infty||M^p-M^q|^2\\ &\qquad +\big(F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty)\big)\cdot(M^p-M^q). \end{aligned}$$

Un poids ponctuel $e^{-2a(t,x)}$ absorbe le premier terme du membre de droite si a est une primitive en t de $C(R)|H^\infty(t,x)|$. Le choix précis

$$a(t,x)=|x|^2+\int_0^t C(R)|H^\infty(s,x)|ds \tag{15}$$

fournit une fonction a positive, définie et finie pour presque tout x et pour tout t et telle que $e^{-2a(t,x)}$ appartient à tous les L^p, $1\le p\le\infty$. On a alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\partial_t(e^{-2a}|M^p-M^q|^2) &\le\\ &e^{-2a}\big(F(M^p,H^p-H^\infty)-F(M^q,H^q-H^\infty)\big)\cdot(M^p-M^q). \end{aligned} \tag{16}$$

Proposition 7. *Il existe une constante $C(R,T)$ telle que pour tout $\delta>0$ il existe $N(\delta)$ tel que pour tout $p\ge N(\delta)$ et $q\ge N(\delta)$ et tout t, $0\le t\le T$,*

$$\|e^{-a(t)}(M^p(t)-M^q(t))\|_2\le C\left(\delta+\int_0^t\|e^{-a(s)}(M^p(s)-M^\infty(s))\|_2\,ds\right) \tag{17}$$

Passant à la limite $q\to\infty$ dans le membre de gauche de (17), on en déduit que la suite $M^p(t)-M^\infty(t)$ tend vers 0 dans l'espace $L^2(e^{-2a(t,x)}dx)$. On en déduit le résultat final avec des arguments classiques.

La preuve de la Proposition 5 passe par l'examen du terme $F(M^p,H^p-H^\infty)$ dans (16), qu'on décompose en la somme

$$F(M^p,H^p-H^\infty)=F(M^p,P_\perp(H^p-H^\infty))+F(M^p,P_\parallel(H^p-H^\infty)). \tag{18}$$

L'intégrale en t,x du premier terme à droite de (18) donne une contribution δ, grâce à un argument de front d'onde une fois qu'on a remarqué qu'il s'agit du produit d'un terme en M qui possède une dérivée par rapport à t bornée dans L^2 et d'un terme $P_\perp(H^p-H^\infty)$ qui est borné dans L^2 avec $\Box(P_\perp(H^p-H^\infty))$ borné dans H^{-1}.

L'autre terme $e^{-2a(t)}F(M^p(t), P_\|(H^p(t)-H^\infty(t))) = e^{-2a(t)}F(M^p(t), P_\|(M^\infty(t)-M^p(t)))$ s'écrit, après multiplication par $(M^p(t) - M^q(t))$, comme la somme dans L^1

$$(19) \qquad F(M^p(t), P_\| e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t)) \\ + F(M^p(t), [e^{-a(t)}, P_\|](M^\infty(t) - M^p(t)) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t)).$$

La norme dans L^1 du premier terme se majore par une somme de carrés de normes L^2

$$\|F(M^p(t), P_\| e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))) \cdot e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t))\|_1 \\ \leq \frac{1}{2}R^2C(R)^2\|e^{-a(t)}(M^\infty(t) - M^p(t))\|_2^2 + \frac{1}{2}\|e^{-a(t)}(M^p(t) - M^q(t))\|_2^2.$$

Le deuxième terme de (19) donne une contribution δ car le commutateur $[e^{-a(t)}, P_\|]$ est un opérateur compact sur les parties de L^2 dominées dans $L^2 \cap L^\infty$ (on utilise (15)).

La partie concernant l'existence de solutions globales L^2 du Théorème 0 peut maintenant se démontrer de la façon suivante. On approche les données initiales par régularisation par des unités approchées. Ces approximations forment un sous-ensemble $\mathbf{U_0}$ satisfaisant les propriétés données à la section 2. Le théorème 2 associe aux données régulières des solutions globales du problème de Cauchy. La condition de stabilité L^2 du Théorème 0 achève la preuve.

[GV] Ginibre J., Velo G., Generalized Strichartz inequalities for the wave equation, J. Funct. Anal., **133** (1995), n 1, 50–68.

[JMR] Joly J.-L., Métivier G., Rauch J., article en préparation.

[JV1] Joly P., Vacus O., Mathematical and numerical studies of 1D nonlinear ferromagnetic materials, Rapport INRIA, No 3024, 1996.

[JV2] Joly P., Vacus O., Maxwell's equations in a 1D ferromagnetic medium: Existence and uniqueness of strong solutions, Rapport INRIA, No 3052, 1996.

[KM] Klainerman S., Machedon M., Space-time estimates for null-forms and the local existence theorem, Com. Pure Appl. Math., **46** (1993), 1221–1268.

[L] Lindblad H., Counterexamples to local existence for semi-linear wave equation, Amer. J. Math. **118** (1996), n 1, 1–16.