SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

J. GINIBRE

G. VELO

Le problème de Cauchy dans des espaces locaux pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 12, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996____A12_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LE PROBLEME DE CAUCHY DANS DES ESPACES LOCAUX POUR L'EQUATION DE GINZBURG-LANDAU COMPLEXE

J. GINIBRE et G. VELO

Exposé n° XII

19 Mars 1996

1 Introduction

On s'intéresse au problème de Cauchy pour l'équation de Ginzburg-Landau complexe (GLC)

$$\partial_t u = \gamma u + (a + i\alpha)\Delta u - (b + i\beta)f(u) \tag{1.1}$$

où u est une fonction complexe définie dans l'espace temps $\mathbb{R}^{n+1}$ ou $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^+$, $a, b, \alpha, \beta, \gamma$ sont des paramètres réels avec $a > 0, b > 0, \gamma \geq 0$, et f est un terme d'interaction non linéaire qu'on prendra de la forme invariante de jauge $f(u) = ug(|u|^2)$ avec $g \geq 0$ et plus spécifiquement $g(\rho) = \rho^\sigma$ dans l'énoncé des résultats. L'équation (1.1) interpole entre l'équation de Schrödinger non linéaire (SNL) obtenue pour $\gamma = a = b = 0$ et une équation de la chaleur non linéaire (CNL) avec non linéarité dissipative, obtenue pour $\alpha = \beta = 0$. Des équations du type (1.1) sont abondamment utilisées en hydrodynamique hors d'équilibre pour décrire la formation de structures spatiales (rouleaux ou cellules de convection) et l'apparition d'instabilités. On renvoie à [CH] pour une revue de ces problèmes. Une partie importante de l'activité des utilisateurs est consacrée à l'étude de la stabilité linéaire de solutions particulières de ces équations. Par exemple l'équation (1.1) avec $a = 1$, $b = 1$ et $g(\rho) = \rho^\sigma$ admet des solutions de type onde plane

$$u(x,t) = (\gamma - k^2)^{1/2\sigma} \exp[ikx - i(\beta\gamma + (\alpha - \beta)k^2)t] \tag{1.2}$$

pour $k^2 < \gamma$, et leur stabilité a été extensivement étudiée.

Dans l'étude du problème de Cauchy, la propriété la plus importante de la non linéarité f est son comportement quand $|u| \to \infty$, pour lequel on prendra la forme indiquée ci-dessus. Pour modéliser les situations physiques intéressantes, les utilisateurs sont amenés à introduire des termes de degré inférieur en u, éventuellement non invariants de jauge, qui jouent un rôle prépondérant pour des valeurs intermédiaires de $|u|$. Ces termes ne jouent pas de rôle essentiel pour le problème de Cauchy. Dans l'équation (1.1), on en garde seulement la forme la plus rudimentaire, à savoir le terme en γu, à seule fin de contrebalancer l'effet dissipatif des termes Δu et $f(u)$ et de traiter ainsi une situation où les solutions ne sont pas petites et ne tendent pas vers zéro à l'infini en temps (voir par exemple (1.2)).

L'équation (1.1), avec $a > 0$, $b > 0$, et $g > 0$, est très dissipative, beaucoup plus régulière que l'équation SNL et presque aussi régulière que l'équation

CNL, sauf dans le cas (intéressant) où les termes dissipatifs en a et b entrent en conflit avec une situation explosive pour l'équation SNL sous jacente, c'est à dire pour $\alpha\beta < 0$ et $\sigma > 2/n$. On saura donc sans peine lui appliquer le traitement usuel du problème de Cauchy pour SNL et obtenir des résultats au moins aussi forts. Une question plus intéressante est de savoir si on peut obtenir des résultats qu'on ne sait pas obtenir pour SNL. Parmi de tels résultats figure le traitement du problème de Cauchy dans des espaces locaux, qui fait l'objet du présent exposé.

On se limite à des espaces (globaux) très simples $L^r \equiv L^r(\mathbb{R}^n)$ et $H^\mu \equiv H^\mu(\mathbb{R}^n)$ avec μ entier. Les espaces locaux associés sont définis par

$$X_{\text{loc}} = \{u : u \in X(B(x,R)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n \text{ et } \forall R > 0\} \tag{1.3}$$

où X est L^r ou H^μ, et $B(x,R)$ est la boule de centre x et de rayon R dans $\mathbb{R}^n$. On considèrera aussi les espaces locaux uniformes

$$X_{\text{loc.un.}} = \{u : u \in X_{\text{loc}} \text{ et } \|u; X_{\text{loc.un.}}\| = \sup_x \|u; X(B(x,1))\| < \infty\} \tag{1.4}$$

qui sont des espaces de Banach avec la norme indiquée. Les espaces X_{loc} et surtout $X_{\text{loc.un.}}$ sont les espaces naturels pour décrire les systèmes étendus et spatialement homogènes et les situations où on s'intéresse à des structures locales dont la taille est petite par rapport à celle des systèmes considérés. Ils sont également appropriés pour les analyses en ondes planes.

La possibilité de traiter le problème de Cauchy dans des espaces locaux résulte de deux propriétés qui permettent d'étendre à ce cas respectivement les méthodes de contraction et les méthodes de compacité.

(1) Les méthodes de contraction sont basées sur l'équation intégrale

$$u(t) = U(t)u_0 - (b + i\beta) \int_0^t dt' U(t-t') f(u(t')) \tag{1.5}$$

où U est le semi groupe engendré par la partie linéaire de l'équation

$$U(t) = \exp(\gamma t + (a + i\alpha)t\Delta) = S_t *_x, \tag{1.6}$$

$$S_t(x) = (4\pi(a+i\alpha)t)^{-n/2} \exp(\gamma t - x^2/4(a+i\alpha)t). \tag{1.7}$$

Le propagateur S_t est à décroissance gaussienne et a fortiori intégrable en x. Les méthodes de contraction utilisent en général des espaces X et X'

tels que la nonlinéarité f envoie X dans X' et le semigroupe U envoie X' dans X, ce qui permet de mettre sur pied un schéma de contraction dans X. Avec S_t intégrable à l'infini en x, les majorations de ce type entre espaces globaux s'étendent facilement aux espaces locaux uniformes, et les méthodes de contraction s'étendent donc à ce cadre. L'hypothèse essentielle requise sur la nonlinéarité f est d'être sous critique au sens suivant (défini dans le cas d'une seule puissance $f(u) = u|u|^{2\sigma}$)

Définition 1.1. σ est critique (sous-, sur-) au niveau de L^r si $n\sigma = r(< r, > r)$ et au niveau de H^μ si $(n - 2\mu)\sigma = 2(< 2, > 2)$.

(Cette définition reflète un simple comptage de puissances et est la même que pour l'équation SNL).

Les méthodes de contraction fournissent alors, pour des données initiales dans des espaces $X_{\text{loc.un.}}$, l'existence locale en temps et l'unicité de solutions du problème de Cauchy dans des espaces du même type.

(2) Les méthodes de compacité utilisent comme matière première des estimations d'énergie (généralisées). Par exemple, pour l'équation linéaire

$$\partial_t u = (1 + i\alpha)\Delta u$$

on obtient pour toute dérivée multiple d'espace ∂^λ

$$\partial_t \|\partial^\lambda u\|_2^2 = -2\|\nabla\partial^\lambda u\|_2^2$$

et par suite

$$\|\partial^\lambda u(t)\|_2^2 + 2\int_0^t dt' \|\nabla\partial^\lambda u(t')\|_2^2 = \|\partial^\lambda u_0\|_2^2$$

si bien qu'une donnée initiale $u_0 \in H^\mu$ engendre une solution u estimée a priori dans $L^\infty(\mathbb{R}^+, H^\mu) \cap L^2(\mathbb{R}^+, H^{\mu+1})$. Le point remarquable, mis en évidence par Collet [C], est que pour l'équation CGL, grâce au terme dissipatif non linéaire, ces estimations a priori peuvent être localisées : pour $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, φ à support compact, on peut estimer a priori φu dans $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1)$ en terme de $\|\tilde{\varphi} u_0\|_2$ pour $\tilde{\varphi} = \varphi$, ou plus confortablement, pour $\tilde{\varphi} = 1$ sur Supp φ. Le même phénomène se produit pour des espaces $X = L^r(r > 2)$ et H^μ. Ces estimations permettent d'une part de montrer que les solutions locales en temps dans les espaces locaux uniformes peuvent être globalisées en temps, et d'autre part d'étendre les méthodes usuelles de compacité et de démontrer l'existence globale en temps de solutions dans les espaces X_{loc} pour des données initiales dans des espaces du même type, aucune uniformité en x n'étant requise dans ce cas. Comme d'habitude, les estimations a priori requièrent des conditions de positivité sur les paramètres de l'équation, du type $a > 0, b > 0, g > 0$, α et β pas trop grands, etc.

En combinant les deux méthodes, on peut enfin obtenir l'existence et l'unicité de solutions globales en temps dans des espaces locaux uniformes, pour des données initiales dans des espaces du même type, selon le schéma suivant.

Conditions de positivité	Souscriticité, Estimations de U dans $X_{\text{loc.un.}}$
$\downarrow$	
Estimations d'énergie localisées	
$\downarrow$	
Méthodes de compacité	Méthodes de contraction
$\downarrow$	$\downarrow$
Existence de solutions globales dans X_{loc} pour des données dans X_{loc}	Existence locale et unicité de solutions dans $X_{\text{loc.un.}}$ pour des données dans $X_{\text{loc.un.}}$

$\downarrow$

Existence et unicité de solutions globales en temps dans $X_{\text{loc.un.}}$ pour des données dans $X_{\text{loc.un.}}$

Dans le cas où l'espace global sous jacent est L^2, les estimations a priori localisées permettent en outre de démontrer un résultat de non propagation qui entraîne l'unicité des solutions avec données initiales dans L^2_{loc} sans restriction ou avec des restrictions très faibles de croissance à l'infini, résultat qui échappe totalement aux méthodes usuelles de contraction.

Dans la suite de l'exposé, on présentera les principaux résultats de trois théories qui suivent le schéma précédent, correspondant aux espaces globaux L^2, L^r pour $r > 2$ et H^1, ainsi que le résultat d'unicité cité plus haut. Dans chaque cas, on donnera d'abord les résultats des méthodes de compacité, puis en complément l'information additionnelle venant des méthodes de contraction, et on indiquera brièvement quelques points saillants des démonstrations. Pour simplifier l'exposé, on se limite au cas où le terme non linéaire est de la forme $f(u) = u|u|^{2\sigma}$. D'autre part, on fixe désormais $a = b = 1$. L'équation (1.1) prend alors la forme usuelle

$$\partial_t u = \gamma u + (1 + i\alpha)\Delta u - (1 + i\beta)|u|^{2\sigma} u \tag{1.8}$$

L'extension des résultats à des non linéarités plus générales avec des hypothèses de type usuel s'effectue sans difficulté.

Pour formuler les résultats, on a besoin de préciser la définition et les notations utilisées pour les espaces locaux uniformes. Dans ce but, on considère un recouvrement $\mathbb{R}^n = \cup_j Q_j$ où les Q_j sont les translatés par $j \in \mathbb{Z}^n$ de Q_0. Pour les espaces locaux uniformes associés à $X = L^r$, Q_0 pourra être le cube unité centré en 0. Pour $X = H^\mu$, on prend un recouvrement par des ouverts à frontière lisse. On note χ_j la fonction caractéristique de Q_j. Pour $X = L^r$ ou H^μ, l'espace $X_{\text{loc.un.}}$ est noté de façon naturelle $\ell^\infty(X)$ avec la norme (équivalente à (1.4))

$$\|u; \ell^\infty(X)\| = \sup_j \|\chi_j u \ ; \ X(Q_j)\| \ . \tag{1.9}$$

Pour les fonctions de l'espace et du temps, l'espace global sous jacent est du type $X = \mathcal{C}(I, L^r)$ éventuellement pondéré en temps, ou $L^q(I, L^r)$ ou $L^q(I, H^\mu)$, I étant un intervalle de temps. Pour définir l'espace local uniforme associé, on définit encore la suite de fonctions $\chi_j u$, considérée comme fonction des trois variables j, x, t et on teste ces trois variables dans les espaces appropriés, par exemple ℓ^∞, L^r et L^q. L'espace obtenu dépend alors de l'ordre dans lequel on teste ces trois variables : par exemple

$$L^q(I, \ell^\infty(L^r)) \subset \ell^\infty(L^q(I, L^r)) \tag{1.10}$$

l'inclusion étant stricte pour $q < \infty$, et on doit choisir entre les deux membres de (1.10). Dans le problème présent, l'espace adapté est celui de droite, car c'est dans cet espace et non dans celui de gauche qu'on démontre les estimations a priori. Les résultats qui suivent seront donc formulés au moyen d'espaces de ce type.

Un problème particulier se pose pour la méthode de contraction dans le cas critique (voir Définition 1.1). On effectue une résolution locale par contraction dans un intervalle I et on obtient un facteur de contraction (c'est à dire assez petit) en prenant I assez petit. Dans le cas sous critique, ce facteur contient une puissance positive $|I|^\theta$ de la longueur de I, ce qui résoud le problème. Dans le cas critique, on a $\theta = 0$ (c'est en fait la définition du cas critique) et la petitesse ne peut venir que de celle des fonctions considérées : un résultat de contraction dans le cas critique est toujours un résultat de données petites. Si l'espace de résolution est du type $L^q(I, L^r)$ avec par exemple $I = [0, T]$, la petitesse vient du fait que si $u \in L^q(I, L^r)$ pour un $T > 0$, alors $\|u; L^q([0,T], L^r)\| \to 0$ quand $T \to 0$ (pour $q < \infty$). Malheureusement la propriété correspondante est fausse dans les espaces locaux. Par exemple la fonction

$$u = \sum_{j \neq 0} |j|^{1/q} \chi(0 \le t \le |j|^{-1}) \chi_j$$

satisfait

$$\|u \ ; \ \ell^\infty(L^q([0,T], L^\infty))\| = 1 \quad \forall T > 0 \ .$$

On résoud ce problème dans le cas critique en remplaçant l'espace $\ell^\infty(X)$ par le sous espace fermé

$$\ell_0^\infty(X) = \{u : u \in \ell^\infty(X) \text{ et } \|\chi_j u; X(Q_j)\| \to 0 \text{ quand } |j| \to \infty\} \ .$$

On vérifie facilement que

$$u \in \ell_0^\infty(L^q(I, L^r)) \Rightarrow \|u; \ell^\infty(L^q([t_0, t_0 + T], L^r))\| \to 0 \ , T \to 0 \ ,$$

pour tout t_0 intérieur à I. Les résultats qui suivent comprendront donc toujours la restriction à ℓ_0^∞ pour les propriétés venant de la méthode de contraction dans les cas critiques.

On conclut cette introduction en donnant quelques références. Le problème de Cauchy pour l'équation GLC sur le tore a été étudié dans [DGL] [LO]. Voir aussi [GH]. Ces articles contiennent en particulier l'essentiel des estimations a priori dans les espaces globaux. La localisation des estimations, dans son principe et dans un certain nombre de cas, vient de [C]. Les méthodes de contraction ont été développées pour l'équation CNL dans les espaces globaux dans [G] [W1] [W2] et pour l'équation GLC dans les espaces locaux uniformes pour un certain nombre de cas particuliers dans [MS] [S]. Le présent exposé s'appuie sur [GV1] [GV2].

2 Le problème de Cauchy dans L^2_{loc}.

Les principaux résultats sont contenus dans la proposition suivante.

Proposition 2.1

(1) Soit $u_0 \in L^2_{\mathrm{loc}}$. Alors l'équation GLC (1.8) avec donnée initiale $u(0) = u_0$ admet une solution

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, L^2_{\mathrm{loc}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\mathrm{loc}}) \cap L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2}_{\mathrm{loc}}) \ . \tag{2.1}$$

De plus, pour tout $t_0 > 0$, u satisfait une estimation

$$\|u; \ell^\infty(L^\infty([t_0, \infty), L^2))\| \leq R(t_0) \tag{2.2}$$

pour un $R(t_0)$ décroissant en t_0 et indépendant de u_0. En particulier il existe une boule de $\ell^\infty(L^2)$ absorbante pour toutes les solutions ainsi obtenues.

(2) On suppose $n\sigma \leq 2, u_0 \in \ell^\infty(L^2)$, et si $n\sigma = 2, u_0 \in \ell^\infty_0(L^2)$.

Alors la solution u est unique et satisfait

$$u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, L^2)) \cap \ell^\infty_{(0)}(L^2(\mathbb{R}^+, H^1)) \ . \tag{2.3}$$

En outre u est unique dans $\ell^\infty_{(0)}(L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^r))$ pour q et r satisfaisant

$$\begin{aligned} & r \geq 2\sigma + 1 \ , \ q > 2\sigma + 1, \\ & 0 \leq 2/q = n/2 - n/r \leq 1, \\ & r > 2 \ si \ n\sigma = 2 \ , \ r < \infty \ si \ n = 2 \ . \end{aligned}$$

En outre $u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}((0, \infty), L^\infty))$.

Commentaires et éléments de preuve

La partie (1) est le produit des méthodes de compacité et le point crucial de la preuve est la localisation de l'estimation a priori dans L^2, dont le mécanisme est le suivant. On prend $\gamma = 0$ pour simplifier. Soit $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+), 0 \leq \varphi \leq 1$, qu'on pensera comme la fonction caractéristique lissée d'une boite. En formant $2Re < \varphi u, \varphi Eq(1.8) >$ on obtient

$$\partial_t \|\varphi u\|_2^2 = -2\|\varphi \nabla u\|_2^2 - 4Re(1+i\alpha) < \varphi \nabla u, u \nabla \varphi > -2 \int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2} \tag{2.4}$$

et par l'inégalité de Schwarz

$$\partial_t \|\varphi u\|_2^2 \leq 2(1+\alpha^2)\|u\nabla\varphi\|_2^2 - 2\int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2} \ . \tag{2.5}$$

Le problème est que $\nabla\varphi$ s'annule moins vite que φ là où φ s'annule, et que $\|u\nabla\varphi\|_2$ n'est donc pas estimé par $\|\varphi u\|_2$. Le secours vient du terme dissipatif non linéaire par l'inégalité de Hölder

$$\|u\nabla\varphi\|_2^2 \leq \underbrace{\left\{\int \varphi^{-2/\sigma}|\nabla\varphi|^{2+2/\sigma}\right\}^{\sigma/(\sigma+1)}}_{\equiv C<\infty} \underbrace{\left\{\int \varphi^2 |u|^{2\sigma+2}\right\}^{1/(\sigma+1)}}_{\equiv z} \tag{2.6}$$

où la constante C est finie si φ est assez lisse aux points où elle s'annule. Par exemple si $\varphi(x) \sim (R-|x|)^m$ pour $|x| \lesssim R$, il suffit que $m > 1/2 + 1/\sigma$. De même on obtient

$$y \equiv \|\varphi u\|_2^2 \leq \left\{\int \varphi^2\right\}^{\sigma/(\sigma+1)} z \equiv C_1 z \ . \tag{2.7}$$

Supposant $C_1 = 1$ pour simplifier, on obtient pour y et z le système

$$y \leq z \ , \ \partial_t y \leq 2Cz - 2z^{1+\sigma} \equiv M(z) \tag{2.8}$$

avec $M(z)$ croissante pour $z \leq \eta_0$ puis décroissante, positive pour $z \leq \eta$ puis négative et tendant vers $-\infty$ pour $z \to \infty$ (voir figure 1).

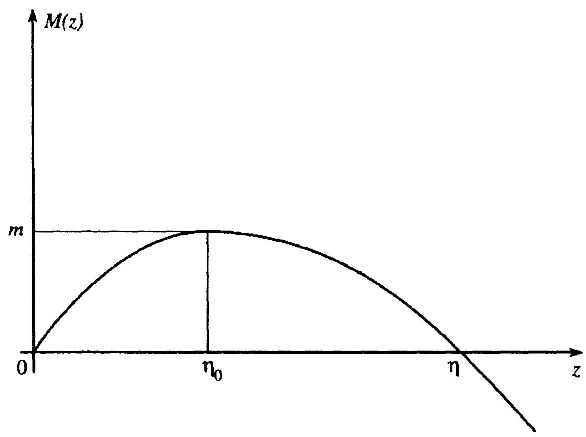

Fig 1. Pour l'équation (2.8)

Par suite, y satisfait

$$\begin{cases} \partial_t y \le m \equiv M(\eta_0) \quad \text{si } y \le \eta_0 , \\ \partial_t y \le M(y) = 2Cy - 2y^{1+\sigma} \text{ si } (z \ge) y \ge \eta_0 \ . \end{cases} \tag{2.9}$$

La dernière s'intègre à vue et donne pour $y_0 = y(0) \ge \eta_0$

$$y(t) \le y_0 \{ e^{-2C\sigma t} + (y_0/\eta)^\sigma (1 - e^{-2C\sigma t}) \}^{-1/\sigma} \tag{2.10}$$

$$\le \eta \{ 1 - e^{-2C\sigma t} \}^{-1/\sigma} \ . \tag{2.11}$$

En particulier la norme L^2 locale $y(t)$ est estimée a priori par une majorante qui tend exponentiellement vers une limite η indépendante de u_0, et est en outre estimée indépendamment de u_0 pour tout $t > 0$.

Le mécanisme de localisation de l'estimation L^2 décrit ci-dessus dépend du comportement de la nonlinéarité $f(u) = ug(|u|^2)$ pour $|u|$ grand, par l'intermédiaire de l'inégalité de Hölder (2.6) dans le cas d'une puissance $g(\rho) = \rho^\sigma$ et on peut se demander quelle est la croissance minimale de g qui assure le résultat. On peut montrer que la condition $g(\rho) \ge (\text{Log}\rho)^{2+\epsilon}$ pour ρ grand est suffisante et la preuve suggère une condition optimale du type $\int^\infty \rho^{-1} g(\rho)^{-1/2} d\rho < \infty$ [GV3].

On mentionne maintenant deux éléments de la preuve de la partie (1) de la proposition qui se retrouvent mutatis mutandis dans toutes les autres théories.

D'une part la régularité, en l'occurence (2.1), contrôlée par l'identité de base, en l'occurence (2.4), est suffisante pour démontrer cette identité sous forme intégrée pour les solutions de (1.8). Cette propriété, qui reflète le caractère assez régulier de l'équation GLC (ou CNL) ne va pas de soi : par exemple la propriété correspondante est fausse pour la conservation de l'énergie pour l'équation SNL surcritique.

D'autre part, la démonstration de compacité dans les espaces locaux utilise comme solutions régularisées de départ les solutions obtenues par la méthode de compacité dans les espaces globaux correspondants : on considère une suite $\{\Lambda_i\}$ de boites croissant vers $\mathbb{R}^n$ (par exemple Λ_i est la boule de rayon 2^i) ; à $u_0 \in L^2_{\rm loc}$ on associe la suite $u_{0i} = u_{0|\Lambda_i}$ prolongée par zéro ; pour chaque i, on obtient par compacité une solution u_i dans l'espace global avec donnée initiale u_{0i}. La suite $\{u_i\}_{i>j}$ est bornée pour tout j dans

$$X_j = L^\infty([0,2^j], L^2(\Lambda_j)) \cap L^2([0,2^j], H^1(\Lambda_j)) \cap L^{2\sigma+2}([0,2^j], L^{2\sigma+2}(\Lambda_j)) \ ,$$

et on extrait par un processus diagonal une sous-suite qui converge $*$ faiblement dans X_j pour tout j. Le reste de la démonstration est standard.

La partie (2) de la proposition est le complément d'information, en particulier l'unicité, obtenu par les méthodes de contraction. La condition $n\sigma \le 2$ est la souscriticité au niveau L^2. La restriction ℓ_0^∞ est obligatoire dans le cas critique $n\sigma = 2$, facultative dans le cas souscritique $n\sigma < 2$. Elle est vraie pour la solution si elle l'est pour la donnée initiale. Noter que dans (2.3) on n'a pas répété l'information potentielle associée au troisième espace de (2.1), car elle est plus faible que l'information cinétique associée au deuxième espace de (2.1) dans le cas au plus critique $n\sigma \le 2$. La dernière propriété de la partie (2) est un résultat de régularité.

On donne maintenant le résultat d'unicité dans $L^2_{\rm loc}$ cité plus haut. On caractérise la croissance à l'infini de la donnée initiale u_0 par la quantité

$$y_R(u_0) = \| \chi(|x| \le R) u_0 \ ; \ \ell^\infty(L^2) \| \ .$$

Le résultat est le suivant.

Proposition 2.2. *On suppose*

$$|\beta| < \sqrt{2\sigma+1}/\sigma. \tag{2.12}$$

Soit $u_0 \in L^2_{\text{loc}}$ satisfaisant

$$y_R(u_0) \leq C\exp(CR^2)\ \forall R > 0 \ \textit{si}\ \sigma < 1,$$
$$y_R(u_0) \leq C\exp(\exp(CR^2))\ \forall R > 0 \ \textit{si}\ \sigma = 1.$$

Alors l'équation $GLC(1.8)$ avec donnée initiale $u(0) = u_0$ a une solution unique u satisfaisant

$$u \in L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^2_{\text{loc}}) \cap L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\text{loc}}) \cap L^{2\sigma+2}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+2}_{\text{loc}})\ . \tag{2.13}$$

Eléments de preuve. Soit u_1 et u_2 deux solutions avec la même donnée initiale $u_1(0) = u_2(0) = u_0$, dans l'espacc (2.13) et $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^+)$, φ à support compact. On estime comme dans (2.5)

$$\partial_t \|\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2 \leq 2(1+\alpha^2)\|\nabla\varphi(u_1 - u_2)\|_2^2$$
$$-2Re(b + i\beta) < \varphi(u_1 - u_2), \varphi(f(u_1) - f(u_2)) >\ . \tag{2.14}$$

La condition (2.12) assure que le dernier terme de (2.14) est ≤ 0. On prend maintenant une suite $\{\varphi_j\}$ de fonctions radiales (voir figure 2) avec

$$\varphi_j = 1 \text{ pour } |x| \leq R_{j-1}, \varphi_j = 0 \text{ pour } |x| \geq R_j\ ,\ 1 \leq j \leq k,$$

et

$$R_j = k^{-1}(jR + (k-j)R_0), R_0 < R.$$

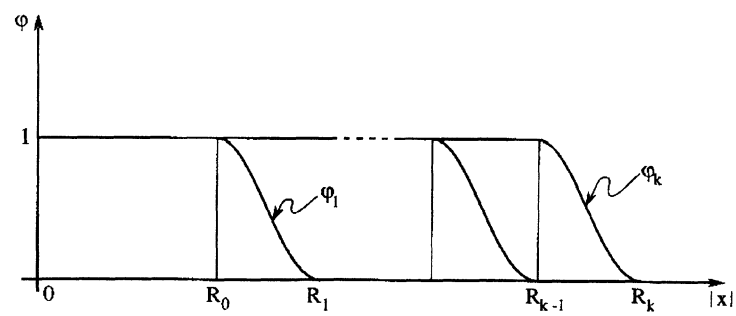

Fig 2. Localisation pour l'unité L^2_{loc}

On pose $Q_j = \|\varphi_j(u_1 - u_2)\|_2^2$. On estime par (2.14)

$$\partial_t Q_j \leq 2(1+\alpha^2)\|\nabla\varphi_1\|_\infty^2 Q_{j+1} \equiv C_k Q_{j+1}\ . \tag{2.15}$$

On intègre k fois en utilisant le fait que $Q_j(0) = 0$ pour tout j, d'où

$$Q_1(t) \le \frac{(C_k t)^k}{k!} \int_0^t dt' Q_{k+1}(t') \tag{2.16}$$

A t, R et R_0 fixés, on optimise l'estimation (2.16) en k, ce qui produit un facteur $\exp[-C(R-R_0)^2/t]$, et on estime la dernière intégrale au moyen de l'estimation L^2 locale (2.10) (2.11), ce qui conduit au résultat en prenant t assez petit et en faisant tendre R vers l'infini. Noter en particulier que pour $\sigma > 1$, l'estimation (2.11) est intégrable en t au voisinage de zéro, ce qui assure le résultat sans aucune restriction sur la croissance de u_0 pour R grand.

(3) Le problème de Cauchy dans $L^{r_0}_{\mathrm{loc}}$ pour $r_0 > 2$.

Les résultats et les méthodes de preuve de la théorie dans $L^{r_0}_{\mathrm{loc}}$ pour $r_0 > 2$ sont assez semblables à ceux de la théorie dans L^2_{loc}, mais avec des complications techniques importantes qui justifient un traitement séparé. Les principaux résultats sont contenus dans la proposition suivante.

Proposition 3.1 *Soit $r_0 = 2k + 2 > 2$. On suppose*

$$|\alpha| < \sqrt{2k+1}/k \equiv 2\sqrt{r_0 - 1}/(r_0 - 2). \tag{3.1}$$

(1) Soit $u_0 \in L^{r_0}_{\mathrm{loc}}$. Alors l'équation GLC(1.8) avec donnée initiale $u(0) = u_0$ admet une solution

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, L^{r_0}_{\mathrm{loc}}) \cap L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\mathrm{loc}}) \cap L^{2\sigma+r_0}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, L^{2\sigma+r_0}_{\mathrm{loc}}) \tag{3.2}$$

avec

$$|u|^k u \in L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1_{\mathrm{loc}}) \ . \tag{3.3}$$

De plus, pour tout $t_0 > 0$, u satisfait une estimation

$$\|u; \ell^\infty(L^\infty([t_0, \infty), L^{r_0}))\| \le R(t_0) \tag{3.4}$$

pour un $R(t_0)$ décroissant en t_0 et indépendant de u_0. En particulier il existe une boule de $\ell^\infty(L^{r_0})$ absorbante pour toutes les solutions ainsi obtenues.

(2) On suppose $n\sigma \le r_0, u_0 \in \ell^\infty(L^{r_0})$, et si $n\sigma = r_0, u_0 \in \ell^\infty_0(L^{r_0})$.

Alors la solution u est unique et satisfait

$$u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, L^{r_0})) \cap \ell^\infty_{(0)}(L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^+, H^1)) \tag{3.5}$$

et

$$|u|^k u \in \ell^\infty_{(0)}(L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, H^1)) \ . \tag{3.6}$$

En outre u est unique dans $\ell^\infty_{(0)}(L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, L^r))$ pour q et r satisfaisant

$$\begin{aligned} & r \geq 2\sigma + 1 \ , \ q > 2\sigma + 1 \ , \ r > n\sigma, n/r \geq (n-2)/r_0 \ , \\ & 0 \leq 2/q = n/r_0 - n/r \ . \end{aligned}$$

En outre $u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}((0,\infty), L^\infty))$.

Eléments de preuve. En dehors des complications techniques, les points nouveaux par rapport à la théorie dans $L^2_{\rm loc}$ sont l'apparition de la condition (3.1) et le choix des espaces (3.2) (3.3). Ces deux points apparaissent dans l'estimation a priori de la norme L^{r_0} dès le stade global. Avec $\rho = |u|^2$, on calcule $r_0 Re < \rho^k u, Eq(1.8) >$ et on obtient

$$\partial_t \int \rho^{k+1} = -r_0 \int \rho^{\sigma+k+1} + r_0 Re(1+i\alpha) < \rho^k u, \Delta u > \ . \tag{3.7}$$

Le dernier terme de (3.7) s'écrit en intégrant par parties

$$-r_0 Re(1+i\alpha) \int \{(k+1)\rho^k |\nabla u|^2 + k\rho^{k-1}(\bar{u}\nabla u)^2\} \tag{3.8}$$

et ce terme est ≤ 0 pourvu que

$$\text{Arctg } |\alpha| + \text{Arcsin } k/(k+1) \leq \pi/2 \tag{3.9}$$

qui est la forme large de (3.1). Les deux premiers termes de (3.7) contrôlent alors respectivement les normes dans $L^\infty(L^{r_0})$ et $L^{2\sigma+r_0}(L^{2\sigma+r_0})$, tandis que sous la condition stricte (3.1), le troisième terme de (3.7), i.e. (3.8), contrôle

$$\int \rho^k |\nabla u|^2 = \| |u|^k \nabla u \|_2^2 \approx \| \nabla (|u|^k u) \|_2^2$$

ce qui conduit aux espaces (3.2) (3.3).

Le mécanisme de localisation de l'estimation L^{r_0} est exactement le même que celui de l'estimation L^2 et tout le reste de la preuve est une variante plus compliquée de celle du cas L^2.

(4) Le problème de Cauchy dans $H^1_{\rm loc}$.

Les principaux résultats sont contenus dans la proposition suivante.

Proposition 4.1 *On suppose*

(i) $\alpha\beta \geq 0$ *ou*

$$(|\alpha\beta| - 1)/(|\alpha| + |\beta|) < \sqrt{2\sigma + 1}/\sigma \equiv c \tag{4.1}$$

ou

(ii) $(n-2)\sigma < 2$ *et, si* $n\sigma > 2$,

$$|\alpha| < 2\sqrt{n\sigma - 1}/(n\sigma - 2) \ . \tag{4.2}$$

(1) Soit $u_0 \in H^1_{\rm loc}$. *Alors l'équation* $GLC(1.8)$ *avec donnée initiale* $u(0) = u_0$ *admet une solution*

$$u \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, H^1_{\rm loc} \cap L^{2\sigma+2}_{\rm loc}) \cap L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, H^2_{\rm loc}) \cap L^{4\sigma+2}_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, L^{4\sigma+2}_{\rm loc}) \ . \tag{4.3}$$

De plus, pour tout $t_0 > 0$, u *satisfait une estimation*

$$\| u; \ell^\infty(L^\infty([t_0, \infty), H^1 \cap L^{2\sigma+2}))\| \leq R(t_0) \tag{4.4}$$

pour un $R(t_0)$ *décroissant en* t_0 *et indépendant de* u_0. *En particulier il existe une boule de* $\ell^\infty(H^1 \cap L^{2\sigma+2})$ *absorbante pour toutes les solutions ainsi obtenues.*

(2) On suppose $(n-2)\sigma \leq 2, u_0 \in \ell^\infty(H^1)$, *et si* $(n-2)\sigma = 2, u_0 \in \ell^\infty_0(H^1)$. *Alors la solution* u *est unique et satisfait*

$$u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}(\mathbb{R}^+, H^1)) \cap \ell^\infty_{(0)}(L^2_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, H^2)) \ . \tag{4.5}$$

En outre u *est unique dans* $\ell^\infty_{(0)}(L^q_{\rm loc}(\mathbb{R}^+, L^r))$ *pour* q *et* r *satisfaisant*

$$(n\sigma <) \max(2\sigma + 1, 2) \leq r < \infty \ , \ q = \infty \quad \textit{pour } n = 1, 2,$$

$$n\sigma < r \leq 2n/(n-2), r \geq \max(2\sigma + 1, 2), q = \infty \ ,$$

ou

$$1 < n/2 - n/r = 1 + 2/q \leq 2, q > 2\sigma + 1 \ . \quad \textit{pour } n \geq 3 \ .$$

En outre $u \in \ell^\infty_{(0)}(\mathcal{C}((0, \infty), L^\infty))$.

Commentaires et éléments de preuve.

Comme précédemment, la partie (1) est le produit des méthodes de compacité, avec pour ingrédient principal les estimations a priori qui requièrent les conditions de positivité (i) ou (ii), i.e. $\alpha\beta \geq 0$ ou α, β pas trop grands, et conduisent au choix des espaces (4.3). Les arguments généraux sont les mêmes que dans le cas L^2. La partie (2) est le complément venant des méthodes de contraction. La condition $(n-2)\sigma \leq 2$ est la sous criticité au niveau H^1. Plus encore que dans les cas précédents, les valeurs de (q, r) données pour assurer l'unicité ne sont qu'un échantillon de ce qui sort de la preuve.

On décrit maintenant brièvement les estimations a priori qui conduisent aux conditions de positivité (i) (ii) et aux espaces (4.3), sur l'exemple des espaces globaux. On prend $\gamma = 0$ pour simplifier. On définit (avec $g(\rho) = \rho^\sigma = G'(\rho)$)

$$K = \|\nabla u\|_2^2 \ , \ K_1 = \|\Delta u\|_2^2 \ , \ P = \int G(|u|^2) \ , \ P_1 = \|ug(|u|^2)\|_2^2$$

$$Z = \langle ug(|u|^2), \ \Delta u \rangle \ .$$

En calculant $2Re < \Delta u, Eq(1.8) >$ et $2Re < ug(|u|^2), Eq(1.8) >$, on obtient

$$\partial_t K = -2K_1 + 2Re(1 - i\beta)Z \ , \tag{4.6}$$

$$\partial_t P = -2P_1 + 2Re(1 + i\alpha)Z \ . \tag{4.7}$$

Pour $\alpha\beta > 0$ on en déduit

$$\partial_t(\alpha K + \beta P) = -2(\alpha K_1 + \beta P_1) + 2(\alpha + \beta)ReZ \tag{4.8}$$

qui est l'extension au cas présent de la conservation de l'énergie pour l'équation SNL. Après intégration et grâce au fait que $ReZ \leq 0$, les termes en K, P, K_1 et P_1 contrôlent respectivement les normes dans $L^\infty(H^1), L^\infty(L^{2\sigma+2}), L^2(H^2)$ et $L^{4\sigma+2}(L^{4\sigma+2})$.

Pour $\alpha\beta < 0$, on prend une combinaison convexe de (4.6) (4.7)

$$\begin{aligned} \partial_t(\lambda K + (1-\lambda)P) &= -2(\lambda K_1 + (1-\lambda)P_1) \\ &+ 2Re(1 + i(\alpha(1-\lambda) - \beta\lambda))Z \ , \end{aligned} \tag{4.9}$$

On utilise le fait que $|Z|^2 \leq K_1 P_1$ par l'inégalité de Schwarz et que

$$\mathrm{Arg}(-Z) \leq \mathrm{Arcsin}\sigma/(\sigma + 1)$$

qu'on voit facilement en intégrant par parties, (cf.(3.8)) et on optimise en $\lambda (0 < \lambda < 1)$. Le résultat est la condition (4.1) de (i).

La condition (ii) résulte d'une estimation de régularité. On estime d'abord a priori la norme L^{r_0} sous la condition (3.1), et on estime ensuite les normes de niveau H^1 en termes de celle-ci, ce qui est possible si l'interaction est sous critique au niveau L^{r_0}, et en particulier pour $r_0 = n\sigma$, valeur pour laquelle (3.1) devient (4.2). (voir figure 3)

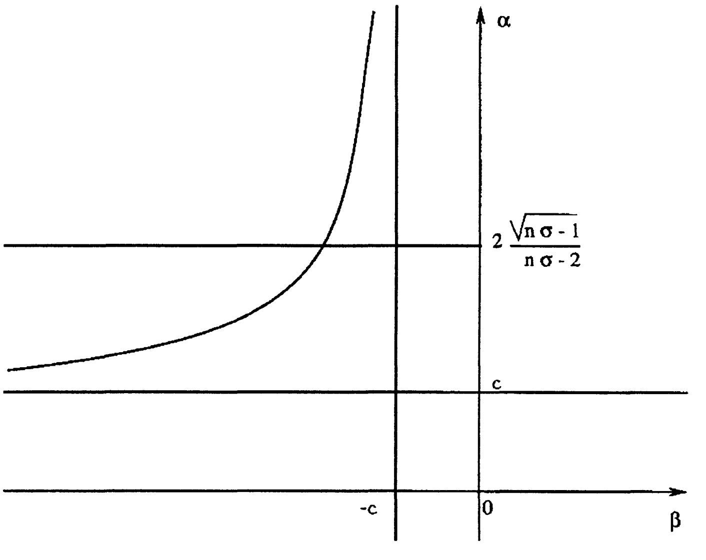

Fig 3. Conditions pour les estimations H^1

La localisation des estimations se propage sans difficulté du niveau L^2 au niveau H^1.

La proposition 4.1 laisse ouvert un problème intéressant (déjà dans les espaces globaux), qui est de savoir si l'équation GLC peut présenter des phénomènes d'explosion dans les cas non couverts par les conditions (i) (ii) et où l'équation SNL sous jacente présente de tels phénomènes, c'est à dire pour $n\sigma > 2$, $\alpha\beta < 0$, $|\alpha|$ et $|\beta|$ assez grands.

Références

[C] P. Collet : *Thermodynamic limit of the Ginzburg-Landau equation*, Nonlinearity, **7** (1994), 1175-1190.

[CH] M.C. Cross, P.C. Hohenberg : *Pattern formation outside of equilibrium*, Rev. Mod. Phys. **65** (1993), 851-1089.

[DGL] C.R. Doering, J.D. Gibbon, C.D. Levermore : *Weak and strong solutions of the complex Ginzburg-Landau equation*, Physica D **71** (1994), 285-318.

[GH] J.M. Ghidaglia, B. Héron : *Dimension of the attactors associated to the Ginzburg Landau partial differential equation*, Physica D **28** (1987), 282-304.

[G] Y. Giga : *Solutions for semilinear parabolic equations in L^p and regularity of weak solutions of the Navier-Stokes system*, J. Diff. Eq. **61** (1986), 186-212.

[GV1] J. Ginibre, G. Velo : *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation, I Compactness methods*, Physica D, sous presse.

[GV2] J. Ginibre, G. Velo : *The Cauchy problem in local spaces for the complex Ginzburg-Landau equation, II Contraction methods*, prétirage LPTHE 96/03, Orsay.

[GV3] J. Ginibre, G. Velo : *Localized estimates and Cauchy problem for the logarithmic complex Ginzburg-Landau equation*, prétirage LPTHE 96/31, Orsay.

[LO] C.D. Levermore, M. Oliver : *The complex Ginzburg-Landau equation as a model problem*, in Dynamical Systems and probabilistic methods for nonlinear waves, Lect. Appl. Mat., AMS **31** (1996), 141-189.

[MS] A. Mielke, G. Schneider : *Attractors for modulation equations on unbounded domains, existence and comparison*, Nonlinearity **8** (1995), 743-768.

[S] S. Snoussi : *Etude du comportement asymptotique des solutions d'une équation de Ginzburg-Landau généralisée*, Thèse, Orsay (1996).

[W1] F.B. Weissler : *Local existence and non existence for semilinear parabolic equations in L^p*, Ind. Univ. Math. J. **29** (1980), 79-102.

[W2] F.B. Weissler : *Existence and non existence of global solutions for a semilinear heat equation*, Israel J. Math. **38** (1981), 29-40.

J. Ginibre
Université de Paris XI Orsay
LPTHE *
Bât. 211
91405 ORSAY cedex

* URA D0063 du CNRS