Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Almeida
F. Bethuel

Fonctionnelles de Ginzburg-Landau et espaces de configurations de particules positives et négatives

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 1, p. 1-11
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A1_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Unité de Recherche Associée D 0169

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

FONCTIONNELLES DE GINZBURG-LANDAU ET ESPACES DE CONFIGURATIONS DE PARTICULES POSITIVES ET NEGATIVES

L. ALMEIDA et F. BETHUEL

Exposé n°I

17 Octobre 1995

I. Introduction

Nous considérons un domaine borné, régulier et simplement connexe Ω de $\mathbf{R}^2$, une fonction g, régulière de $\partial\Omega$ dans le cercle S^1 (i.e. $|g| = 1$) et l'équation de Ginzburg-Landau

$$(I) \qquad \begin{aligned} -\Delta u &= \frac{1}{\varepsilon^2} u(1-|u|^2) \quad \text{dans} \quad \Omega \\ u &= g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega \ . \end{aligned}$$

La fonction u est à valeur complexe $u : \Omega \to \mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$, et ε représente un paramètre, homogène à une longueur. Des équations de ce type apparaissent dans de nombreux problèmes en physique (superfluidité, supraconductivité, voire optique non linéaire pour les équations d'évolutions correspondantes). Nous nous intéressons ici au problème d'existence et de multiplicté de solutions pour (I), dans le cas où le paramètre $\varepsilon > 0$, est suffisamment petit.

Les solutions de (I) peuvent être obtenues comme points critiques de la fonctionnelle

$$E_\varepsilon(u) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 + \frac{1}{4\varepsilon^2}\int_\Omega (1-|u|^2)^2 \ ,$$

qui est bien définie sur l'espace de Sobolev

$$H^1_g(\Omega; \mathbf{R}^2) = \{v \in H^1_g(\Omega; \mathbf{R}^2), v = g \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\} \ .$$

On montre par ailleurs que E_ε est une fonctionnelle de classe C^1 sur $H^1_g(\Omega; \mathbf{R}^2)$, qui vérifie la condition de Palais-Smale, de sorte que les techniques usuelles du calcul des variations peuvent être employées pour trouver des solutions. En particulier, comme E_ε est positive, et donc bornée inférieurement, l'infimum

$$(1) \qquad \mathcal{K}_\varepsilon = \inf_{v \in H^1_g} E_\varepsilon(v)$$

est atteint, et donc il existe des solutions minimisantes pour (I). Nous noterons u_ε ces solutions.

II Etude asymptotique des solutions minimisantes

Ces solutions ont été particulièrement étudiées, dans la limite $\varepsilon \to 0$, par H. Brezis, F. Helein et l'un des auteurs, dans le livre [BBH]. Il ressort de cette analyse que le degré d de g sur $\partial\Omega$ joue un rôle primordial.

. Si $d = 0$, l'ensemble

$$H^1_g(\Omega\ ; S^1) = \{v \in H^1_g(\Omega\ ; \mathbf{R}^2), |v| = 1\}$$

est non vide, et on voit donc que, pour $v_0 \in H^1_g(\Omega\ , S^1)$,

$$\int_\Omega (1 - |v_0|^2)^2 = 0\ .$$

En particulier, en choisissant un tel v_0 comme fonction de comparaison dans (1), on obtient

$$\mathcal{K}_\varepsilon \leq \int_\Omega |\nabla v_0|^2\ ,$$

qui reste donc borné, indépendamment de ε. Comme, par ailleurs

$$\int_\Omega (1 - |u_\varepsilon|^2)^2 \leq \varepsilon^2 \mathcal{K}_\varepsilon \to 0\ ,$$

$(|u_\varepsilon|)^2 \to 1$ dans L^2, et on peut espérer que u_ε converge vers une application de $H^1_g(\Omega; S^1)$. En fait, on montre que, lorsque $\varepsilon \to 0$, $u_\varepsilon \to \exp i\varphi$ dans $C^1(\bar{\Omega})$, où φ est la solution du problème linéaire

$$\begin{cases} \Delta\varphi = 0 & \text{dans} \quad \Omega \\ \exp i\varphi = g & \text{sur} \quad \partial\Omega\ . \end{cases}$$

Si $d \neq 0$, la situation est plus compliquée car alors

$$H^1_g(\Omega; S^1) = \emptyset\ ,$$

et on peut se convaincre aisément que

$$\mathcal{K}_\varepsilon \to +\infty\ .$$

Le problème devient donc un problème de limite singulière. Par ailleurs, comme $u_\varepsilon \in C^\infty(\Omega)$, un argument élémentaire de topologie montre qu'alors u_ε doit forcément s'annuler quelque part sur Ω. On peut imaginer que ces points vont jouer un rôle spécial, en particulier que l'énergie de u_ε va se concentrer dans leur voisinage : l'analyse menée dans [BBH] permet effectivement de confirmer cette hypothèse . Plus précisément, supposons $d > 0$, alors pour $\varepsilon < 1$, on peut montrer :

(2) $|\mathcal{K}_\varepsilon - \pi d|\log\varepsilon|| \leq C$, où C ne dépend que de g.

(3) Il existe d points dans Ω, $a_1, \cdots, a_d$, et une fonction $u_* \in C^1(\bar{\Omega} \setminus \bigcup_{i=1}^d \{a_i\}; S^1)$ telle que, pour une sous-suite ε_n de ε

$$u_{\varepsilon_n} \to u_* \text{ sur tout compact de } \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^d \{a_i\} \text{ (en norme } C^1).$$

(4) u_* a la forme $u_*(z) = \prod_{i=1}^d \frac{z-a_i}{|z-a_i|} \exp i\varphi$, où φ est harmonique ; en particulier $\deg(u_*, a_i) \equiv \deg(u_*, \partial B(a_i, r))$ pour r assez petit, et est égal à $+1$.

(5) La configuration $\{a_1, \cdots, a_d\}$ n'est pas arbitraire, mais minimise une énergie renormalisée $W_g(a_1, \cdots a_d)$ définie sur $\Sigma = \Omega^d \setminus \Delta$, où Δ représente la diagonale $\{(x_1, \cdots x_d) \in \Omega^d \; \exists i \neq j \text{ tel que } x_i = x_j\}$. Cette énergie a une expression assez compliquée. Notons néanmoins quelle comporte des termes d'interactions de type Coulombien entre les particules, plus des contributions du bord $\partial\Omega$, tendant à confiner les particules à l'intérieur du domaine. Elle s'écrit

$$W_g(a_1, \cdots, a_d) = \pi \sum_{i \neq j} \log |a_i - a_j| + \quad \text{(contribution de} \quad \partial\Omega) \ .$$

A l'aide de l'énergie renormalisée, on peut affiner l'estimation (2) pour obtenir le développement asymptotique

$$\text{(6)} \qquad \mathcal{K}_\varepsilon = \pi d |\log\varepsilon| + W_g(a_1, \cdots, a_d) + d\gamma_0 + o(1), \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \ ,$$

où γ_0 est une constante universelle.

III Convergence de solutions non minimisantes

Une analyse similaire peut être menée pour des solutions v_ε qui ne sont pas nécessairement minimisantes. Ici nous supposerons de plus que Ω est étoilé (cette hypothèse ayant pu être supprimée dans le cas des solutions minimisantes grâce au travail de M. Struwe [Str]). On a alors

$$\text{(7)} \qquad E_\varepsilon(v_\varepsilon) \leq C(|\log\varepsilon| + 1)) \ , \quad \text{pour tout} \quad 0 < \varepsilon < 1 \ ,$$

où C est une constante qui ne dépend que de g.

(8) Pour une sous-suite ε_n, il existe ℓ points $a_1, \cdots a_\ell$ dans Ω, tels que

$v_{\varepsilon_n} \to v_*$, dans $C^1(K)$, pour tout compact K de $\Omega \setminus \bigcup_{i=1}^\ell \{a_i\}$, où v_* à la forme $v_*(z) = \prod_{i=1}^\ell (\frac{z-a_i}{|z-a_i|})^{d_i} \exp i\varphi$, φ étant une fonction harmonique sur Ω. Les nombres $d_i \in \mathbf{Z}$, de sorte que

$$d_i = \deg(v_*, a_i) \ .$$

On a par ailleurs

$$(9) \qquad d_i \neq 0 \ , \sum_{i=1}^{\ell} |d_i| \leq C \ ,$$

où C est une constante qui ne dépend que de g.

La configuration $\{(a_1, d_1), \cdots\}$ est point critique d'une énergie renormalisée $W_g((a_i, d_i))$ dont l'expression est similaire à celle donnée précédemment : le terme coulombien, par exemple, tient maintenant compte de la charge $d_i \in \mathbf{Z}$ et s'écrit $\sum_{i \neq j} d_i d_j \log |a_i - a_j|$.

Notons les différences par rapport au cas minimisant : les nombres d_i peuvent être différents de $+1$, et peuvent être négatifs (des exemples de telles solutions ont été construits par F.H. Lin [Li]). Il faut donc tenir compte de la "charge" d_i lorsque l'on décrit l'ensemble de configuration des singularités (nous dirons "particules chargées" par la suite). Leur nombre n'est plus forcément égal à d, mais il reste borné par une constante m_0, en vertu de (8). Enfin la configuration $\{(a_i, d_i)\}$ ne minimise par forcément W_g, mais est seulement un point critique.

IV Existence de solutions non minimisantes : un exemple.

Prenons $\Omega = D^2$, et pour donnée g sur $\partial\Omega = S^1$,

$$g(z) = z^d$$

qui s'écrit, en coordonnées polaires, $g(\theta) = \exp id\theta$. Au vu de la symétrie radiale de D^2 et g, on peut construire des solutions de (I) de la forme

$$u_d = f_d(r) \exp id\theta \ , \quad \text{où} \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2} \ .$$

L'équation (ordinaire) satisfaite par f_d est alors

$$r^2 f'' + r f' - d^2 f + \frac{1}{\varepsilon^2} r^2 f(1 - f^2) = 0 \quad \text{sur} \quad [0,1]$$

$$f(0) = 0 \quad f(1) = 1 \ .$$

(voir par exemple Hervé et Hervé [HH]). Si on calcule l'énergie d'une telle solution, on trouve

$$|E_\varepsilon(u_d) - \pi d^2 |\log \varepsilon| \ | \leq C \ ,$$

et donc, si $d \neq 1$ et si ε est assez petit, u_d n'est pas minimisante (au vu de (2)). Dans le cas $d = 1$, il est conjecturé que u_1 est minimisante : jusqu'à présent il a été prouvé que u_1 est stable (P. Mironescu [M]). On voit par ailleurs que

$$u_d \to u_d^* = (\frac{z}{|z|})^d \quad \text{lorsque} \quad \varepsilon \to 0 \ ,$$

et u_d^* a bien une (unique) singularité de degré d à l'origine.

Une autre façon de voir que u_d est non minimisante, pour $d > 1$, et de calculer son indice de Morse : il a ainsi été montré par R. Wang [W] (pour $d \geq 3$) et P. Mironescu (pour $d = 2$) que u_d est instable, si ε est assez petit. En reprenant la méthode R. Wang, nous avons pu établir [AB1] que

$$\text{(10)} \qquad \text{Ind } (u_d) \geq \mu_0 |d|^2 \ , \quad \text{si} \quad \varepsilon \quad \text{est assez petit,}$$

où μ_0 est une constante universelle. Cette estimation permet alors de trouver d'autres solutions (non minimisantes). L'idée est de décrire la symétrie radiale, sous forme d'action du groupe S^1 sur l'espace fonctionnel. Pour $v \in H^1_g(\Omega; \mathbf{R}^2)$, et $\alpha \in [0, 2\pi[$ notons

$$T_\alpha v(z) = \exp -id\alpha (\exp i\alpha z) \ , \ z \in D^2 \ ,$$

de sorte que T_α agit sur $H^1_g(\Omega; \mathbf{R}^2)$ et laisse E_ε invariante. Les fonctions v telles que $T_\alpha v = v$, $\forall \alpha \in [0, 2\pi[$ sont précisément de la forme $f(r) \exp id\theta$, et parmi ces fonctions u_d est minimisante pour E_ε. Il en résulte

Théorème 1.— *L'équation (I) a au moins $\mu_0 |d|^2$ familles de solutions distinctes (orbites par T_α de S^1).*

La preuve est directement liée à l'estimation (10) : elle repose sur la notion d'Index associé à l'action du groupe S^1 (notion introduite par Krasnoselskii pour le groupe $\mathbf{Z}^2$, et par E. Faddell et P. Rabinowitz pour des groupes compacts généraux) ; les valeurs critiques sont alors caractérisées par des méthodes de Min Max (comme dans la théorie des catégories de Lyusternick et Schnirelman).

Afin de généraliser le Théorème 1 à des situations sans symétrie, il semble naturel d'utiliser des méthodes de Min Max plus générales, faisant intervenir des invariants topologiques (de nature homotopique ou cohomologique). En particulier, il serait souhaitable de pouvoir caractériser les solutions u_d par de telles méthodes. Néanmoins, au vu de (10) et d'un travail de C. Viterbo [Vi], la dimension cohomologique pour de telles méthodes devra être de l'ordre de $\mu_0 |d|^2$, et leur mise en œuvre ne semble pas aisée, si d est grand en tout cas. Dans ce cas $d = 2$, nous montrerons cependant comment caractériser u_2.

V Méthodes variationnelles

Nous retournons maintenant au cas où Ω et g sont quelconques. Dans [AB2], nous prouvons le résultat suivant :

Théorème 2.— *Si $d \geq 2$, alors, si ε est suffisamment petit, l'équation (I) a au moins trois solutions distinctes, dont l'une, au moins, est non minimisante.*

Bien entendu, ce résultat peut sembler un peu décevant au vu du Théorème 1, et nous espérons trouver beaucoup plus de solutions. Comme nous allons essayer de le montrer, la difficulté, plus qu'analytique, nous semble de nature topologique : il s'agit de comprendre la topologie d'espace de configurations où des particules de charges opposées peuvent s'annihiler, ou être crées à partir du vide...

L'idée de base de nombreuses méthodes variationnelles consiste à considérer les ensembles de niveau, ici E_ε^a

$$E_\varepsilon^a = \{u \in H_g^1(\Omega; \mathbf{R}^2) \ , \ E_\varepsilon(u) \le a\} \ .$$

Comme E_ε vérifie la condition de Palais-Smale, un principe général permet d'affirmer que, si E_ε^a et E_ε^b ont des topologies différentes, alors il existe une valeur critique $c \in]a, b[$. Dans certain cas, comme nous le verrons, cette valeur critique peut être écrite sous forme de formule Min Max.

Il existe de nombreux exemples en EDP, où le problème, posé, en dimension infinie, peut être ramené, au moins partiellement, à un problème de dimension finie (c'est à dire qu'une partie de l'homologie (ou autre) des espaces E_ε^a peut être estimée à l'aide du problème de dimension finie : voir par exemple J.M. Coron [C], A. Bahri et J.M. Coron [BC], C. Taubes [T],...).

Dans le problème qui nous intéresse, le candidat naturel pour jouer ce rôle a déjà été identifié : il s'agit de l'énergie renormalisée, défini sur l'espace de configuration des particules chargées. Néanmoins, pour le moment celle-ci n'a été définie que pour les points critiques de E_ε, et non pour des éléments arbitraires u dans $H_g^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$. Ainsi apparaissent deux difficultés (celles-ci de nature analytique !) nouvelles :

a) définir la notion de singularité pour u arbitraire (et en particulier obtenir des bornes similaires à (9)).

b) Relier l'énergie de u à l'énergie renormalisée des singularités et de leurs charges d_i, comme dans la formule (6) par exemple.

Il est clair qu'un tel programme a peu de chances d'aboutir sur $H_g^1(\Omega; \mathbf{R}^2)$ tout entier, qui est un espace affine. En revanche, nous allons voir qu'il peut être mené à terme sur E_ε^a, pourvu que a vérifie une borne du type

$$a \le K_1(|\log \varepsilon| + 1) \ , \tag{10}$$

où K_1 est une constante arbitraire, et ε est assez petit.

VI Singularités.

La méthode est indirecte et utilise une régularisation préalable. Soit $0 < \gamma < 1$, fixe. Posons $h = \varepsilon^\gamma$, et considérons pour $u \in E^a$ le problème de minimisation

$$\mathrm{Inf}_{v \in H^1_g} F_h(v) \ , \tag{11}$$

où $F_h(v) = E_\varepsilon(v) + \int_\Omega \frac{|u-v|^2}{2h^2}$. Clairement (11) est atteint par une application u_h (elle n'est pas nécessairement unique). En utilisant l'équation vérifiée par u_h, et les techniques de [BBH] et [BR], nous montrons

Proposition 1.— *Il existe des constantes $N \in \mathbf{N}^*, \lambda > 0, \varepsilon_0 > 0, C_1 > 0$, ne dépendant que de g, γ et K_1 telles que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ et $u \in E^a_\varepsilon$, alors il existe ℓ points $a_1, \cdots a_\ell$ dans Ω tels que*

$$\ell \leq N \tag{12}$$

$$|u^h(x)| \geq \frac{1}{2} \quad \textit{sur} \quad \Omega \setminus \bigcup_{i=1}^{\ell} B(a_i, \lambda\varepsilon) \tag{13}$$

$$B(a_i, 2\lambda\varepsilon) \cap B(a_j, 2\lambda\varepsilon) = \emptyset \quad \textit{si} \quad i \neq j \tag{14}$$

$$\Sigma |d_i| \leq C_1 \ , d_i \neq 0 \ , \quad \textit{où} \quad d_i = \deg(\frac{u^h}{|u^h|}, \partial B(a_i, \lambda\varepsilon)) \ . \tag{15}$$

Les points (a_i, d_i) jouent donc ici le rôle des singularités chargées, comme pour les solutions de l'équation. Comme il n'y a pas unicité pour u^h, il n'y a pas, à fortiori, unicité pour la configuration $\{(a_1, d_1), \cdots (a_\ell, d_\ell)\}$. Si on considère ainsi l'application $\Phi : E^a_\varepsilon \to W$, qui à u dans E^a, associe les singularités "chargées" de u^h, où W est l'espace de configuration des particules, celle-ci n'a aucune raison d'être continue. Néanmoins elle possède des propriétés de continuité "approchée". L'espace W est défini, comme dans D.Mc Duff [McD], en prenant le quotient de $W_0 = \Omega^{m+d} \times \Omega^m$ (où m est une borne sur k le nombre de particules, répétées selon leur multiplicité $|d_i|$, obtenue grâce à (15)), par des relations d'équivalence appropriées, tenant compte du fait que les particules sont indiscernables, et que deux particules de signes opposés peuvent s'annihiler. L'espace W peut être muni d'une métrique, en utilisant la notion de connexion minimale, introduite par H. Brezis, J.M. Coron et E.H. Lieb [BCL].

La notion de "continuité approchée" s'exprime au travers de la définition suivante.

Définition 1.— *Soit F et G deux espaces métriques. Soit $\eta \geq 0$ et f une fonction de F vers G. On dira que f est continue à η près, au point u_0 si $\forall \delta > 0$, il existe $\theta > 0$ tel que $d(u,v) \leq \theta$ entraîne $d(f(u), f(v)) \leq \eta + \delta$.*

La continuité classique correspond bien entendu à $\eta = 0$. On montre alors que $\Phi : E_\varepsilon^a \to W$ est continue à η près, pour $\eta = C\varepsilon^\gamma |\log \varepsilon|^{1/2}$ qui tend vers zéro lorsque $\varepsilon \to 0$. Il s'avère que cette propriété est suffisante pour utiliser les techniques topologiques que nous avons en vue.

VII Propriétés des ensembles de niveau

A l'appui de l'analyse précédente, on peut établir [AB2]

Théorème 3.— *Soit $\chi > 0$ et a de la forme $a = \mathcal{K}_\varepsilon + \chi$. Il existe $\chi_0 > 0$ tel que si $\chi \geq \chi_0$, et ε est assez petit, alors il existe une application $\gamma_\varepsilon : S^1 \to E_\varepsilon^a$ qui n'est pas contractible dans E_ε^a.*

Idée de la preuve : On regarde ici les ensembles de niveau proche du minimum absolu de E_ε^a. Pour de tels ensembles de niveau, on peut montrer que, quitte à enlever des éléments de $(a_1, \cdots, a_\ell)$, on peut trouver exactement d d'entre eux, disons $a_1, \cdots, a_d$, et un rayon $\rho \leq \varepsilon^{\bar{\mu}}$, où $\bar{\mu}$ est une constante, tels que

$$\begin{cases} |u^h(x)| \geq \dfrac{1}{2} & \text{en dehors} \quad \cup_{1=1}^d B(a_1, \rho) \\ \deg(\dfrac{u^h}{|u^h|}, \partial B(\bar{a}, \rho)) = +1 \ . \end{cases}$$

On se trouve donc dans une situation très similaire à celle des minima de l'énergie. On peut montrer, de plus qu'il existe une constante $\beta > 0$, telle que

$$\text{dist } (a_i, a_j) \geq \beta \ , \ \forall i \neq j \ ,$$

β ne dépendant que de χ, et g. L'espace de configuration n'est donc plus ici W tout entier, mais bien $\Omega^d \setminus \Delta$. Or le π_1 de cet espace est non trivial. Il suffit de considérer le lacet $\gamma : S^1 \to \Omega \setminus \Delta$

$$\begin{aligned} \gamma(\exp i\theta) &= (b_1(\theta), \cdots b_d(\theta)) \\ &= (0, \delta_0 \exp i\theta, b_3, \cdots b_d) \ , \end{aligned}$$

où on a supposé $0 \in \Omega$, $B(2\delta_0) \subset \Omega$ pour r assez petit, et $b_3, \cdots, b_d$ fixes et distincts dans $\Omega \setminus B(2\delta_0)$. On peut alors aisément construire un lacet $\gamma_\varepsilon : S^1 \to E_\varepsilon^a$ (pour a de la forme $\mathcal{K}_\varepsilon + \chi_0$), dont les singularités sont précisément $b_1, \cdots b_d$. En utilisant l'application Φ, on montre que $\Phi(\gamma_\varepsilon) : S^1 \to \Omega^d \setminus \Delta$ n'est pas trivial (au sens de la continuité approchée). On peut alors terminer la preuve aisément.

VIII Preuve du théorème 2

Comme $H^1_g(\Omega;\mathbf{R}^2)$ est affine, γ_ε est contractible dans $E^\infty_\varepsilon = H^1_g$, E^a_ε et $H^1_g(\Omega;\mathbf{R}^2)$ n'ont donc pas la même topologie et il existe une valeur critique $c \geq a$, et ainsi une solution non-minimisante. La troisième solution, s'obtient par des arguments similaires.

Notons que l'on peut décrire une telle valeur critique à l'aide d'une formule de Min Max. On a

$$c = \mathrm{Inf}_{f\in\Gamma}\,(\underset{x\in D^2}{\mathrm{Max}} E_\varepsilon(f(x)) \ , \tag{16}$$

où

$$\Gamma = \{f \in C^0(\bar{D}^2, H^1_g(\Omega;\mathbf{R}^2) \ , \ f_{|\partial D^2} = \gamma_\varepsilon\} \ .$$

On peut montrer

$$\pi(d+1)|\log\varepsilon| \leq c \leq \pi(d+2)|\log\varepsilon| + C \ . \tag{17}$$

IX A quoi ressemble la solution obtenue ?

Au vu de l'étude asymptotique du paragraphe III, on peut se demander quelles sont les singularités (dans la limite $\varepsilon \to 0$) de la solution obtenue v_ε, correspondant à la valeur critique donnée par (16). Considérons pour simplifier le cas où $d = 2$. En analysant (17), on peut vérifier que deux possibilités seulement sont envisageables :

a) v_* (limite de v_ε) a une singularité de degré $+2$

b) v_* a trois singularités de degré $+1$, et une singularité de degré -1.

Dans le cas particulier où $\Omega = D^2$, $g = \exp 2i\theta$, en utilisant la formule de Pohozaev, on peut voir que seul a) est possible, et nous avons donc trouvé une caractérisation Min Max de u_2 (vraisemblablement en tout cas).

Dans le cas général, il nous a été impossible, jusqu'ici de décider laquelle des alternatives est la bonne : les deux nous semblent vraisemblables. Afin déclairer quelque peu la situation, nous allons faire quelques commentaires heuristiques, sans prétention de rigueur.

Supposons pour simplifier que le Inf soit atteint de (16) par une fonction f. Décrivons f en termes de singularités, c'est à dire considérons $\tilde{f} = \Phi(f) : D^2 \to W$, de sorte que $\tilde{f} = \gamma$ sur ∂D^2. On peut alors envisager deux scénarios pour le comportement de $\tilde{f}$, le premier ne faisant intervenir que des particules positives, le second des particules de charges opposées. Soit (r,θ) des coordonnées polaires sur D^2.

Scénario 1. On peut envisager que $\tilde{f}$ ait la forme (à homotopie près)

$$\tilde{f}(r\ ,\theta) = \{(0,+1), ((r\delta_0 \exp i\theta), +1)\}$$

(La première coordonnée désigne la position, la seconde la charge). En d'autre termes, il y a deux particules dont l'une tourne (avec θ) autour de l'autre, et s'en rapproche lorsque $r \to 0$ pour donner naissance à une singularité de degré 2.

Scénario 2. En un point b donné de Ω, extérieur à $B(2\delta_0)$, apparaît un dipole (c'est à dire une paire constituée d'une particule de charge $+1$, et d'une particule de charge -1). Lorsque r décroit la charge positive reste sur place, alors que la charge négative se déplace vers l'origine, pour l'atteindre lorsque $r = \frac{1}{2}$, et l'annihiler. Il ne reste alors que deux singularités, et le maximum de E_ε est atteint lorsque les quatre singularités sont présentes. Analytiquement $\tilde{f}$ peut, par exemple, prendre la forme (à homotopie près)

$$\tilde{f}(r,\theta) = \{(0,+1), (\delta_0 \exp i\theta, +1), (b(r - \frac{1}{2}), -1), (b,+1)\},\ r \geq \frac{1}{2}\ ,\theta \in [0, 2\pi]$$

et

$$\tilde{f}(r,\theta) = \{(2 + \delta_0 \exp i\theta\ , +1), (b, +1)\}\ , \quad \text{si} \quad 0 \leq r \leq \frac{1}{2}\ ,\theta \in [0, 2\pi]\ ,$$

de sorte que $\operatorname*{Max}_{x \in D^2} E_\varepsilon(f(x))$ est probablement atteint en un point où les quatre singularités sont présentes.

Nous espérons avoir démontré, sur cet exemple, que la présence de particules négatives peut complètement changer la structure topologique du problème. Il semble en particulier que les méthodes de Min Max doivent produire beaucoup de configurations, où des particules de signes opposés sont présentes. En revanche, les configurations avec des charges $|d_i| \neq 1$ seront, semble-t-il plus délicates à obtenir.

Bibliographie.

[AB1] L. Almeida et F. Bethuel, Multiplicity results for the Ginzburg-Landau equation in presence of symmetries, prepublication.

[AB2] L. Almeida et F. Bethuel, Topological methods for the Ginzburg-Landau equation, prépublication.

[BC] A. Bahri et J.M. Coron, On a nonlinear elliptic equation involving the critical exponent : the effect of the topology of the domain ; comm. Pure Appl. Math **41** (1988) pp 253-294.

[BR] F. Bethuel et T. Rivière, vortices for a minimization problem related to superconductivity, Ann. IHP, Analyse non linéaire **12** (1995).

[C] J.M. Coron, Topologie et cas limites des injections de Sobolev, C.R. Acad. Sci. Paris **299** (1984) p.209-212.

[HH] R.M. Hervé et M. Hervé, Etude qualitative des solutions réelles de l'équation différentielle $r^2f''(r) + rf'(r) - q^2f(r) + r^2(1 - f^2(r)) = 0$, Ann. IHP, Analyse non linéaire (1994).

[Li] F.H. Lin, Solutions of Ginzburg-Landau equations and critical points of the renormalized energy, Ann. IMP, Analyse non linéaire.

[McD] D. Mac Duff, Configuration spaces of positive and negative particles, Topology **14** (1974), 91-107.

[Str] G.M. Struwe, On the asymptotic behavior of the Ginzburg-Landau model in 2-dimensions, J. Differential Integral equations **7** (1994) Erratum **8** (1995).

[T] C. Taubes, Min Max theory for the Yang-Mills-Higgs equation Comm. Math. Phys, 97 (1985) p.473-540.

[Vi] C. Viterbo, Indice de Morse des points critiques obtenus par minimax, Ann IHP, Analyse non linéaire **5** (1988), 221-225.

Luis Almeida
Université Paris-Sud
Laboratoire d'Analyse Numérique
Bâtiment 425 Mathématiques
URA CNRS 760
F - 91405 ORSAY cedex

Fabrice Bethuel
ENS de Cachan
CMLA
URA CNRS 1611
61 av du Président Wilson
94235 Cachan Cedex