Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Bachelot

Diffusion classique et quantique par un trou noir en formation

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 15, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A15_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

Numdam

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DIFFUSION CLASSIQUE ET QUANTIQUE PAR UN TROU NOIR EN FORMATION

A. BACHELOT

Exposé n° XV

21 Mai 1996

Résumé

On établit l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde décrivant la diffusion d'un champ classique de Klein-Gordon par une étoile sphérique en effondrement gravitationnel. Le point crucial est l'effet Doppler infini du à la formation d'un trou noir. Considérant les champs quantiques, on justifie rigoureusement le résultat de S. Hawking sur l'émergence d'un rayonnement thermal de particules émises vers l'infini au voisinage de l'horizon futur du trou noir.

I. Introduction

Un trou noir éternel, sphérique, de masse $M > 0$, est décrit par la variété globalement hyperbolique de Kruskal $(\mathcal{M}_K, g)$,

$$\mathcal{M}_K = \{(T, X) \in \mathbb{R}^2, T^2 - X^2 < 1\} \times S^2,$$

$$(1) \qquad g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \frac{32M^3 e^{-r/2M}}{r}(dT^2 - dX^2) - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \ ,$$

où $r > 0$ est défini implicitement comme fonction de (T, X),

$$(2) \qquad (\frac{r}{2M} - 1)e^{r/2M} = X^2 - T^2 \ .$$

L'extérieur du trou noir est la sous-variété

$$\mathcal{M}_S = \{(T, X) \in \mathbb{R}^2, |T| < X\} \times S^2$$

dont la frontière est composée des deux sous variétés caractéristiques de dimension 3

$$\mathcal{I}^{+(-)} = \{(T, X) \in \mathbb{R}^2, T = +(-)X\} \times S^2$$

qui sont les horizons futurs (passés) du trou noir. (On peut aussi considérer la région $\{(T, X), X < -|T|\} \times S^2$ qui est une "copie symétrique" de $\mathcal{M}_S$). La théorie de la diffusion dans cet espace temps est bien établie par de nombreux résultats de complétude asymptotique ([1] [2] [4] [5] [9] [10] [14] [15], voir [3] pour un panorama). On la formule en adoptant le point de vue d'un observateur au repos dans les coordonnées de Schwarzschild

$$(t, r, \theta, \varphi) \in \mathbb{R} \times]2M, +\infty[\times [0, \pi] \times [0, 2\pi[\ ,$$

décrivant $\mathcal{M}_S$ et données par les relations (2) et

$$(3) \qquad \frac{t}{2M} = \log(\frac{X + T}{X - T}) \ .$$

Dans ce repaire, la métrique prend la forme

$$(4) \qquad g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1-\frac{2M}{r})dt^2 - (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \ .$$

En introduisant la coordonnée de Regge-Wheeler

$$(5) \qquad r_* = r + 2M\log(r-2M)$$

on constate que l'espace temps de Schwarzschild

$$\mathcal{M}_S = \mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_{r_*} \times S^2$$

présente quatre régions asymptotiques, l'horizon futur (passé), $x \to -\infty, t \to +\infty$ ($x \to -\infty, t \to -\infty$), et l'espace temps asymptotiquement plat $x \to +\infty, t \to \pm\infty$, identifié à l'espace de Minkowski $(\mathcal{M}_\infty, g^\infty)$

$$\mathcal{M}_\infty = \mathbb{R}_t \times [0,\infty[_{r_*} \times S^2 \ ,$$

$$g^\infty_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = dt^2 - dr_*^2 - r_*^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \ .$$

(l'identification de la coordonnée de Regge-Wheeler avec la coordonnée radiale usuelle de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$, évite l'apparition d'un couplage de longue portée entre la gravitation et les champs sans masse)

Le résultat typique de la théorie de la diffusion par un trou noir éternel, assure que la solution ψ d'une équation relativiste dans $\mathcal{M}_S$,

$$\frac{\partial\psi}{\partial t} = H_S\psi \ ,$$

est asymptote à $t = \pm\infty$, dans un sens énergétique convenable, à la somme d'une onde plane $\psi^\pm_{BH}$ franchissant l'horizon $\mathcal{I}^\pm$, et d'un champ $\psi^\pm_\infty$, solution de l'équation correspondante dans $\mathcal{M}_\infty$:

$$\psi(t,r_*,\omega) \sim \psi^\pm_{BH}(t_\pm r_*,\omega) + \psi^\pm_\infty(t,r_*,\omega), t \to \pm\infty \ ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi^\pm_{BH} = \pm\frac{\partial}{\partial r_*}\psi^\pm_{BH} \ , \ \frac{\partial}{\partial t}\psi^\pm_\infty = H_\infty\psi^\pm_\infty \ .$$

Tous les propagateurs étant unitaires, la diffusion des champs quantiques se déduit aisément de l'étude des champs classiques par le procédé fonctoriel de la seconde quantification [4]. Pour la même raison, l'espace-temps $\mathcal{M}_S$ étant statique, l'état de vide quantique naturel, associé aux coordonnées de Schwarzschild est trivial : c'est le vecteur vide de l'espace de Fock sur l'hypersurface de Cauchy $\{t = 0\}$. Cet état à zéro particule, appelé vide de Boulware, est conservé au cours du temps : il n'y a ni création ni annihilation de particule par un trou noir éternel pour des champs dans cet état quantique fondamental. D'autres états, modélisant à $t = +\infty$ le phénomène de polarisation du vide décrit par Hawking [13], peuvent être construits en imposant des conditions aux limites ad hoc sur l'horizon et l'infini passés à $t = -\infty$ [9] [10] [18].

Dans sa conjecture célèbre, Hawking assure que l'état quantique défini à $t = -\infty$ par le vide de Fock à l'extérieur d'une étoile statique dans le passé, évolue vers un état thermal à $t = +\infty$, si l'étoile s'effondre pour former un trou noir. Nous nous proposons de construire le cadre mathématique approprié, et de démontrer cette conjecture.

Décrivons tout d'abord le cadre géométrique d'un effondrement gravitationnel sphérique. La surface de l'étoile est décrite en variables de Kruskal par une fonction $X = F(T)$ suffisamment régulière, $F \in C^2(\mathbb{R})$. La ligne d'univers d'un point de la surface est de genre temps, et par simplicité, on suppose que l'étoile est statique dans le passé et en contraction dans le futur :

$$T \leq 0 \ , F^2(T) - T^2 = Cste > 0 \ , \tag{6}$$

$$T \geq 0 \ , -1 < F'(T) \leq 0 \ . \tag{7}$$

Pour la valeur $T_0 > 0$ où $F(T_0) = T_0$, le rayon de l'étoile de masse M est égal à son rayon de Schwarzschild, et l'horizon du trou noir est formé. Si la distribution de matière dans l'étoile est isotrope, le théorème d'unicité de Birkhoff assure que la métrique de l'espace-temps extérieur à l'étoile est précisément donnée par (1). Revenant aux coordonnées de Schwarschild on a donc affaire à une variété globalement hyperbolique à bord,

$$\mathcal{M} = \{(t, r_*, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2, r_* > z(t)\} \ ,$$

munie de la métrique (4), où la fonction z est associée à F par la relation

$$z(t) = r_* \Leftrightarrow F(T) = X \ ,$$

où t, r_*, T, X sont reliés par (2) (3) et (5). Les propriétés (6) et (7) de F entraînent que z satisfait

$$z \in C^2(\mathbb{R}_t), -1 < \dot{z}(t) \leq 0 \ , \tag{8}$$

$$z(t) = -t - Ae^{-2\kappa t} + B + \zeta(t), 0 < A, |\zeta(t)| + |\dot{\zeta}(t)| + | = O(e^{-4\kappa t}), t \to +\infty \ , \tag{9}$$

où $\kappa = (4M)^{-1}$ est la gravité surfacique. Quitte à faire une translation en temps, on peut supposer $B = 0$. (8) assure que la frontière de $\mathcal{M}$ est régulière et de genre temps. Le problème mixte hyperbolique pour les équations de champs sera donc bien posé. En revanche, le comportement asymptotique (9) fait apparaître un phénomène remarquable, caractéristique de la formation d'un trou noir futur : la frontière de $\mathcal{M}$ est asymptotiquement caractéristique quand $t \to +\infty$. Pour préciser ce point, introduisons la sous-variété caractéristique $\gamma \subset \mathcal{M}$,

$$\gamma = \{(t, r_*, \omega) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2, t + r_* = 0\} .$$

Etant donnés $\omega_0 \in S^2$ et $x > z(0)$, la géodésique nulle rentrante

$$\gamma_{in}(x, \omega_0) = \{(t, r_*, \omega_0) \in \mathcal{M}, r_* + t = x\}$$

traversera l'horizon futur du trou noir si $x > 0$. Si $z(0) < x < 0$, elle rencontrera la surface de l'étoile à l'instant $\tau(x)$ défini par

$$\tau(x) = x - z(\tau(x)) , \tag{10}$$

puis, selon l'optique géométrique, le rayon réfléchi

$$\gamma_{out}(x, \omega_0) = \{(t, r_*, \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2 \ , \ r_* - t = z(\tau(x)) - \tau(x)\}$$

partira à l'infini. Pour $x = 0$, la géodésique $\gamma_{in}(0, \omega_0)$ est incluse dans γ, touche la surface de l'étoile à $t = +\infty$, et le rayon réfléchi $\gamma_{out}(0, \omega_0)$ reste dans l'horizon futur du trou noir :

$$\begin{aligned}
\gamma_{in}(0, \omega_0) &= \{(t, r_*, \omega_0) \in \mathcal{M} \ , t + r_* = 0\} \\
&= \{(T, X, \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2, T + X = 2T_0\} , \\
\gamma_{out}(0, \omega_0) &= \{(T, X, \omega_0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times S^2, X = T \geq T_0\} \subset \mathcal{I}^+ .
\end{aligned}$$

Donc, en coordonnées de Schwarzschild (t, r_*, ω), γ a l'apparence d'une caustique au voisinage de laquelle l'énergie des champs se propageant vers le passé depuis l'infini plat futur, s'accumule par effet Doppler infini, et l'étoile semble se contracter à une vitesse croissante, tendant vers la célérité de la lumière. Soulignons que ces deux aspects sont des artefacts dus au choix du sytème (t, r_*, ω) ; constatés par un observateur au repos dans ce repaire, ils s'évanouissent dans le repaire du Kruskal : la ligne d'univers de la surface de l'étoile est toujours du genre temps, en particulier pour $T = T_0$, jusqu'à la singularité finale au delà de l'horizon futur. Néanmoins, si nous souhaitons décrire l'évolution des champs du point de vue "galiléen" d'un observateur adoptant t comme temps cosmique, (r_*, ω) comme variables d'espace absolu, le phénomène crucial est cet effet Doppler infini mesuré par un tel observateur. Le cadre mathématique est alors celui de la théorie de la diffusion pour un système hyperbolique, où les faits géométriques définissant la perturbation, sont, d'une part, un potentiel du à la courbure de l'espace-temps, et d'autre part, un obstacle mouvant, qui est la surface de l'étoile. Puisqu'en coordonnées de Schwarzschild, cet obstacle semble atteindre asymptotiquement la vitesse de la lumière, il devient nécessaire de construire un cadre fonctionnel adapté, qui est un aspect important, nouveau par rapport au cas du trou noir éternel. Cette situation diffère drastiquement de la théorie de la diffusion classique par potentiel et obstacle borné mouvant (voir par exemple [16]).

II. Propagation des champs classiques

Un champ scalaire ψ de masse $m \geq 0$, à l'extérieur de l'étoile en effondrement, est décrit par l'équation covariante de Klein-Gordon

$$(\Box_g + m^2)\psi = 0 \ ,$$

où $\Box_g . = |g|^{-1/2}\partial_\mu[|g|^{1/2}g^{\mu\nu}\partial_\nu .]$ est le d'Alembertien associé à la métrique g. Par simplicité on impose la condition de Dirichlet homogène à la surface de l'étoile. En coordonnées de Schwarzschild, on considère donc le problème mixte hyperbolique

$$\text{(11)} \qquad \left[\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}r^2\frac{\partial}{\partial r_*} + (1-\frac{2M}{r})(-\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2} + m^2)\right]\psi = 0 \ , (t, r_*, \omega) \in \mathcal{M} \ ,$$

$$\text{(12)} \qquad \forall (t,\omega) \in \mathbb{R} \times S^2 \ , \ \psi(t, z(t), \omega) = 0 \ ,$$

$$\text{(13)} \qquad {}^t(\psi(s), \partial_t\psi(s)) = \Phi \ ,$$

où Δ_{S^2} est l'opérateur de Laplace-Beltrami sur S^2 et Φ est la donnée de Cauchy sur l'hypersurface $\{t = s\} \times]z(s), \infty[_{r_*} \times S^2_\omega$. La solution ψ de (11) (12) (13) s'exprime à l'aide d'un propagateur $U(t,s)$ en posant

$${}^t(\psi(t), \partial_t\psi(t)) = U(t,s)\Phi \ ,$$

que l'on construit rigoureusement en introduisant l'espace de Hilbert $\mathcal{H}(t)$ des champs d'énergie finie à l'instant t, défini comme la fermeture de $\left[C_0^\infty(]z(t), +\infty[_{r_*} \times S^2_\omega)\right]^2$ pour la norme

$$\text{(14)} \qquad \|{}^t(f,p)\|^2_{\mathcal{H}(t)} =$$

$$= \int_{z(t)}^{\infty}\int_{S^2}\left\{|\frac{\partial}{\partial r_*}f|^2 + (1-\frac{2M}{r})\left[\frac{1}{r^2}|\nabla_{S^2}f|^2 + m^2|f|^2\right] + |p|^2\right\} r^2 dr_* d\omega \ .$$

Les résultats classiques sur les E.D.P. hyperboliques sur une variété ([7]) assurent que le problème mixte est bien posé dans C^∞. Mais nous avons besoin d'estimations énergétiques précises :

Proposition 1.— *Le propagateur $U(t,s)$ est fortement continu de $\mathcal{H}(s)$ sur $\mathcal{H}(t)$ et satisfait :*

$$\text{(15)} \qquad s \leq t \Rightarrow \|U(t,s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(s),\mathcal{H}(t))} = 1 \ ,$$

$$\text{(16)} \qquad s < t, z(s) \neq z(t) \Rightarrow \|U(s,t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t),\mathcal{H}(s))} > 1 \ ,$$

(17) $$\forall s \in \mathbb{R}, \exists C_s > 0 \ , \ \forall t \geq s, \ \|U(s,t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t),\mathcal{H}(s))} \geq C_s e^{\kappa t} \ ,$$

(18) $$\forall \Phi \in \mathcal{H}(0), \lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Phi\|_{\mathcal{H}(t)} = 0 \Longleftrightarrow \phi = 0 \ .$$

De plus, si $\Phi \in [C_0^\infty(]z(s), +\infty[_{r_*} \times S^2_\omega)]^2$, *la solution* ψ *appartient à* $C^2(\mathcal{M})$ *et*

$$\mathrm{Supp}\Phi \subset [z(s), R[_{r_*} \times S^2_\omega \Rightarrow \mathrm{Supp}\ \psi(t,.) \subset [z(t), R + |t-s|[_{r_*} \times S^2_\omega \ .$$

Les estimations (15) et (16) sont des conséquences de (8) et traduisent l'effet Doppler induit par la contraction de l'étoile. La dynamique est donc dissipative, mais il n'existe pas de solutions évanescentes, comme le montre (18). La relation (17) met en évidence un point crucial : elle exprime que l'effet Doppler est infini. Il en résulte une difficulté particulière pour la théorie de la diffusion : on constate qu'il est impossible de borner l'énergie à $t = 0$ d'un champ dont la donnée est spécifiée à un instant t arbitrairement grand. Il est donc nécessaire d'introduire un nouveau cadre fonctionnel adapté à l'effet Doppler infini. Plus précisément on prend en compte des champs admettant une singularité se propageant le long de la sous variété caractéristique γ, puisque le raisonnement heuristique de l'introduction nous indiquait que l'effet Doppler infini était susceptible d'engendrer une telle singularité pour les solutions du problème de Cauchy à $t = +\infty$. On définit ainsi l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_1(t)$, fermeture de $[C_0^\infty(]z(t), \infty[_{r_*} \times S^2_\omega)]^2$ pour la norme

(19) $$\|{}^t(f,p)\|^2_{\mathcal{H}_1(t)} = \frac{1}{2}\int_{z(t)}^{-t}\int_{S^2} \{|r_* + t|\,|\frac{\partial f}{\partial r_*} + p|^2 + |\frac{\partial f}{\partial r_*} - p|^2$$
$$+2(1-\frac{2M}{r})[\frac{1}{r^2}|\nabla_{S^2} f|^2 + m^2|f|^2]\}r^2 dr_* d\omega$$
$$+\int_{-t}^{\infty}\int_{S^2}\{|\frac{\partial f}{\partial r_*}|^2 + (1-\frac{2M}{r})[\frac{1}{r^2}|\nabla_{S^2} f|^2 + m^2|f|^2] + |p|^2\}r^2 dr_* d\omega \ .$$

Le point important est bien sûr la présence du facteur $|r_* + t|$. En remplaçant ce poids par

$$\frac{1 + \dot{z}(\tau(r_* + t))}{1 - \dot{z}(\tau(r_* + t))}$$

où τ est la fonction "temps de contact" définie par (10), on obtient une norme uniformément équivalente par rapport à t, et qui est conservée pour les champs sans masse à symétrie sphérique solutions de l'équation de Regge-Wheeler de spin 1 ([5]). Pour estimer plus généralement le propagateur $U(t,s)$ dans cet espace, il est commode de tirer partie de l'invariance par rotation du problème, et de décomposer les champs sur la base des harmoniques sphériques $Y_{\ell,m}(\omega), \ell \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq \ell$. On note $\Pi_{\ell,m}$ le projecteur de $C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega)$ sur $C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*}) \otimes Y_{\ell,m}$ défini par

$$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega), (\Pi_{\ell,m}\varphi)(r_*,\omega) = \langle \varphi(r_*,.), Y_{\ell,m}\rangle_{L^2(S^2)} Y_{\ell,m}(\omega) \ .$$

Par transposition, $\Pi_{\ell,m}$ s'étend aux distributions vectorielles.

Proposition 2.— *Pour tout $\ell \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}, |m| \leq \ell$, et $t, s \in \mathbb{R}$, $U(t,s)\Pi_{\ell,m}$ s'étend en un propagateur fortement continu de $\mathcal{H}_1(s)$ sur $\mathcal{H}_1(t)$. De plus, il existe $C_\ell > 0$ tel que*

$$\sup_{0 \leq t,s} \|U(t,s)\Pi_{\ell,m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_1(s),\mathcal{H}_1(t))} \leq C_\ell < +\infty \ , \tag{20}$$

et pour tout $\Phi \in \mathcal{H}(0)$, les limites

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}(t)} \quad et \quad \lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}_1(t)}$$

existent et vérifient

$$\begin{aligned} C_\ell^{-1}\|\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}_1(0)} \leq \lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}(t)} &= \lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}_1(t)} \\ &\leq C_\ell\|\Pi_{\ell,m}\Phi\|_{\mathcal{H}_1(0)} \ . \end{aligned} \tag{21}$$

(20) montre que l'effet Doppler est bien contrôlé dans les espaces $\mathcal{H}_1$, et on interprète par (21), la norme $\mathcal{H}_1$ comme énergie asymptotique à $t = +\infty$.

On démontre les propositions 1 et 2 en établissant des inégalités d'énergie pour chaque composante $u_{\ell,m}(t,r_*) = r\psi_{\ell,m}(t,r_*)$ de la décomposition en harmoniques sphériques $\psi = \Sigma\psi_{\ell,m} \otimes Y_{\ell,m}$, qui est solution d'un problème $1D+1$

$$\partial_t^2 u_{\ell,m} - \partial_{r_*}^2 u_{\ell,m} + V_\ell u_{\ell,m} = 0 \ , \tag{22}$$

$$u_{\ell,m}(t, z(t)) = 0 \ , \tag{23}$$

où

$$V_\ell(r_*) = (1 - \frac{2M}{r})\left(\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + m^2\right) \ . \tag{24}$$

Quoique nous n'ayons pas trouvé d'estimations uniformes sur le champ global ψ dans $\mathcal{H}_1$, nous conjecturons que la suite C_ℓ est bornée et que

$$\lim_{t\to+\infty} \|U(t,0)\Phi\|_{\mathcal{H}(t)}$$

définit une norme équivalente sur $\mathcal{H}_1(0)$.

III Opérateur d'onde classiques

La métrique de Schwarzchild (4) étant asymptotiquement plate à l'infini, nous comparons les solutions de (11) (12) quand $t \to +\infty$, $r \to +\infty$, avec les solutions de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace temps de Minkowski

$$(25) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_\infty - \Delta_{\mathbb{R}^3_x}\psi_\infty + m^2\psi_\infty = 0, \Delta_{\mathbb{R}^3_x} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}, x \in \mathbb{R}^3 \ , t \in \mathbb{R} \ .$$

A l'infini spatial, le terme $-2Mm^2r^{-1}$ dans (24) est une perturbation de longue portée de (25). Comme dans le cas du trou noir étudié dans [4], nous introduisons une modification à la Dollard de la dynamique libre pour les champs massifs. Soit $\mathcal{H}_\infty$ l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H}_\infty = H^1(\mathbb{R}^3) \times L^2(\mathbb{R}^3) \ ,$$

$$\|{}^t(f,p)\|^2_{\mathcal{H}_\infty} = \int_{\mathbb{R}^3_x} |\nabla_{\mathbb{R}^3_x} f|^2 + m^2|f|^2 + |p|^2 dx \ ,$$

et $U^D_\infty(t)$ est le propagateur unitaire défini pour $t \neq 0$ par

$$U^D_\infty(t) = \begin{bmatrix} \cos(tB_\infty + D\log t) & B_\infty^{-1}\sin(tB_\infty + D\log t) \\ -B_\infty \sin(tB_\infty + D\log t) & \cos(tB_\infty + D\log t) \end{bmatrix} \ ,$$

$$B_\infty = (-\Delta_{\mathbb{R}^3_x} + m^2)^{1/2}, D = -Mm^2|\nabla_{\mathbb{R}^3_x}|^{-1} \ , \ \log t \equiv \text{signe } (t).\log|t| \ .$$

On choisit une fonction régulière de troncature χ telle que

$$(26) \qquad \chi \in C^\infty(\mathbb{R}_{r_*}), r_* < C \Rightarrow \chi(r_*) = 0, r_* > d \Rightarrow \chi(r_*) = 1 \ , 0 < c < d \ ,$$

et on définit un opérateur borné $\mathcal{I}^\chi_\infty(t)$ de $\mathcal{H}(t)$ dans $\mathcal{H}_\infty$ en identifiant la norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^3$ avec $r_* \geq 0$, ce qui évite des interactions de longue portée artificielles, et en posant

$$\Phi \in \mathcal{H}(t), x \in \mathbb{R}^3, (\mathcal{I}^\chi_\infty(t)\Phi)(x) = \chi(r_*)\Phi(r_*,\omega), r_* = |x| \ , \ \omega = |x|^{-1}x \ .$$

On considère l'opérateur d'onde à l'infini futur W^{out}_∞

$$(27) \qquad \Phi \in \mathcal{H}(0), W^{out}_\infty\Phi = \lim_{t\to+\infty} U^D_\infty(-t)\mathcal{I}^\chi_\infty(t)U(t,0)\Phi \ , \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_\infty \ .$$

Maintenant, quand $r \to 2M$, le potentiel d'interaction gravitationnelle, V_ℓ, donné par (24) s'annule exponentiellement vite (par rapport à $r_* \to -\infty$). Aussi, près de l'horizon futur du trou noir $\{t = +\infty\} \times \{r = 2M\} \times S^2_\omega$, comparons nous les solutions de (11) (12) avec des champs d'ondes planes solutions de

$$(28) \qquad \frac{\partial^2}{\partial t^2}\psi_{BH} - \frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\psi_{BH} = 0, t, r_* \in \mathbb{R}, \omega \in S^2.$$

Remarquons l'absence de contrôle de la dépendance angulaire, et de terme de masse. D'un point de vue technique, la simplicité de l'équation (28) induit deux difficultés : une perte de régularité en ω des champs asymptotiques, et la nécessité d'introduire des espaces énergétiques de type Beppo-levi qui ne sont pas des espaces de distributions. Plus précisément on définit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}_{BH}$ comme la fermeture de $[C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega)]^2$ pour la norme

$$\|{}^t(f,p)\|^2_{\mathcal{H}_{BH}} = 4M^2 \int_{\mathbb{R}\times S^2} |\frac{\partial f}{\partial r_*}|^2 + |p|^2 dr_* d\omega \ ,$$

et le sous espace (de distributions) $\mathcal{A}_{BH}$, fermeture de

$$\{{}^t(f, \partial_{r_*} f) \ , \ f \in C_0^\infty(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega), r_* \leq 0 \Rightarrow f(r_*,.) = 0\} \ .$$

Soit $U_{BH}(t)$ le groupe unitaire sur $\mathcal{H}_{BH}$ associé à (28).

Etant donné χ satisfaisant (26), on définit l'opérateur borné $\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)$ de $\mathcal{H}(t)$ dans $\mathcal{H}_{BH}$ en posant

$$r_* \geq z(t) \Rightarrow [\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)\Phi](r_*, \omega) = (1 - \chi(r_*))\Phi(r_*, \omega) \ ,$$

$$r_* < z(t) \Rightarrow [\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)\Phi](r_*, \omega) = 0 \ .$$

On introduit enfin l'opérateur d'onde à l'horizon futur du trou noir W^{out}_{BH} :

(29) $$\Phi \in \mathcal{H}(0), W^{out}_{BH}\Phi = \lim_{t\to+\infty} U_{BH}(-t)\mathcal{I}^\chi_{BH}(t)U(t,0)\Phi \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_{BH} \ .$$

La structure asymptotique future des champs dans $\mathcal{M}$, est donnée par le

Théorème 1.— *Pour tout $\Phi \in \mathcal{H}(0)$, les limites (27) et (29) existent, ne dépendent pas du choix de la fonction χ satisfaisant (26), et définissent une contraction à image dense, $W^{out}_{BH} \oplus W^{out}_\infty$, de $\mathcal{H}(0)$ dans $\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty$. De plus $W^{out}_{BH} \oplus W^{out}_\infty$ se prolonge de façon unique en un isomorphisme de*

$$\Pi_{\ell,m}[\mathcal{H}_1(0)] \quad \textit{sur} \quad \Pi_{\ell,m}[\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty] \ .$$

On remarque que l'effet Doppler infini a un effet régularisant en effaçant à $t = +\infty$ la singularité portée par γ : les champs diffractés dans l'image de $\Pi_{\ell,m}[\mathcal{H}_1(0)]$ sont localement $H^1 \times L^2$ en coordonnée radiale. A contrario, le problème de Cauchy à $t = +\infty$ conduit à une solution à $t = 0$ dans $\mathcal{H}_1(0)$ seulement. On le résout en construisant des opérateurs d'onde rétrogrades Ω^+_{BH} et Ω^+_∞ par la méthode de Cook, et en utilisant l'estimation fondamentale (20). On introduit des espaces de données asymptotiques

(30) $$\mathcal{D}^\pm_{BH} = \{\Phi^\pm_{BH} = \sum_{finie} {}^t(f_{\ell,m}(r_*), \pm f'_{\ell,m}(r_*)) \otimes Y_{\ell,m}(\omega) \ , f_{\ell,m} \in C_0^\infty(]0,\infty[)\} \ ,$$

$$(31) \qquad \mathcal{D}^c_\infty = \{\Phi_\infty = \sum_{finie} {}^t(f_{\ell,m}(|x|), p_{\ell,m}(|x|)) \otimes Y_{\ell,m}(\frac{x}{|x|}) \in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3_x)]^2\} \ ,$$

$$(32) \qquad \mathcal{D}^0_\infty = \{\Phi_\infty \ ; \mathcal{F}\Phi_\infty(\xi) = \sum_{finie} {}^t(f_{\ell,m}(|\xi|), p_{\ell,m}(|\xi|)) \otimes Y_{\ell,m}(\frac{\xi}{|\xi|})$$

$$\in [C_0^\infty(\mathbb{R}^3_\xi \setminus \{0\})]^2\} \ ,$$

où $\mathcal{F}$ désigne la transformée de Fourier dans $\mathbb{R}^3_x$. On pose

$$(33) \qquad \Phi^+_{BH} \in \mathcal{D}^+_{BH}, \Omega^+_{BH}\Phi^+_{BH} = \lim_{t\to+\infty} U(0,t) I^\chi_{BH} U_{BH}(t) \Phi^+_{BH} \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_1(0) \ ,$$

$$(34) \qquad \Phi_\infty \in \mathcal{H}_\infty \ , \ \Omega^+_\infty \Phi_\infty = \lim_{t\to+\infty} U(0,t) I^\chi_\infty U^D_\infty(t) \Phi_\infty \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_1(0) \ ,$$

où les opérateurs d'identifications I^χ_{BH} et I^χ_∞ sont définis à partir d'une fonction de troncature χ satisfaisant (26) pour les relations

$$[I^\chi_{BH}\Phi_{BH}](r_*, \omega) = (1 - \chi(r_*))\Phi_{BH}(r_*, \omega) \ ,$$

$$[I^\chi_\infty \Phi_\infty](r_*, \omega) = \chi(r_*)\Phi_\infty(x), r_* = |x|, \omega = \frac{x}{|x|} \ .$$

Proposition 3.—

1) Pour tout $\Phi^+_{BH} \in \mathcal{D}^+_{BH}$, la limite (33) existe, ne dépend pas de χ satisfaisant (26) et on a

$$(35) \qquad \Omega^+_{BH}\Phi^+_{BH} \in \mathcal{H}(0) \ .$$

2) Pour tout $\Phi^0_\infty \in \mathcal{D}^0_\infty$, la limite (34) existe et ne dépend pas de χ satisfaisant (26).

3) Si la masse m du champ est **nulle**, *alors la limite (34) existe pour tout $\Phi^c_\infty \in \mathcal{D}^c_\infty$, ne dépend pas de χ satisfaisant (26) et on a*

$$(36) \qquad \Omega^+_\infty \Phi^c_\infty \in \mathcal{H}(0) \ .$$

4) L'opérateur $\Omega^+_{BH} \oplus \Omega^+_\infty$ se prolonge en un isomorphisme de $\Pi_{\ell,m}[\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty]$ sur $\Pi_{\ell,m}\mathcal{H}_1(0)$, réciproque de $W^{out}_{BH} \oplus W^{out}_\infty$.

Le contrôle de la norme $\mathcal{H}(0)$ est rendu difficile par le fait que

$$\|U(0,t)\Pi_{\ell,m}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t),\mathcal{H}(0))} \sim e^{\kappa t} \; . \tag{37}$$

On prouve (35) en utilisant la décroissance en $e^{2\kappa r_*}$ du potentiel V_ℓ, et (36) à l'aide du principe de Huygens pour l'équation des ondes dans $\mathbb{R}^{3+1}$. L'existence des opérateurs W_{BH}^{out} et W_∞^{out} est établie en deux étapes. On montre tout d'abord que les champs dans $\mathcal{M}$ sont asymptotes à des solutions de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace temps de Schwarzschild $\mathcal{M}_S$. On conclut ensuite grâce à la théorie de la diffusion par un trou noir éternel développée dans [4]. Le détail des démonstrations est à paraître dans [1].

IV Radiation Harwking à l'horizon du trou noir

Dans son article historique de 1975 [13] S. Hawking annonça que les trous noirs ne le sont pas. Son analyse, largement heuristique, repose sur l'approximation BKW des champs près de l'horizon d'un trou noir en formation. Le phénomène de polarisation du vide étant typiquement quantique, il y a autant d'approches possibles que de façons de formuler la théorie quantique des champs dans les espaces-temps courbes. Les outils mathématiques mis en œuvre sont donc variés. Parmi les innombrables publications consacrées à ce sujet par les physiciens citons :

- R. Wald [18] qui adopte le point de vue constructiviste en développant les champs sur des bases d'espaces de Fock ; on dispose ainsi d'une interprétation physique en termes de particules ; le problème mathématique consiste à prendre la trace d'opérateurs qui ne sont pas de classe Hilbert-Schmidt !...

- K. Fredenhagen et R. Haag [11] qui, dans l'esprit des $\mathbb{C}^*$-algèbres, modélisent un détecteur de particules par $\psi^*\psi$ où les solutions ψ de (11) sont des opérateurs non bornés ; le point mathématique clef de cette approche est la structure de la singularité de la fonction de Green, conjecturée être de type "Hadamard".

- W.G. Unruh [17] qui développe les champs en modes normaux et propose diverses procédures de régularisation des séries formellement divergentes des moyennes dans le vide du tenseur d'énergie.

- Nous adoptons l'approche algébrique de la théorie des champs utilisée notamment par J. Dimock et B.S. Kay dans [9]. Elle présente le double avantage, d'un point de vue physique, d'être manifestement covariante en évitant la notion de particules, du point de vue mathématique, de ramener immédiatement le problème à l'étude des équations de champs *classiques* dans un nouveau cadre fonctionnel de données, de Cauchy peu régulières. Pour préciser ce point, rappelons que la quantification du champ de Klein-Gordon hermitien sur $\mathcal{M}$, consiste à choisir une application W^0 de l'espace des données de Cauchy réelles $[C_0^\infty(]z(0),\infty[_{r_*}\times S^2_\omega;\mathbb{R})]^2$, à valeur dans l'espace $\mathfrak{U}(\mathfrak{H})$ des opérateurs unitaires sur un espace de Hilbert complexe $\mathfrak{H}$, satisfaisant les relations de commutation canonique de Weyl

$$W^0({}^t(f_1,p_1))W^0({}^t(f_2,p_2)) = \exp[\frac{-i}{2}\int_{z(0)}^{\infty} \tag{38}$$

$$\int_{S^2}(f_1p_2 - f_2p_1)r^2dr_*d\omega] \;.W^0({}^t(f_1+f_2,p_1+p_2)) \;.$$

Le point crucial est que la forme symplectique

$$\sigma^t(\Phi_1^t,\Phi_2^t) = \int_{z(t)}^{\infty}\int_{S^2}(f_1p_2 - f_2p_1)r^2dr_*d\omega \;, \tag{39}$$

$$\Phi_j^t = {}^t(f_j,p_j) \in [C_0^{\infty}(]z(t),\infty[_{r_*}\times S_\omega^2;\mathbb{R})]^2,$$

est invariante sous l'action du propagateur $U(t,s)$. Donc en posant pour $t\in\mathbb{R}$

$$W^t(\Phi^t) = W^0(U(0,t)\Phi^t) \tag{40}$$

on obtient une quantification sur l'hypersurface de Cauchy $\{t\}\times]z(t),\infty[\times S^2$ qui satisfait les relations de Weyl. En notant que la régularité Sobolev des données de Cauchy (f,p) est du type $H^s\times H^{s-1}$, on voit que la régularité minimale requise pour donner un sens à σ^t est $H^{1/2}\times H^{-1/2}$. Grossomodo, on peut conclure qu'alors qu'en théorie des champs classiques, la quantité invariante importante est l'énergie, et le cadre fonctionnel associé est de type $H^1\times L^2$, en théorie quantique des champs, c'est le Wronskien qui joue un rôle central, et l'étude des champs quantiques se ramène à celle des champs classiques dans $H^{1/2}\times H^{-1/2}$. Concrètement, on construit la quantification de Fock sur

$$\mathfrak{h} = L^2(]z(0),+\infty[_{r_*}\times S_\omega^2, r^2dr_*d\omega;\mathbb{C}) \;,$$

en introduisant l'espace de Fock $\mathfrak{H}$, somme directe des produits tensoriels symétriques de $\mathfrak{h}$:

$$\mathfrak{H} = \bigoplus_{n=0}^{\infty}[\mathfrak{h}^{\otimes n}]_s, \tag{41}$$

et la quantification de Weyl

$$f\in\mathfrak{h}\to w^0(f) = \exp[a^*(f) - (a^*(f))^*] \in U(\mathfrak{H}) \tag{42}$$

où $a^*(f)$ est l'opérateur de création sur $\mathfrak{H}$. On définit l'opérateur H_0 autoadjoint de domaine dense $D(H_0)$ dans

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{R}} = L^2(]z(0),+\infty[_{r_*}\times S_\omega^2, r^2dr_*d\omega;\mathbb{R}) \;:$$

$$H_0 = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}r^2\frac{\partial}{\partial r_*} + (1-\frac{2M}{r})(-\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}+m^2) ,$$
$$D(H_0) = \{f \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} \ ; \ H_0 f \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}\} .$$

On introduit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}^{1/2}(0)$, fermeture de $[C_0^\infty(]z(0),\infty[_{r_*}\times S^2_\omega;\ \mathbb{R})]^2$ pour la norme
$$\|{}^t(f,p)\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} = \|H_0^{1/4}f\|^2_{\mathfrak{h}} + \|H_0^{-1/4}p\|^2_{\mathfrak{h}} ,$$
et l'opérateur K_0 de $\mathcal{H}^{1/2}(0)$ sur $\mathfrak{h}$
$$\Phi = {}^t(f,p) \in \mathcal{H}^{1/2}(0), K_0\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(H_0^{1/4}f + iH_0^{-1/4}p) .$$

L'algèbre des observables $\mathfrak{U}$ est définie comme la $\mathbb{C}^*$-algèbre engendrée par les opérateurs unitaires $W^0(\Phi)$ sur $\mathfrak{H}$ donnés par

(43) $$\Phi \in [C_0^\infty(]z(0),\infty[\times S^2;\mathbb{R})]^2, W^0(\Phi) = w^0(K_0\Phi) .$$

Remarquons que $\mathfrak{U}$ est aussi engendrée par les observables à l'instant t définis par

(44) $$\Phi^t \in [C_0^\infty(]z(t),\infty[\times S^2;\mathbb{R})]^2 \ , \ W^t(\Phi^t) = W^0(U(0,t)\Phi^t) .$$

L'état physique du système quantique est caractérisé par une forme linéaire positive ω sur $\mathfrak{U}$, ou état. L'étoile étant stationnaire dans le passé, les notions intuitives de vide et de particules sont bien traduites par l'espace de Fock $\mathfrak{H}$ et nous choisissons ω de façon à modéliser le vide (absence de particule) dans le passé, en prenant comme fonctionnelle génératrice de ω :

(45) $$\Phi \in [C_0^\infty(]z(0),\infty[\times S^2;\mathbb{R})]^2, \omega(W^0(\Phi)) = \exp(-\frac{1}{2}\|K_0\Phi\|^2_{\mathfrak{h}}) .$$

De fait, puisque $U(0,t)$ est un groupe unitaire sur $\mathcal{H}^{1/2}(0)$ pour tout $t \leq 0$, ω s'identifie au secteur vide $\Omega = (1,0\cdots 0\cdots)$ de $\mathfrak{H}$:

(46)
$$\forall\Phi \in \mathcal{H}^{1/2}(0), \forall t \leq 0 \ , \omega(W^0(U(0,t)\Phi)) = \omega(W^t(\Phi)) = \langle\Omega, W^0(U(0,t)\Phi)\Omega\rangle_{\mathfrak{H}} .$$

Pour $t > 0$, l'espace temps $\mathcal{M}$ n'est plus stationnaire. Il n'y a donc plus de définition canonique de particules, ce qui revient à dire qu'il y a une création (et annihilation) de particules telles qu'elles sont définies dans le passé : c'est le phénomène de polarisation du vide, thème central de la théorie quantique des champs en relativité générale. Le problème fondamental est de décrire la structure de l'état ω dans le futur. Nous étudions donc le comportement asymptotique de $\omega(W^t(\Phi^t))$ quand $t \to +\infty$, pour un choix convenable d'observables. Puisque nous sommes intéressés par la radiation Hawking à l'horizon futur du trou noir, nous prenons

(47) $$\Phi^t(r_*,\omega) = \Phi^0(r_*+t,\omega) .$$

On se limitera à l'observation d'un nombre fini d'harmoniques de champs rentrant dans le trou noir ou émis vers l'infini en considérant

$$(48) \qquad \Phi^0 = \Phi^0_+ + \Phi^0_- \quad \Phi^0_\pm \in \mathcal{D}^\pm_{BH,\mathbb{R}} \ .$$

où $\mathcal{D}^\pm_{BH,\mathbb{R}}$ est l'ensemble des distributions de $\mathcal{D}^\pm_{BH}$ à valeur réelle.

Il s'agit donc d'évaluer quand $t \to +\infty$

$$(49) \qquad \omega(W^t(\Phi^t)) = \exp(-\frac{1}{2}\|U(0,t)\Phi^t\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}(0)}) \ .$$

La théorie algébrique des champs quantiques nous a donc permis de ramener le problème à l'estimation du propagateur des champs classiques dans $\mathcal{H}^{1/2}(0)$. Nous allons établir l'existence d'une limite

$$(50) \qquad \|U(0,t)\Phi^t\|_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} \to \ell < +\infty, t \to +\infty \ .$$

Pour situer la difficulté à surmonter, notons que

$$(51) \qquad 0 < \inf_{0\leq t} \|\Phi^t\|_{\mathcal{H}(t)} \leq \sup_{0\leq t} \|\Phi^t\|_{\mathcal{H}(t)} < \infty \ ,$$

mais que

$$(52) \qquad \sup_{0\leq t} \|U(0,t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}(t),\mathcal{H}^{1/2}(0))} = \infty \ .$$

En effet, si cette dernière quantité était finie, $\Omega^+_{BH} \oplus \Omega^+_\infty$ serait un isomorphisme de $\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty$ dans $\mathcal{H}^{1/2}(0)$.

Or

$$(\Omega^+_{BH} \oplus \Omega^+_\infty)\Pi_{\ell,m}(\mathcal{A}_{BH} \oplus \mathcal{H}_\infty) = \Pi_{\ell,m}\mathcal{H}_1(0) \ ,$$

et on a

$$(53) \qquad \mathcal{H}^{1/2}(0) \subset H^{1/2}_{\text{loc}} \times H^{-1/2}_{\text{loc}}(]z(0),+\infty[\times S^2) \ ,$$

$$(54) \qquad \Pi_{\ell,m}\mathcal{H}_1(0) \not\subset H^{1/2}_{\text{loc}} \times H^{-1/2}_{\text{loc}}(]z(0),\infty[\times S^2) \ .$$

(54) montre en particulier qu'on ne peut utiliser directement l'estimation $\mathcal{H}_1(0)$

$$(55) \qquad \sup_{0\leq t} \|U(0,t)\Phi^t\|_{\mathcal{H}_1(0)} < \infty \ ,$$

pour prouver (50). Par ailleurs, on a bien

$$(56) \qquad \mathcal{H}(0) \cap \mathcal{E}' \subset \mathcal{H}^{1/2}(0)(\text{et } \mathcal{H}(0) \subset \mathcal{H}^{1/2}(0) \quad \text{si} \quad m \neq 0) \ ,$$

mais si $\Phi_-^+ \neq 0$, on montre que

$$\|U(0,t)\Phi^t\|_{\mathcal{H}(0)} \geq Ce^{\kappa t} \ . \tag{57}$$

(52) (53) (54) (57) indiquent donc que l'assertion (50) qui traduit l'effet Hawking, est un phénomène très fin assez inattendu. Pour l'énoncer précisément, nous quantifions les champs à l'horizon du trou noir solutions de (28) en introduisant l'opérateur

$$H_{BH} = -\frac{\partial^2}{\partial r_*^2} \ , \ D(H_{BH}) = \{f \in \mathfrak{h}_{BH}, \frac{\partial^2}{\partial r_*^2} f \in \mathfrak{h}_{BH}\} \ ,$$

autoadjoint sur l'espace

$$\mathfrak{h}_{BH} = L^2(\mathbb{R}_{r_*} \times S^2_\omega; \mathbb{C}), \|f\|^2_{\mathfrak{h}_{BH}} = 4M^2 \int_{\mathbb{R}\times S^2} |f|^2 dr_* d\omega \ ,$$

et l'opérateur K_{BH} de $\mathcal{D}^+_{BH,\mathbb{R}} \oplus \mathcal{D}^-_{BH,\mathbb{R}}$ dans $\mathfrak{h}_{BH}$:

$$\Phi_{BH} = {}^t(f,p) \in \mathcal{D}^+_{BH,\mathbb{R}} \oplus \mathcal{D}^-_{BH,\mathbb{R}}, K_{BH}\Phi_{BH} = \frac{1}{\sqrt{2}}(H_{BH}^{1/4} f + iH_{BH}^{-1/4} p) \ .$$

La fonction génératrice de l'état de vide à l'horizon du trou noir est $\exp(-\frac{1}{2}\|K_{BH}\Phi_{BH}\|^2_{\mathfrak{h}_{BH}})$. Plus généralement, suivant Kubo, Martin, Schwinger, un état de radiation thermal de temperature $\beta^{-1} > 0$ est défini par la fonction génératrice

$$\exp(-\frac{1}{2}\|[\coth\,(\frac{\beta}{2}H_{BH}^{1/2})]^{1/2} K_{BH}\Phi_{BH}\|^2_{\mathfrak{h}_{BH}}) \ .$$

Le résultat fondamental est le

Théorème 2.— *Etant donné Φ^t satisfaisant (47) (48), $\omega(W^t(\Phi^t))$ admet une limite quand $t \longrightarrow +\infty$ et on a*

$$\lim_{t\to+\infty} \omega(W^t(\Phi^t)) = \exp\{-\frac{1}{2}\|[\coth\,(4\pi M H_{BH}^{1/2})]^{1/2} K_{BH}\Phi_-^0\|^2_{\mathfrak{h}_{BH}} \tag{58}$$

$$-\frac{1}{2}\|K_0\Omega^+_{BH}\Phi^0_+\|^2_{\mathfrak{h}}\} \ .$$

(58) corrobore exactement l'analyse de Hawking [13], Wald [18] et Unruh [17] : un flux thermal de particules est émis vers l'infini, au voisinage de l'horizon futur du trou noir, à une température égale à $\frac{1}{8\pi M}$ (vitesse de la lumière = constante de Planck = constante de Boltzmann = constante de gravitation universelle = 1). Il est remarquable que cette radiation ne dépend ni de la masse du champs, ni de l'histoire de l'effondrement gravitationnel.

- Nous esquissons l'idée de la démonstration ; on introduit le propagateur $U_0(t,s)$ associé à l'équation

$$\partial_t^2\psi - \partial_{r_*}^2\psi = 0 \ , \ r_* > z(t), \omega \in S^2 \ , \tag{59}$$

et à la condition aux limites (12). L'existence des opérateurs d'onde classique entraîne que

$$U(0,t)\Phi_-^t \rightharpoonup 0, U_0(0,t)\Phi_-^t \rightharpoonup 0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H}_1(0)-*, t\to+\infty \ . \tag{60}$$

Par ailleurs la décroissance exponentielle des potentiels d'interaction (24) et la formule de Duhamel assurent que

$$U(0,t)\Phi_-^t - U_0(0,t)\Phi_-^t \in \quad \text{borné} \quad (\mathcal{H}(0)\cap\mathcal{E}') \ . \tag{61}$$

Par injection compacte de $\mathcal{H}(0)\cap\mathcal{E}'$ dans $\mathcal{H}^{1/2}(0)$, on en déduit que

$$\|U(0,t)\Phi_-^t\|_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} - \|U_0(0,t)\Phi_-^t\|_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} \to 0, t\to+\infty \ . \tag{62}$$

Maintenant la convergence faible (60) implique que

$$\|U_0(0,t)\Phi_-^t\|_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} - \|K_{00}U_0(0,t)\Phi_-^t\|_{\mathfrak{h}} \to 0, t\to\infty \tag{63}$$

avec

$$K_{00} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\left|-\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\right|^{1/4} + i\left|-\frac{\partial^2}{\partial r_*^2}\right|^{-1/4}\right) \ .$$

La construction explicite du propagateur $U_0(0,t)$ à partir de fonction de temps de contact τ donnée par (10) suggère de comparer $U_0(0,t)\Phi_-^t$ avec $\frac{1}{\kappa r_*}\Phi_-^0(t+\frac{1}{\kappa}\log|r_*|,\omega) \equiv F^t$. Un calcul direct par transformée de Fourier donne

$$\|K_{00}F^t\|_{\mathfrak{h}} = \|[\coth(4\pi M H_{BH}^{1/2})]^{1/2}K_{BH}\Phi_-^0\|_{\mathfrak{h}_{BH}} \ . \tag{64}$$

On en déduit que $\|U(0,t)\Phi_-^t\|_{\mathcal{H}^{1/2}(0)}$ tend vers cette quantité.

On achève la démonstration en notant que la proposition 3 entraîne que $U(0,t)\Phi_+^t$ converge vers $\Omega_{BH}^+\Phi_+^0$ dans $\mathcal{H}^{1/2}(0)$ quand $t\to+\infty$. Le résultat précédent assure alors

$$\langle U(0,t)\Phi_-^t, U(0,t)\Phi_+^t\rangle_{\mathcal{H}^{1/2}(0)} \to 0 \ , t\to+\infty \ , \tag{65}$$

et on conclut finalement que $\|U(0,t)\Phi^t\|^2_{\mathcal{H}^{1/2}(0)}$ tend vers l'exposant de (58).

Conclusion. Nous avons justifié rigoureusement la conjecture de S. Hawking dans le cadre de l'approximation semi-classique : les champs sont quantifiés mais la gravitation est traitée classiquement et la métrique est solution des équations d'Einstein dans le vide :

$$\begin{cases} R_{\mu,v} - \frac{1}{2}g_{\mu,\nu}R = 0 \ , \\ \square_g\psi = 0 \ , (\psi \text{ quantifié}). \end{cases}$$

L'étape suivante consisterait à analyser la réaction sur la métrique de la création de particules, justifiant ainsi la notion d'évaporation quantique du trou-noir. Mathématiquement il s'agit de considérer le problème non linéaire semi quantifié

$$\begin{cases} R_{\mu,\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu,\nu} R = -8\pi G \langle T_{\mu\nu}(\psi) \rangle \ , \\ \Box_g \psi = 0 \ , (\psi \text{ quantifié}) \ , \end{cases}$$

où $\langle T_{\mu,\nu}(\psi) \rangle$ est une valeur moyenne renormalisée du tenseur impulsion énergie de ψ dans l'état fondamental ω. La quête pourrait se poursuivre en quantifiant enfin la métrique g, mais cela est une autre histoire...

Références

[1] A. Bachelot. Scattering of Scalar Fields by Spherical Gravitational Collapse. *J. Math. Pures Appl.* à paraître

[2] A. Bachelot. Gravitationnal Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzchild Black Hole. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique,* 54 (3) : 261-320, 1991.

[3] A. Bachelot. La diffraction en métrique de Schwarzschild : complétude asymptotique et résonances. Séminaire X-E.D.P., exposé VIII, Ecole Polytechnique, 1993.

[4] A. Bachelot. Asymptotic Completeness for the Klein-Gordon Equation on the Schwarzschild Metric. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 61 (4) : 411-441, 1994.

[5] A. Bachelot, A. Motet-Bachelot. Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 59 (1) : 3-68, 1993.

[6] N.D. Birrel, P.C.W. Davies. *Quantum fields in curved space.* Cambridge University Press, 1982.

[7] Y. Choquet-Bruhat. Hyperbolic partial differential equations on a manifold. In Wheeler De Witt, editor, *Battelle Rencontres.* Benjamin 1967.

[8] J. Dimock. Algebras of Local Observables on a Manifold. *Commun. Math. Phys.*, 77 : 219-228, 1980.

[9] J. Dimock, B.S. Kay. Classical and Quantum Scattering Theory for linear Scalar Fields on Schwarzschild Metric II. *J. Math. Phys.*, 27 : 2520-2525, 1986.

[10] J. Dimock, B.S. Kay. Classical and Quantum Scattering Theory for linear Scalar Fields on Schwarzschild Metric I. *Ann. Phys.*, 175 : 366-426, 1987.

[11] K. Fredenhagen, R. Haag. On the Derivation of Hawking Radiation Associated with the Formation of a Black Hole. *Comm. Math. Phys.*, 127 : 273-284, 1990.

[12] R. Haag. *Local Quantum Physics.* Springer-Verlag, 1992.

[13] S. Hawking. Particle Creation by Black Holes. *Comm. Math. Phys.*, 43 : 199-220, 1975.

[14] J-P. Nicolas. Non Linear Klein-Gordon Equation on Schwarzschild-like Metrics. *J. Math. Pures Appl.*, 74 : 35-58, 1995.

[15] J-P. Nicolas. Scattering of linear Dirac fields by a spherically symetric Black-Hole. *Ann. Inst. Henri Poincaré - Physique théorique*, 62 (2) : 145-179, 1995.

[16] V. Petkov. *Scattering Theory for Hyperbolic Operators.* North Holland, 1989.

[17] W.G. Unruh. Notes on black-hole evaporation. Phys. Rev. D, 14 (4) : 870-892, 1976.

[18] R. Wald. On particle Creation by Black Holes. *Comm. Math. Pys.*, 45 : 9-34, 1975.

Institut de Mathématiques de Bordeaux
Université Bordeaux-1 & CNRS
351 cours de la Libération
F-33405 Talence, France
E-mail adress :
bachelot@math.u-bordeaux.fr