L. Robbiano
C. Zuily

L'unicité du problème de Cauchy : entre Holmgren et Hörmander

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. nº 14, p. 1-9
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A14_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

L'UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY : ENTRE HOLMGREN ET HÖRMANDER

L. ROBBIANO ET C. ZUILY

Exposé n° XIV

21 Mai 1996

1. Introduction

L'objet de cet exposé est de présenter des théorèmes d'unicité dont la motivation provient de la théorie du contrôle pour l'équation des ondes. En effet considérons à titre d'exemple l'opérateur $P = \Box + c(t,x)$ où $\Box = \partial_t^2 - \Delta_x$. Si c est une fonction analytique, le théorème de Holmgren assure l'unicité de la solution du problème de Cauchy relatif à n'importe quelle surface C^2 non caractéristique. Si c est seulement C^∞ c'est le théorème de Hörmander ([H1], IV, chap. 28) qu'il faut utiliser et il est facile de voir qu'il implique l'unicité à partir de toute surface initiale de type espace. Par contre, si on considère, par exemple, la surface $S = \{x_1 = 0\}$, les hypothèses du théorème de Hörmander (la pseudo-convexité) ne sont plus satisfaites et Alinhac-Baouendi [AB] ont construit deux fonctions C^∞ c et u telles que $(\Box + c)u = 0$ près de l'origine, $u_{|x_1<0} = 0$ et $(0,0) \in \operatorname{supp} u$. Cependant il a été observé par Robbiano [R] à la suite de travaux, en particulier de Rauch-Taylor [RT] et Lerner [L2], que si c ne dépend pas de t on a l'unicité pour $\Box + c(x)$ relativement à la surface $x_1 = 0$ et même à des surfaces voisines. Hörmander [H2] a légèrement étendu ce résultat, mais c'est à Tataru [T] que l'on doit le meilleur énoncé, c'est-à-dire l'unicité par rapport à toute surface non caractéristique. En fait le résultat de Tataru est beaucoup plus général et concerne les opérateurs d'ordre m dont les coefficients sont partiellement analytiques. Cependant malgré leur généralité il est rapidement apparu que les hypothèses faites par Tataru n'étaient pas adéquates. Le but de ce travail a été d'améliorer les résultats de Tataru. En particulier l'un de nos résultats contient, comme cas extrêmes, les théorèmes de Holmgren et de Hörmander évoqués au début ; l'autre s'applique à l'équation des ondes relative à une métrique dont les coefficients sont C^∞ et partiellement localement holomorphes. Pour terminer cette introduction il faut noter que notre méthode, basée sur la théorie de Sjöstrand [S1] [S2], est très différente de celle de Tataru et enfin qu'en utilisant un raffinement de la méthode de Tataru, Hörmander [H3] à récemment obtenu des résultats analogues aux notres.

2. Les énoncés

Soient n_a, n_b deux entiers avec $n = n_a + n_b \geq 1$. On notera $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_a} \times \mathbb{R}^{n_b}$ et $x = (x_a, x_b) \in \mathbb{R}^n$. Soit $P = P(x,D) = P(x_a, x_b, D_{x_a} D_{x_b}) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ un opérateur différentiel d'ordre m de symbole principal p.

On supposera donc ce qui suit

$$(2.1) \qquad \begin{cases} \text{pour } |\alpha| = m, \quad a_\alpha \text{ est analytique en } x_a \text{ et } C^\infty \text{ en } x_b. \\ \text{pour } |\alpha| \leq m-1, \quad a_\alpha \text{ est analytique en } x_a \text{ et } L^\infty \text{ en } x_b. \end{cases}$$

Soit S une hypersurface C^2 localement donnée par

$$S = \{x : \varphi(x) = \varphi(x_0)\}, \ \varphi'(x_0) = (\varphi'_a(x_0), \varphi'_b(x_0)) \neq 0 \ .$$

Comme d'habitude $\{,\}$ désignera le crochet de Poisson.

Théorème A.—

On suppose en outre

$$(H.1)\qquad \begin{cases} |\{\bar p, p\}(x;(0,\xi_b))| \le C|\xi_b|^{m-1}|p(x;(0,\xi_b))| \\ \text{pour tout } x \in V_{x_0} \text{ et pour } \xi_b \in \mathbb{R}^{n_b}\ . \end{cases}$$

$$(H.2)\qquad \begin{cases} \textit{i)}\ n_b = 0 \text{ ou } n_b \ge 1 \text{ et avec } X = (x^0;(0,\xi_b)) \textit{ où } \xi_b \in \mathbb{R}^{n_b}\setminus\{0\} \\ \quad p(X) = \{p,\varphi\}(X) = 0 \text{ implique } Re\{\bar p,\{p,\varphi\}\}(X) > 0 \\ \\ \textit{ii)}\ \text{Soit } \zeta = (x_0;(i\varphi_a'(x_0)), \xi_b + i\varphi_b'(x_0)) \textit{ où } \xi_b \in \mathbb{R}^{n_b}.\ \text{Alors } p(\zeta) = \\ \quad \{p,\varphi\}(\zeta) = 0 \text{ implique } \dfrac{1}{i}\{\bar p(x,\xi - i\varphi'(x)), p(x,\xi + i\varphi'(x))\}_{\substack{|x=x_0 \\ \xi=(0,\xi_b)}} > 0 \end{cases}$$

$(H.3)$ *Sur* $\xi_a = 0$ $\quad p$ *ne dépend pas de* x_a.

Alors si $u \in C^m(V)$ *est telle que* $Pu = 0$ *dans* V *et supp* $u \subset \{x \in V : \varphi(x) \le \varphi(x_0)\}$ *il existe un voisinage* W *de* x_0 *dans lequel* $u \equiv 0$.

Théorème B.—

Supposons

$(H.1)$ $p(x_0;(0,\xi_b))$ *est elliptique*

$(H.2)$ *ii) comme au théorème A.*

On a alors la même conclusion qu'au théorème A.

Remarques

i) Le théorème A contient le théorème de Holmgren ($n_b = 0$) et le théorème de Hörmander ($n_a = 0$).

ii) Le théorème B s'applique à l'équation des ondes à coefficients analytiques en temps et à toute surface non caractéristique.

iii) Tataru [T] a montré le théorème A lorsque p est réel et ses coefficients ne dépendent pas de x_a, et le théorème B lorsque les coefficients de p sont analytiques dans $\mathbb{R}^{n_a}$ à croissance à l'infini contrôlée par $e^{|x_a|^2}$.

3. Les preuves.

Elles sont basées sur des inégalités de Carleman c'est-à-dire des inégalités L^2 avec poids. Cependant, contrairement à Tataru qui utilise des poids pseudo-différentiels, les notres sont ceux utilisés usuellement dans la théorie. Dans ce qui suit on supposera $x_0 = 0, \varphi(x_0) = 0$.

Lemme 3.1.—

Il existe ψ polynôme de degré deux en x tel que

$$\psi(0) = 0,\ \psi'(0) = \varphi'(0)\ . \tag{3.1}$$

Soit $X = (0; (i\psi'_a(0), \xi_b + i\psi'_b(0))$, alors

$$p(X) = 0 \text{ implique } \frac{1}{i}\{\bar{p}(x, \xi - i\psi'(x)), p(x, \xi + i\psi'(x))\}_{\substack{|x=x_0\\ \xi=(0,\xi_b)}} > 0 \tag{3.2}$$

$$\{x \in V : \psi(x) = 0\} \subset \{x \in V : \varphi(x) > 0\}, V \text{ voisinage de zéro .} \tag{3.3}$$

De plus, par homogénéité (3.2) est encore vraie avec le même ψ si on remplace ψ par $\rho\psi$ où $\rho > 0$.

Soit u une solution de $Pu = 0$ avec supp $u \subset \{x : \varphi(x) \leq 0\}$. En posant $u_1 = \chi(\psi(x))u$ où χ est une troncature convenable, on se ramène au cas où $u_1 \in C_0^\infty$ et $Pu_1 = f$ où supp $f \subset \{x : -\epsilon \leq \psi(x) \leq -\frac{\epsilon}{2}\}$. On pose alors $u_1 = e^{-\lambda\psi}v$ d'où l'on déduit $Pu_1 = e^{-\lambda\psi}P_\lambda v$.

Dans tout ce qui suit les opérateurs seront quantifiés en Weyl et en semi-classique. Comme $\sigma_{sc}^w(P) = p(x, \lambda\xi)$ et que ψ est quadratique il résulte de la formule de Segal que $\sigma_{sc}^w(P_\lambda) = p(x, \lambda\xi + i\lambda\psi'(x))$.

Etape 1 : transfert dans le domaine complexe.

On utilise la théorie de Sjöstrand [S1] [S2] concernant la transformation de FBI et les opd dans le domaine complexe. On utilisera le transformation de FBI partielle classique i.e. pour $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\lambda > 0$

$$Tv(z_a, x_b) = K(\lambda) \int e^{-\frac{\lambda}{2}(z_a - y_a)^2} v(y_a, x_b) dy_a$$

où $K(\lambda)$ est un facteur de normalisation.

Voici quelques propriétés classiques de cette transformation :

Tv est C^∞ en x_b, entière en $z_a \in \mathbb{C}^{n_a}$ et en posant $\phi(z_a) = \frac{1}{2}$ (Im $z_a)^2$ on a pour tous N, $M \in \mathbb{N}$

$$(3.4) \qquad |Tv(z_a, x_b)| \leq C_{N,M} < z_a >^{-N} < x_b >^{-M} e^{\lambda\Phi(z_a) - \frac{\lambda}{2}[d(Rez_a, \text{supp } v)]^2} .$$

Ensuite T est une isométrie de $L^2(\mathbb{R}^{n_a}, H^k(\mathbb{R}^{n_b}))$ sur $L^2((\mathbb{C}^{n_a}, e^{-\lambda\Phi(z_a)}L(dz_a)), H^k(\mathbb{R}^{n_b}))$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Enfin T^*T est l'identité sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ et T^*T est la projection de $L^2_\Phi = L^2((\mathbb{C}^{n_a}, e^{-\lambda\Phi(z_a)}L(dz_a)), L^2(\mathbb{R}^{n_b}))$ sur $L^2_\Phi \cap \mathcal{H}(\mathbb{C}^{n_a})$ où $\mathcal{H}$ désigne l'espace des fonctions holomorphes.

T peut être vue comme un opérateur de Fourier intégral de transformation canonique complexe κ_T. Cette transformation est un difféomorphisme des sous-variétés I-Lagrangiennes et $\mathbb{R}$-symplectique $T^*\mathbb{R}^{n_a}$ et $\Lambda_\Phi = \{(z_a, \xi_a) \in \mathbb{C}^{2n_a} : \xi_a = -\text{ Im } z_a\}$; on a en fait $\kappa_T(x_a, \xi_a) = (x_a - i\xi_a, \xi_a)$. La proposition suivante, essentiellement due à Sjöstrand ([S2] Prop. 1.4), montre comment T conjugue l'opérateur différentiel P_λ.

Proposition 3.2.—

On a $TP_\lambda v = \widetilde{P}_\lambda Tv$ *où*

$$P_\lambda Tv(x_a, x_b) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int\int e^{i\lambda(x_b - y_b)\cdot\xi_b} \quad (\int\int_{\xi_a = -\text{Im}\frac{x_a + y_a}{2}} \omega) \quad dy_b d\xi_b$$

où

$$\omega = e^{i\lambda(x_a - y_a)\cdot\xi_a} p\left(\frac{x_a + y_a}{2} + i\xi_a, x_b; \lambda\xi + i\lambda\psi'\left(\frac{x_a + \varphi_a}{2} + i\xi_a, x_b\right)\right) \cdot$$

$$. \; Tv(y_a, y_b) dy_a \wedge d\xi_a \; .$$

Les intégrales ci-dessus étant à prendre dans le sens oscillant.

Etape 2 : la localisation.

C'est le point clef de la preuve des théorèmes A et B.

Proposition 3.3.— *(Cas du théorème B).*

Il existe $d > 0$, *il existe* $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{C}^{2n_a}), \chi = 1$ *si* $|x_a| + |\xi_a| \leq 20d$, $\chi = 0$ *si* $|x_a| + |\xi_a| \geq 30d$ *tels que si l'on pose pour* $\eta > 0$

$$\widetilde{Q}Tv(x_a, x_b) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int\int e^{i\lambda(x_b - y_b)\cdot\xi_b} (\int\int_{\xi_a = -(1+\eta)\text{Im}\frac{x_a + y_a}{2}} \chi(\frac{x_a + y_a}{2}, \xi_a)\omega) \, dy_b d\xi_b$$

on a

$$\widetilde{P}_\lambda Tv = \widetilde{Q}_\lambda Tv + \widetilde{R}Tv + \tilde{g}_\lambda$$

$$||e^{-\lambda(1+\eta)\Phi}\widetilde{R}_\lambda Tv||_{L^2(\mathbb{C}^{n_a}\times\mathbb{R}^{n_b})} \leq \frac{C_N}{\lambda^N}||e^{-\lambda(1+\eta)\Phi}Tv||_{L^2(\mathbb{C}^{n_a},H^m(\mathbb{R}^{n_b}))}$$

$$||e^{-\lambda(1+\eta)\Phi}\tilde{g}||_{L^2(\mathbb{C}^{n_a}\times\mathbb{R}^{n_b})} \leq Ce^{-\lambda\sigma}||v||_{L^2(\mathbb{R}^{n_a},H^m(\mathbb{R}^{n_b}))}$$

où σ dépend de d et η.

Dans le cas du théorème A, grâce à l'hypothèse (H.3) on peut remplacer, dans la proposition ci-dessus, H^m par H^{m-1}.

La preuve de la proposition 3.3 est assez longue ; elle utilise plusieurs changements de contour dans le complexe, tout d'abord pour passer de la variété $\{(x_a,\xi_a) : \xi_a = -\mathrm{Im}\ \frac{x_a+y_a}{2}\}$ à $\{(x_a,\xi_a) : \xi_a = -\mathrm{Im}\ \frac{x_a+y_a}{2}, |Re\, y_a| \leq 2d, |\mathrm{Im}\ y_a| \leq 2d, |Re(x_a - y_a)| \leq d,\ |\mathrm{Im}\ (x_a - y_a)| \leq d\}$ puis à $\{(x_a,\xi_a) : \xi_a = -(1+\eta)\ \mathrm{Im}\ \frac{x_a+y_a}{2}\}$. La contrainte étant de rester constamment dans la zone d'holomorphie des coefficients de p afin qu'en utilisant le théorème de Stokes, la forme ω reste inchangée.

Etape 3 : retour vers le réel.

Le retour vers le réel se fait à l'aide de la transformation de FBI T_η^* où

$$T_\eta v(x_a,x_b) = \widetilde{K}(\lambda)\int e^{-\frac{\lambda}{2}(1+\eta)(x_a-y_a)^2}v(y_a,x_b)dy_a\ .$$

Il existe Q_λ opérateur pseudo-différentiel en $x_a \in \mathbb{R}^{n_a}$, différentiel en $x_b \in \mathbb{R}^{n_b}$ tel que $\widetilde{Q}_\lambda Tv = T_\eta Q_\lambda w$ où $w = T_\eta^* Tv$.

Il est facile de voir que, dans le cas du théorème B le symbole de Weyl semi-classique de Q_λ est

$$\sigma^w_{sc}(Q_\lambda) = \chi\Big(x_a - \frac{i}{1+\eta}\xi_a,\xi_a\Big)p\Big(x_a - \frac{i\eta}{1+\eta}\xi_a, x_b; \lambda\xi + i\lambda\psi'\Big(x_a - \frac{i\eta}{1+\eta}\xi_a, x_b\Big)\Big)\ .$$

Dans le cas du théorème A on a

$$\sigma^w_{sc}(Q_\lambda) = p'_m(x_b,\lambda\xi_b) + \chi\Big(x_a - \frac{i}{1+\eta}\xi_a,\xi_a\Big)p''\Big(x_a + \frac{i\eta}{1+\eta}\xi_a, x_b,\xi_a,\xi_b,\lambda\Big)$$

où p'_m est un symbole différentiel de degré m en ξ_b et p'' est de degré $\leq m-1$ en ξ_b.

Etape 4 : les estimations de Carleman.

Le résultat principal de cette étape est le suivant.

Théorème 3.4.—

Soit $\widetilde{P}_\lambda$ l'opérateur défini dans la proposition 3.2. Il existe des constantes positives $C_1, C_2, \lambda_0, \epsilon_0, \eta_0, \sigma$ telles que pour $v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, avec supp $v \subset \{x : |x| \leq \epsilon_0\}$ et tous $\lambda \geq \lambda_0, 0 < \eta \leq \eta_0$ on ait

$$(3.5) \qquad ||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\phi}(\mathbb{C}^{n_a};H^m_\lambda(\mathbb{R}^{n_b}))} \leq C_1\lambda||\widetilde{P}_\lambda Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\phi}} + C_2 e^{-\lambda\sigma} \qquad (Th.\ B)$$

$$(3.6) \qquad \lambda||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C}^{n_a};H^{m-1}_\lambda(\mathbb{R}^{n_b}))} \leq C_1||\widetilde{P}_\lambda Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} + C_2 e^{-\lambda\sigma} \qquad (Th.\ A)$$

où $H^m_\lambda(\mathbb{R}^{n_b}) = \{v \in L^2 : (\lambda^2 + |\xi_b|^2)^{\frac{m}{2}}\widehat{v} \in L^2(\mathbb{R}^{n_b})\}$ et $L^2_{(1+\eta)\Phi}$ siginifie que l'on a mis la mesure $e^{-\lambda(1+\eta)\Phi}L(dz_a)$ sur $\mathbb{C}^{n_a}$.

Esquisse des preuves des inégalités.

Commençons par celle relative au Th. B. Remarquons tout d'abord qu'il suffit, d'après la proposition 3.3 de prouver (3.5), (3.6) avec $\widetilde{Q}_\lambda$ à la place de $\widetilde{P}_\lambda$. Ensuite on a $||\widetilde{Q}_\lambda Tv||_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} = ||Q_\lambda w||_{L^2(\mathbb{R}^n)}$ et $||Tv||_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C}^{n_a};H^m(\mathbb{R}^{n_b}))} = ||w||_{L^2(\mathbb{R}^{n_a},H^m(\mathbb{R}^{n_b}))}$.

La preuve de l'inégalité nécessite quelques lemmes. Le symbole de Q_λ s'écrit $\lambda^m q_m(x,\xi) + \lambda^{m-1}q_{m-1} + \cdots$.

Lemme 3.5.—

Sous les conditions du théorème B il existe des constantes positives $\eta_0, \epsilon, C_1 C_2$ telles que pour $0 < \eta \leq \eta_0$ et $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ tel que $|x| + |\xi_a| \leq \epsilon$ on ait

$$|q_m(x,\xi)| \geq C_1 < \xi_b >^m \ \text{ si } |\xi_b| \geq C_2$$

$$q_m(0;(0,\xi_b)) = 0 \Rightarrow \frac{1}{i}\{\bar{q}_m(x,\xi), q_m(x,\xi)\}_{\substack{x=0 \\ \xi=(0,\xi_b)}} > 0$$

Lemme 3.6.—

Sous les conditions du lemme 3.5 il existe des constantes A, δ, ϵ_0 positives telles que pour (x,ξ) dans $\mathbb{R}^{2n}$ tels que $|x| + |\xi_a| \leq \epsilon_0$ on a

$$A|q_m(x,\xi)|^2 + \frac{1}{i}\{\bar{q}_m, q_m\}(x,\xi) \geq \delta < \xi_b >^{2m} \quad .$$

Preuve. Par l'absurde en utilisant le lemme 3.5.

Lemme 3.7.—

Soit $Q = Op_\lambda^w(q_m)$. *Il existe des constantes* C_0, C_1, λ_0 *telles que pour tout* $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ *et* $\lambda \geq \lambda_0$ *on ait*

$$\frac{C_1}{\lambda}(Op_\lambda^w((1-\theta) < \xi_b >^{2m})u, u)_{L^2(\mathbb{R}^n)} + ||Qu||^2_{L^2(\mathbb{R}^n)} \geq \frac{C_0}{\lambda}||u||^2_{L^2(\mathbb{R}^{n_a}, H^m_{sc}(\mathbb{R}^{n_b}))}$$

où $\theta(x, \xi_a) \in C_0^\infty, \theta = 1$ *si* $|x| + |\xi_a| \leq \epsilon_1, \theta = 0$ *si* $|x| + |\xi_a| \geq \epsilon_0$ *et* $H^m_{sc}(\mathbb{R}^{n_b}) = \{u \in L^2 : (1 + \frac{|\xi_b|^2}{\lambda^2})^{\frac{m}{2}} \hat{u} \in L^2(\mathbb{R}^{n_b})\}$.

Preuve. On utilise le lemme 3.6 ainsi qu'un inégalité de Gårding "elliptique" dans la classe de Hörmander $S(m, g)$ où $m =< \xi_b >^{2m}$ et $g = dx^2 + d\xi_a^2 + \frac{d\xi_b^2}{<\xi_b>^2}$.

Fin de la preuve de l'inégalité (3.5).

Elle consiste seulement à montrer que si $u = T_\eta^* Tv \in \rho(\mathbb{R}^n)$, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$(3.8) \qquad |(Op_\lambda^w((1-\theta) < \xi_b >^{2m})u, u)_{L^2}| \leq \frac{C_N}{\lambda^N}||Tv||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}(\mathbb{C}^{n_a}, H^m)} + O(e^{-\lambda\sigma}) \ .$$

Ceci se démontre en passant dans le complexe et en utilisant des déformations de contour pour montrer que, modulo des termes d'erreurs qui sont majorés par le membre de droite de (3.8), le membre de gauche est nul.

La preuve de l'inégalité (3.6) correspondant au théorème A est plus difficile car, au lieu d'utiliser une inégalité de Gårding "elliptique" comme ci-dessus on doit avoir recours à une inégalité de Fefferman-Phong dans les classes $S(m, g)$ ci-dessus ; la difficulté essentielle étant que pour celles-ci on a $h = 1$ alors que l'opérateur à considérer est dans $S(< \xi_b >^2, g)$. On doit alors avoir recours à une délicate procédure de localisation qui engendre des erreurs dont on montre qu'elles sont contrôlables.

Etape 5 : preuve de l'unicité.

De l'égalité $\widetilde{P}_\lambda Tv = Tf$, avec supp $f \subset \{x : -\epsilon \leq \psi(x) \leq -\frac{\epsilon}{2}\}$, et du théorème 3.4 on déduit qu'il existe $\delta > 0$ tel que

$$(3.9) \qquad ||T(e^{\lambda\rho\psi}u_1)||^2_{L^2_{(1+\eta)\Phi}} = O(e^{-\lambda\delta}) \ .$$

(Ici ρ est un petit paramètre positif).

Soit $N = (N_a, N_b)$ la normale à l'origine à la surface S. Dans la suite on doit distinguer deux cas géométriques.

Cas 1 : $N_a = 0$.

C'est le plus simple ; cela est dû au fait suivant. On a

$$\psi(y_a, x_b) = \psi(x_a, x_b) + (N_a + Ax_a + Bx_b)(y_a - x_a) + \frac{1}{2}A(y_a - x_a)^2 \tag{3.10}$$

où $A = \psi''_{aa}, B = \psi''_{ab}$. On a alors $T(e^{\lambda\rho\psi}u_1)(x_a, x_b) = e^{\lambda\rho\chi(x_a,x_b)}S_\lambda u_1(x_a, x_b)$ où $\chi(0,0) = 0$ et S_λ est une autre FBI encore centrée en zéro, de sorte qu'en restreignant le domaine, en utilisant (3.9), le lemme de Fatou on montre, en faisant tendre λ vers $+\infty$ que $u_1 \equiv 0$ près de zéro.

Cas 2 : $N_a \neq 0$.

La présence de N_a dans le 2^e membre de (3.10) fait que l'estimation (3.9), par le même argument que ci-dessus conduit à une information au voisinage du point ρN_a (là où u, est déjà nulle). On est alors conduits à utiliser un argument (utilisé par Kashiwara dans sa preuve du th. de Holmgren par le lemme de water-melon) basé sur le principe du maximum (voir aussi [S1]). On revoie à [RoZ] pour les détails.

C. ZUILY
Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bâtiment 425
91405 ORSAY CEDEX

Bibliographie

[AB] S. Alinhac-M.S. Baouendi : *A non uniqueness result for operators of principal type*, Math. Z. **220** (1995), 561-568.

[H1] L. Hörmander : *The analysis of linear partial differential operators III, IV*, Springer Verlag.

[H2] L. Hörmander : *Quadratic hyperbolic operators*, Springer Lecture Notes Math. **1495** (1991), 118-160.

[H3] L. Hörmander : *A uniqueness theorem for second order hyperbolic differential equations*, Comm on P.D.E. **17** (1982), 699-714.

[H4] L. Hörmander : *On the uniqueness of the Cauchy problem under partial analyticity assumptions*, Preprint (1996).

L1] N. Lerner : *Unicité de Cauchy pour des opérateurs faiblement principalement normaux*, J. Math. Pures Appl. **64** (1985), 1-11.

L2] N. Lerner : *Uniqueness for an ill-posed problem*, Journal of Diff. Equations **71** (1988), 255-260.

[Li] J.-L. Lions : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation des systèmes distribués*, Masson, Collection RMA, Paris (1988).

[RT] J. Rauch-M. Taylor : *Penetrations in shadow regions and unique continuation properties in hyperbolic mixed problems*, Indiana Univ. Math. J. **22** (1972), 277-285.

[R] L. Robbiano : *Théorème d'unicité adapté au contrôle des solutions des problèmes hyperboliques*, Comm. on P.D.E. **16** (1991), 789-800.

[RoZ] L. Robbiano-C. Zuily : *Uniqueness in the Cauchy problem for operators with partially holomorphic coefficients*, Prépublications Univ. Paris-Sud 96-37.

[S1] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95** (1982).

[S2] J. Sjöstrand : *Fonction spaces associated to global I-Lagrangian manifolds*, Prépublication n° 1111, Ecole Polytechnique (1995).

[T] D. Tataru : *Unique continuation for solutions to PDE's : between Hörmander's theorem and Holmgren's theorem*, Comm. on P.D.E. **20** (1995), 855-884.

[Z] C. Zuily : *Lectures on uniqueness and non uniqueness in the Cauchy problem*, Progress in math. **33**, Birkhäuser, (1983).