

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. DAVID

S. SEMMES

Surfaces quasiminimales de codimension 1 et domaines de John

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1995-1996), exp. n° 10,
p. 1-17

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1995-1996___A10_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1995-1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Télèx 601.596 F

Séminaire 1995-1996

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SURFACES QUASIMINIMALES DE CODIMENSION 1 ET DOMAINES DE JOHN

G. DAVID et S. SEMMES

SURFACES QUASIMINIMALES DE CODIMENSION 1 ET DOMAINES DE JOHN

Guy DAVID & Stephen SEMMES

1. Enoncé du résultat principal.

Cet exposé est, pour l'essentiel, une rapide description d'un résultat écrit dans [DS4], que nous présentons sous un angle un peu différent.

Commençons par dire qui sont nos surfaces quasiminimales. En gros, il s'agira de "quasiminimiser" la mesure de Hausdorff $H^{n-1}(E)$ d'une partie compacte E de \mathbb{R}^n , sous une contrainte topologique qui empêche E de disparaître. Décrivons d'abord la contrainte que nous avons choisie, un peu arbitrairement.

On se donne deux boules ouvertes D_0 et D_1 dans \mathbb{R}^n , avec $\bar{D}_0 \subset D_1$, et on suppose pour simplifier que D_0 est centrée en 0. On note

$$(1.1) \quad \mathcal{F} = \{E \subset \bar{D}_1 \setminus D_0 : E \text{ est compact, sépare } 0 \text{ de } \infty, \text{ et} \\ H^{n-1}(E) < +\infty\}$$

notre classe de compétiteurs. Naturellement, " E sépare 0 de ∞ " signifie que 0 n'est pas dans la composante connexe non bornée du complémentaire $\mathbb{R}^n \setminus E$ de E , et H^{n-1} est la mesure de Hausdorff de dimension $n-1$. [Si E était une hypersurface régulière, $H^{n-1}(E)$ serait sa surface.]

DEFINITION 1.2. Soit $E \in \mathcal{F}$. On dira que E est un quasiminimum pour H^{n-1} (ou seulement, un quasiminimum) s'il existe une constante $M \geq 1$ telle que

$$(1.3) \quad H^{n-1}(E \setminus F) \leq M H^{n-1}(F \setminus E) \text{ pour tout } F \in \mathcal{F}.$$

Ainsi, si $M = 1$, E minimise vraiment la mesure de surface H^{n-1} , et dans ce cas $E = \partial D_0$ (à un ensemble de mesure nulle près). Quand M est grand, (1.3) signifie seulement qu'on ne peut pas remplacer un morceau de E par un morceau beaucoup plus petit, tout en préservant la propriété de séparation " $E \in \mathcal{F}$ ".

On s'intéresse aux propriétés de régularité de E lorsque E est un quasiminimum. Notons que l'image de E par une application bilipschitzienne de \mathbb{R}^n est encore un quasiminimum pour H^{n-1} , quoique peut-être avec une constante M' plus grande et un choix d'objets D_0, D_1 différents. On s'attend donc à ce que les quasiminima aient au mieux la régularité des images bilipschitziennes de sphères, et on verra plus loin qu'on n'en est pas très loin.

Notre choix de contrainte topologique est assez arbitraire. D'autres choix sont possibles, avec sans doute des résultats semblables pour certains. L'une des raisons du nôtre

est notre motivation initiale, l'application du paragraphe 2. On peut également se poser des problèmes semblables pour des ensembles de codimension > 1 . Voir [Al] et [DS6].

Notons que si E est un quasiminimum, on peut toujours ajouter à E n'importe quel compact de mesure nulle, sans changer sa propriété de quasiminimum. Il nous faudra donc, avant de parler des belles propriétés de régularité de E , en retirer la partie inutile.

Enonçons d'abord notre résultat principal dans le cas plus simple de la dimension 2.

THEOREME 1.4. *Soit $E \subset \mathbb{R}^2$ un quasiminimum pour H^1 . Alors E contient une courbe corde-arc Γ qui sépare 0 de ∞ .*

La définition standard des courbes corde-arc sera donnée au début du paragraphe 4. Disons seulement pour le moment qu'une courbe corde-arc est l'image d'un cercle par une application bilipschitzienne $\Phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. La démonstration du théorème donne d'ailleurs une borne sur les normes lipschitziennes de Φ et Φ^{-1} , en fonction de D_0 , D_1 et M .

Notons que si E et Γ sont comme dans le théorème, Γ est automatiquement un quasiminimum pour H^1 (car $\Gamma \in \mathcal{F}$) et $H^1(E \setminus \Gamma) = 0$ (car E est un quasiminimum).

La situation est suffisamment simple quand $n = 2$ pour nous permettre de donner une démonstration du théorème 1.4 au paragraphe 4. Pour $n > 2$, l'énoncé est un peu plus compliqué ; on obtient, à la place de Γ , un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ qui satisfait à la condition B et délimite deux domaines de John. Donnons d'abord les définitions, puis l'énoncé.

DEFINITION 1.5. Une partie fermée E de \mathbb{R}^n est dite Ahlfors-régulière de dimension d s'il existe une constante $C_0 > 0$ telle que

$$(1.6) \quad C_0^{-1}r^d \leq H^d(E \cap B(x, r)) \leq C_0r^d$$

pour tout $x \in E$ et tout rayon $r \in]0, \text{diam } E[$.

Comme son nom ne l'indique pas, la régularité est seulement une notion de taille. Par exemple, l'ensemble de Cantor du plan obtenu en faisant le produit cartésien de deux ensembles de Cantor du "demi exclus" est Ahlfors-régulier de dimension 1, mais assez rugueux.

DEFINITION 1.7. Soit $E \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$. On dit que E satisfait à la condition B s'il existe $C_1 > 0$ tel que, pour tout $x \in E$ et tout $r \in]0, \text{diam}(E)[$, il existe deux boules B_1, B_2 de rayon $C_1^{-1}r$, contenues dans $B(x, r) \setminus E$, et qui sont contenues dans deux composantes connexes différentes de $\mathbb{R}^n \setminus E$.

Dans le cas des quasiminima, $\mathbb{R}^n \setminus E$ ne sera composé que de deux composantes connexes, donc chacune d'entre elle devra contenir des boules assez grandes dans chaque $B(x, r)$.

La condition B a été introduite, sous une forme légèrement différente, par Semmes [Se1]. Il s'en servait pour obtenir la continuité sur $L^2(E)$ de certains opérateurs d'intégrale singulière. L'existence des boules B_1 et B_2 n'est pas une condition restrictive en soi, mais

elle devient bien plus forte quand elle est conjuguée à la seconde moitié de (1.6). [Noter qu'elle implique la première moitié de (1.6) ; c'est de cette tension entre une condition topologique qui entraîne que E n'est pas trop petit et la condition de taille (1.6) que vient la force de cette conjonction.] En dimension 2, tout ensemble régulier E qui vérifie la condition B est contenu dans une courbe Ahlfors-régulière (ou, ce qui revient au même, dans un ensemble connexe Ahlfors-régulier). En dimension n quelconque, E est "uniformément rectifiable", et même "contient des morceaux de graphes lipschitziens". Le but de cet exposé n'étant pas de parler de rectifiabilité uniforme, on demandera au lecteur de croire que les ensembles réguliers de codimension 1 qui satisfont à la condition B ont des propriétés assez fortes de rectifiabilité, ou de consulter [DS1] et [DS2] pour (beaucoup) plus de détails.

DEFINITION 1.8. Soit W un ouvert connexe borné dans \mathbb{R}^n . On dira que W est un domaine de John de centre $z_0 \in W$ s'il existe $C_2 > 0$ telle que, pour tout $z \in W$, l'on puisse trouver un chemin $t \rightarrow \alpha(t)$ dans W ayant les propriétés suivantes :

- (1.9) $\alpha : [0, |z - z_0|] \rightarrow W$ est C_2 -lipschitzienne,
- (1.10) $\alpha(0) = z$ et $\alpha(|z - z_0|) = z_0$, et
- (1.11) $\text{dist}(\alpha(t), \mathbb{R}^n \setminus W) \geq C_2^{-1}t$ pour tout $t \in [0, |z - z_0|]$.

Ainsi, chaque point de W peut être joint au centre par une sorte de région d'accès conique. Bien sûr, la propriété est plus intéressante pour les points z qui sont très proches de ∂W . La condition de John n'est pas très lointaine de la condition d'accès non tangentiel NTA, sauf qu'ici on autorise que deux points de W très proches l'un de l'autre ne puissent être reliés que par des chemins passant près de z_0 . [Penser à un disque moins un rayon, ou au réseau ferré français.] Un domaine de John peut quand même avoir une frontière compliquée ; certains domaines de Fatou-Julia dans le plan complexe sont des domaines de John (mais la démonstration est loin d'être triviale). Dans le cas de nos quasiminima, la frontière sera plus régulière que cela, parce qu'on saura aussi qu'elle est Ahlfors-régulière.

Nous aurons aussi besoin du cas où W n'est pas borné, mais contient le complémentaire d'une boule fermée \bar{D}_1 . Dans ce cas, on choisira le centre z_0 au hasard sur la sphère $2(\partial D_1)$, et l'on dira que W est un domaine de John s'il existe une constante $C_2 > 0$ pour laquelle on peut trouver un chemin $t \rightarrow \alpha(t)$ ayant les propriétés (1.9), (1.10) et (1.11) pour tout $z \in W \cap 2D_1$.

THEOREME 1.12 [DS4]. Soit E un quasiminimum pour H^{n-1} (voir la définition 1.2). Alors il existe un quasiminimum $E_0 \subset E$ tel que

- (1.13) E_0 est Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ et satisfait à la condition B ,
- (1.14) $\mathbb{R}^n \setminus E_0$ a exactement deux composantes connexes (la composante de 0, que nous appellerons W_0 , et la composante de ∞ qui sera notée W_1),
- (1.15) W_0 et W_1 sont des domaines de John, et
- (1.16) $E_0 = \partial W_0 = \partial W_1$.

Les constantes C_0, C_1 et C_2 implicites dans (1.13) et (1.15) ne dépendent que de n, D_0, D_1 et M .

REMARQUES.

Voir la figure 11 pour un dessin de quasiminimum typique.

(1.17) La dernière condition est sans doute une conséquence des autres. Elle exclut des ensembles E comme un cercle, plus un bout de rayon. De même, le fait que E_0 satisfait à la condition B est une conséquence immédiate de (1.14) et (1.15). Nous avons préféré mentionner la condition B en même temps que la régularité parce que l'ensemble forme une condition déjà assez forte en soi, et aussi parce que (1.13) est obtenu en premier (et plus facilement) dans la démonstration.

(1.18) Comme E est un quasiminimum et $E_0 \in \mathcal{F}$, on a $H^{n-1}(E \setminus E_0) = 0$. Par ailleurs, E_0 est irréductible, au sens où si E_1 est un compact strictement contenu dans E_0 , alors E_1 ne sépare plus 0 de ∞ . En effet, si $x \in E_0 \setminus E_1$ et si $B(x, r)$ est une boule assez petite pour ne pas rencontrer E_1 , alors la condition B et (1.14) disent que $B(x, r)$ contient à la fois des points de W_0 et de W_1 , ce qui prouve que E_1 ne sépare pas 0 de ∞ .

(1.19) L'ensemble E_0 est unique : E_0 est l'ensemble des points $x \in \mathbb{R}^n$ tels que pour toute boule B centrée en x , $B \cap W$ et $B \setminus W$ soient tous les deux de mesure de Lebesgue > 0 .

(1.20) Le fait que D_0 et D_1 sont des boules n'a pas d'importance dans ce théorème. On notera aussi avec satisfaction l'invariance bilipschitzienne des propriétés (1.13) - (1.16).

(1.21) Le théorème 1.12 a une réciproque. Si $E_0 \subset \bar{D}_1 \setminus D_0$ sépare 0 de ∞ et a les propriétés (1.13) - (1.16), alors il est un quasiminimum (irréductible) pour H^{n-1} . En fait, si l'on choisit la constante M assez grande (en fonction des constantes C_0 , C_1 , et C_2 implicites dans (1.13) et (1.15), alors E_0 est l'unique minimum dans \mathcal{F} de la fonctionnelle

$$(1.22) \quad J(E) = H^{n-1}(E \cap E_0) + MH^{n-1}(E \setminus E_0),$$

où l'unicité est modulo l'ajout d'un ensemble de mesure de Hausdorff nulle. Voir [DS4].

(1.23) Le théorème principal de [DS4] est en fait une variante du théorème 1.12, où la mesure de Hausdorff $H^{n-1}(E)$ est remplacée par la norme dans BV (l'espace des fonctions localement intégrables dont le gradient est une mesure finie) de la fonction caractéristique de la composante W_0 . Nous en reparlerons brièvement au paragraphe 3.

2. Une application.

Notre motivation initiale pour ce travail était d'obtenir le résultat suivant.

THEOREME 2.1 [JKV], [DS4]. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $K \subset \bar{B}(0, 2) \setminus B(0, 1)$, $H^{n-1}(K) \leq C_0 < +\infty$, et qui sépare 0 de ∞ . Alors il existe un graphe lipschitzien Γ , de constante de Lipschitz $\leq A$, et tel que $H^{n-1}(K \cap \Gamma) \geq A^{-1}$. La constante $A = A(n, C_0)$ ne dépend que de n et C_0 .*

Commençons par quelques explications au sujet de cet énoncé. Un graphe lipschitzien de constante $\leq A$ est le graphe dans \mathbb{R}^n d'une fonction $f : \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$|f(x) - f(y)| \leq A |x - y|$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$, ou l'image d'un tel graphe par une rotation de \mathbb{R}^n .

Il est clair qu'on ne peut demander à K , sous les hypothèses du théorème, d'être tout entier régulier : K pourrait être l'union d'une sphère et de n'importe quel compact horrible et inutile. Le mieux qu'on puisse espérer est de contrôler une partie significative de K , comme dans le théorème. De même, il est normal que la constante A tende vers $+\infty$, car à la limite, sans la contrainte de taille, K pourrait être une "quasisphère fractale".

Il est assez facile de voir que K contient une partie rectifiable de mesure $\geq C^{-1}$. Rappelons que tout compact K tel que $H^{n-1}(K) < +\infty$ se décompose en une partie rectifiable K_r et une partie totalement non rectifiable, ou irrégulière, K_i , ayant des propriétés radicalement différentes. La partie K_r est (par définition) contenue dans une union dénombrable d'hypersurfaces de classe C^1 , plus un ensemble de mesure nulle. La partie K_i a une intersection de mesure nulle avec toute hypersurface de classe C^1 , et un théorème classique de théorie de la mesure géométrique dit que, pour presque tout choix d'hyperplan P , la projection orthogonale $\pi(K_i)$ sur P est de mesure nulle. Voir par exemple [Ma].

Si K sépare 0 de ∞ , alors tout segment de droite qui joint $\partial B(0,1)$ à $\partial B(0,2)$ rencontre K . On en déduit que $\pi(K) \supset \pi(B(0,1))$ pour tout hyperplan P . [Appliquer ce qui précède à des segments dans la direction orthogonale à P .] Ainsi, en choisissant P tel que $H^{n-1}(\pi(K_i)) = 0$, on trouve bien $H^{n-1}(K_r) \geq H^{n-1}(\pi(K_r)) = H^{n-1}(\pi(K)) \geq C^{-1}$, comme promis. Le théorème 2.1 est plus précis, puisqu'il donne un contrôle quantitatif de la manière dont la partie rectifiable se comporte.

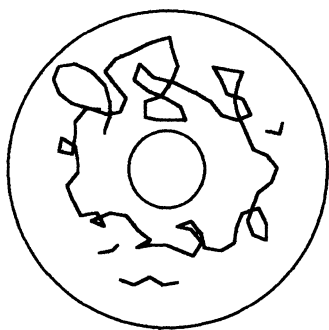


Figure 1 : un K typique

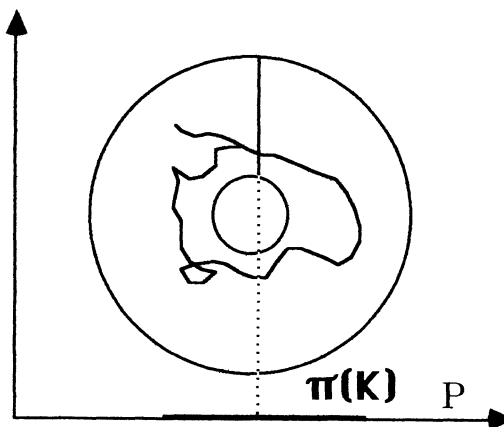


Figure 2

Ce résultat est un assez bel exemple de la manière dont la tension entre une hypothèse de nature topologique (ici, notre hypothèse de séparation) et une contrainte sur la masse totale de K donne une conclusion de régularité. La question a été posée par S. Semmes [Se2]. A cette époque, on connaissait un certain nombre de résultats du même type, mais souvent avec une hypothèse de séparation qui était faite à toutes les échelles. Un exemple typique est le résultat qui dit que tout ensemble Ahlfors-régulier de codimension 1 qui satisfait à la condition B est uniformément rectifiable. Le théorème 2.1 aurait aussi pu être utile pour étudier certains ensembles singuliers, comme dans la fonctionnelle de Mumford-Shah, mais on a pu se débrouiller avec une version plus faible [DS3].

Le théorème 2.1 a deux démonstrations indépendantes. Dans celle de P. Jones, N. Katz et A. Vargas, on part d'une projection orthogonale de K sur un hyperplan, et on arrive à en extraire une application bilipschitzienne définie sur un ensemble plus petit (et qui est le morceau de graphe lipschitzien recherché). On utilise pour cela une technique combinatoire subtile de réduction de dimension. [Le théorème 2.1 est assez facile quand $n = 2$.] La démonstration dont nous allons parler dans cet exposé utilise une idée qui nous vient de J.-M. Morel et S. Solimini : minimiser une fonctionnelle. En fait, on montre le résultat plus précis suivant.

THEOREME 2.2. *Soit $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact tel que $K \subset \bar{B}(0,2) \setminus B(0,1)$, K sépare 0 de ∞ , et $H^{n-1}(K) \leq C_0$. Pour tout $\epsilon > 0$, on peut trouver un ensemble compact $E_0 \subset \bar{B}(0,2) \setminus B(0,1)$, qui vérifie les conclusions (1.13) - (1.16) du théorème 1.12, et tel que*

$$(2.3) \quad H^{n-1}(E_0 \setminus K) \leq \epsilon.$$

De plus, les constantes qui interviennent dans (1.13) et (1.15) pour E_0 peuvent être majorées en fonction de n , C_0 et ϵ seuls.

Il n'est pas très difficile de déduire le théorème 2.1 à partir du théorème 2.2 et des résultats connus sur les ensembles réguliers qui vérifient la condition B . [On n'a d'ailleurs pas besoin de (1.14) - (1.16) pour prouver le théorème 2.1.] Nous ne parlerons pas de cela ici, le point essentiel étant plutôt d'essayer de convaincre le lecteur qu'on peut trouver une partie régulière dans K . Voir [DS4] pour plus de détails.

Posons $D_0 = B(0,1)$ et $D_1 = B(0,2)$. L'idée du théorème 2.2 est d'obtenir E_0 en minimisant la fonctionnelle

$$(2.4) \quad J(E) = H^{n-1}(E \cap K) + MH^{n-1}(E \setminus K)$$

sur \mathcal{F} , avec une constante M assez grande par rapport à $\epsilon^{-1}C_0$.

Soit $E \in \mathcal{F}$ un ensemble qui minimise J . [Nous parlerons d'existence plus tard.] Alors E est clairement un quasiminimum pour H^{n-1} (avec la même constante M), ce qui fait que l'on peut trouver $E_0 \subset E$ avec toutes les propriétés du théorème 1.12. De plus,

$$(2.5) \quad \begin{aligned} H^{n-1}(E_0 \setminus K) &\leq H^{n-1}(E \setminus K) \leq M^{-1}J(E), \\ &\leq M^{-1}J(K) = M^{-1}C_0, \end{aligned}$$

car K sépare 0 de ∞ , donc est lui-même un compétiteur. Si $M \geq \epsilon^{-1}C_0$, E_0 vérifie les conditions requises au théorème 2.1.

Malheureusement, la démonstration ne se termine pas ici, car rien ne garantit l'existence d'un compact $E \in \mathcal{F}$ qui minimise J . Le problème vient de ce que la mesure de Hausdorff se comporte plutôt mal vis-à-vis des passages à la limite.

Une première solution consiste à résoudre des problèmes approchés où l'on sait que le minimum est atteint, puis de passer à la limite. Par exemple, on peut se restreindre à

la classe \mathcal{F}_k des compacts contenus dans $B(0, 3) \setminus B(0, \frac{1}{2})$ qui séparent 0 de ∞ , et qui sont composés uniquement de faces de cubes dyadiques d'arête 2^{-2k} , et chercher à minimiser

$$(2.6) \quad J_k(E) = H^{n-1}(\{x \in E : \text{dist}(x, K) \leq 2^{-k}\}) \\ + MH^{n-1}(\{x \in E : \text{dist}(x, K) > 2^{-k}\}).$$

L'existence d'un minimum E_k pour J_k est claire. Le fait que les E_k vérifient uniformément les propriétés du théorème 1.12 devrait être faciles à vérifier, et le passage à la limite se faire dans de bonnes conditions, à cause des estimations uniformes sur les E_k . L'avantage de cette solution est qu'elle devrait également marcher en codimension > 1 . Les conditionnels viennent de ce que les détails sont en cours de rédaction. Voir [DS6] pour une démonstration de ce type.

La seconde solution est de considérer un problème variationnel légèrement différent, où l'existence de minima est facile à établir par compacité. C'est ce qui a été fait dans [DS4], et que nous allons essayer de décrire très rapidement.

3. Quasiminima dans BV.

Modifions un peu notre problème initial. Notons que si $E \in \mathcal{F}$, E peut être avantageusement remplacé par la frontière ∂W de la composante connexe de 0 dans $\mathbb{R}^n \setminus E$. Ainsi, si l'on pose

$$(3.1) \quad \mathcal{F}_1 = \{W \text{ ouvert} : D_0 \subset W \subset D_1 \text{ et } H^{n-1}(\partial W) < +\infty\},$$

les quasiminima de notre problème initial sont les mêmes (à des ensembles de mesure nulle près) que les quasiminima de la fonctionnelle $W \rightarrow H^{n-1}(\partial W)$ sur \mathcal{F}_1 . Nous allons remplacer la mesure de Hausdorff de la frontière ∂W par le "périmètre de W ".

Rappelons que BV , l'ensemble des fonctions à variation bornée, est la classe des fonctions $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ localement intégrable et dont les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $1 \leq i \leq n$, sont des mesures finies. Si W est une partie mesurable de \mathbb{R}^n et si sa fonction caractéristique est dans BV , on dira que W a un périmètre fini, et on notera

$$(3.2) \quad N(\mathbf{1}_W) = \|\mathbf{1}_W\|_{BV} = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathbf{1}_W|$$

le périmètre de W . Rappelons que $N(W) = H^{n-1}(\partial W)$ lorsque la frontière de W est suffisamment régulière ; en général $N(W)$ est plus petit que $H^{n-1}(\partial W)$.

DEFINITION 3.3. Soient D_0, D_1 deux boules ouvertes de \mathbb{R}^n , avec $\bar{D}_0 \subset D_1$. Notons

$$(3.4) \quad \mathcal{F}_0 = \{W \text{ mesurable} : D_0 \subset W \subset D_1 \text{ et } \mathbf{1}_W \in BV\}.$$

Nous dirons que $W \in \mathcal{F}_0$ est un quasiminimum pour BV s'il existe une constante $\alpha \in [0, 1[$ telle que

$$(3.5) \quad N(\mathbf{1}_W) \leq N(\mathbf{1}_V) + \alpha N(\mathbf{1}_V - \mathbf{1}_W) \text{ pour tout } V \in \mathcal{F}_0.$$

Ainsi $\alpha = 0$ correspond à un vrai minimum, alors que (3.5) avec $\alpha = 1$ ne serait rien de plus que l'inégalité triangulaire et ne contiendrait aucune information sur W .

Le gros avantage de ce nouveau problème variationnel est que la locale compacité de BV permet de trouver de nombreux quasiminima. Par exemple si $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction semi-continue inférieurement telle que $m \leq g(x) \leq M$ pour des constantes $0 < m \leq M < +\infty$, alors on peut trouver $W \in \mathcal{F}_0$ qui minimise la fonctionnelle

$$(3.6) \quad N_g(\mathbb{1}_W) = \int_{\mathbb{R}^n} g |\nabla \mathbb{1}_W|,$$

et un tel minimum sera toujours un quasiminimum pour BV (avec la constante $\alpha = 1 - \frac{m}{M}$).

Le théorème 1.12 a un analogue dans ce nouveau cadre : si $W \in \mathcal{F}_0$ est un quasiminimum pour BV, il existe un ensemble Ahlfors-régulier E_0 et deux domaines de John W_0 et W_1 , avec les propriétés (1.13) - (1.16), et tels que $\mathbb{1}_W(x) = \mathbb{1}_{W_0}(x)$ presque-partout. Ces deux résultats ne se déduisent pas l'un de l'autre, mais leurs démonstrations sont très semblables.

En ce qui concerne le théorème 2.2, on peut le démontrer un peu comme l'argument du paragraphe 2 le suggère, mais à partir d'un $W \in \mathcal{F}_0$ qui minimise la fonctionnelle

$$(3.7) \quad N_{K,M}(\mathbb{1}_W) = \int_K |\nabla \mathbb{1}_W| + M \int_{\mathbb{R}^n \setminus K} |\nabla \mathbb{1}_W|,$$

qui est un cas particulier de (3.6).

Pour tous les détails concernant ce paragraphe, nous renvoyons à [DS4].

4. Courbes corde-arc.

Revenons à l'étude des quasiminima pour H^{n-1} , et plaçons-nous en dimension 2. Nous allons montrer dans ce paragraphe que les quasiminima sont (essentiellement) des courbes corde-arc.

DEFINITION 4.1. Soient Γ une courbe de Jordan fermée, et $C > 1$. On dit que Γ est une courbe corde-arc (fermée) de constante $\leq C$ si Γ est rectifiable et si, pour tout choix de points $y, z \in \Gamma$, l'un des deux arcs de Γ qui joignent y à z est de longueur $\leq C |y - z|$.

L'étude des quasiminima est beaucoup plus simple en dimension 2, à cause du résultat suivant.

PROPOSITION 4.2. Soit K une partie compacte de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui sépare 0 de ∞ et telle que $H^1(K) < +\infty$. Alors K contient une courbe de Jordan (rectifiable) Γ qui sépare 0 de ∞ .

Pour prouver la proposition, nous allons construire une suite de courbes de Jordan Γ_n dont les longueurs sont uniformément bornées, et qui restent à distance $\leq 2^{-n+2}$ de K ; la courbe Γ sera ensuite obtenue par passage à la limite et élagage des boucles superflues.

Soit donc K comme dans la proposition, et donnons-nous un entier n assez grand pour que $2^{-n+2} < \text{dist}(0, K)$. Notons $D_0 = \mathcal{D}_0^{(n)}$ l'ensemble des carrés dyadiques de côté 2^{-n} , c'est-à-dire l'ensemble des carrés Q qui s'obtiennent à partir de $[0, 2^{-n}]^2$ par des translations dans $(2^{-n}\mathbb{Z})^2$. Notons également

$$(4.3) \quad D_1 = \{Q \in \mathcal{D}_0 : H^1(2Q \cap K) < 2^{-n-1}\},$$

où $2Q$ désigne le cube de même centre que Q , mais de côté double.

Pour tout $Q \in D_1$, on peut trouver (par Fubini) un nombre $\lambda = \lambda_Q \in]1, 2[$ tel que $\partial(\lambda Q)$ ne rencontre pas K . Alors, $K \setminus \lambda Q$ est un compact, et il sépare encore 0 de ∞ . En effet, si γ était un chemin qui joint 0 à ∞ sans rencontrer $K \setminus \lambda Q$, on pourrait obtenir un arc $\tilde{\gamma}$ qui joint 0 à ∞ sans rencontrer K , en remplaçant l'arc de γ qui se trouve entre le premier et le dernier point de $\gamma \cap \partial(\lambda Q)$ (s'ils existent) par un arc de $\partial(\lambda Q)$. [Le cas où γ commence dans λQ n'est pas intéressant, parce que notre hypothèse que $2^{-n+2} < \text{dist}(0, K)$ implique que $\lambda Q \cap K = \emptyset$ dans ce cas.] En itérant ce raisonnement, on trouve que

$$(4.4) \quad \tilde{K} = K \setminus \left\{ \bigcup_{Q \in D_1} \lambda_Q Q \right\}$$

est encore un compact qui sépare 0 de ∞ . De plus, \tilde{K} est contenu dans

$$(4.5) \quad K_n = \sum_{Q \in D_0 \setminus D_1} Q,$$

de sorte que ∂K_n sépare 0 de ∞ . Par ailleurs, $H^1(2Q \cap K) \geq 2^{-n-1}$ pour tout $Q \in D_0 \setminus D_1$, et comme un point de \mathbb{R}^2 n'appartient jamais à plus de 9 cubes $2Q$, le nombre de cubes dans $D_0 \setminus D_1$ est $\leq \sum_{Q \in D_0 \setminus D_1} 2^{n+1} H^1(2Q \cap K) = 2^{n+1} \int_K \sum_{Q \in D_0 \setminus D_1} \mathbb{1}_{2Q}(x) dH^1(x) \leq 9 \cdot 2^{n+1} H^1(K)$. Comme ∂K_n est contenu dans l'union des frontières ∂Q , $Q \in D_0 \setminus D_1$, il vient

$$(4.6) \quad H^1(\partial K_n) \leq 72 H^1(K).$$

LEMME 4.7. *Il existe une courbe de Jordan γ_n , dont le support est contenu dans ∂K_n et sépare 0 de ∞ .*

Notons que ∂K_n est un graphe, dont les sommets sont les points de $\partial K_n \cap (2^{-n}\mathbb{Z})^2$, et dont les arêtes sont des segments horizontaux ou verticaux de longueur 2^{-n} . Soit Γ_n un sous-graphe minimal de ∂K_n qui sépare 0 de ∞ . [On obtient Γ_n en otant de ∂K_n autant de segments que possible, tout en gardant la propriété de séparation.] Il reste à montrer que Γ_n contient le support d'une courbe de Jordan.

Notons W_0 la composante connexe de 0 dans $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$, et W_1 la composante de ∞ . Si I est l'un des segments de Γ_n , alors I est bordé d'un côté par W_0 et de l'autre par W_1 , car sinon on pourrait oter I de Γ_n sans altérer sa propriété de séparation. On en déduit

que W_0 et W_1 sont les seules composantes connexes de $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$, et aussi que pour chaque sommet z de Γ_n , il y a au moins deux arêtes de Γ_n qui aboutissent en z .

On peut maintenant construire une courbe de Jordan γ_n dont le support est contenu dans Γ_n : on part de n'importe quel sommet de Γ_n , et on continue le long de Γ_n jusqu'à rencontrer un point par lequel on est déjà passé. Comme chaque sommet de Γ_n est l'extrémité d'au moins deux arêtes, on ne se trouve jamais coïncé à un sommet, et on peut bien continuer jusqu'à l'obtention d'une boucle ; γ_n est obtenue en otant, si nécessaire, la partie initiale du chemin qu'on vient de construire.

Notons G_n le support (ou image) de γ_n . Il reste à voir que G_n sépare 0 de ∞ . Le théorème de Jordan nous dit que $\mathbb{R}^2 \setminus G_n$ est l'union d'une composante connexe bornée \tilde{W}_0 et d'une composante non bornée \tilde{W}_1 . De plus, $W_1 \subset \tilde{W}_1$ car $G_n \subset \Gamma_n$, et alors $W_0 \subset \tilde{W}_0$ car il est impossible que $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma_n$ soit tout entier contenu dans \tilde{W}_1 . On pourrait en déduire aussi que $G_n = \Gamma_n$, mais on n'en a pas besoin. Ainsi, $0 \in W_0 \subset \tilde{W}_0$, et G_n sépare 0 de ∞ . Ceci termine la démonstration du lemme.

Notons que la longueur de γ_n est inférieure à $72H^1(K)$ grâce à (4.6). Choisissons pour chaque n un paramétrage $72H^1(K)$ -lipschitzien de γ_n par le tore \mathbb{R}/\mathbb{Z} . On appellera encore γ_n ce paramétrage. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que γ_n converge uniformément sur \mathbb{R}/\mathbb{Z} vers une fonction γ . Il est clair que γ est encore $72H^1(K)$ -lipschitzienne. Comme $\text{dist}(x, K) \leq 2^{-n+2}$ pour tout $x \in G_n$ (car $x \in \partial Q$ pour un cube Q tel que $2Q$ rencontre K), on trouve que $\gamma(t) \in K$ pour tout $t \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. De plus, l'indice de 0 par rapport à chaque γ_n est ± 1 (puisque G_n sépare 0 de ∞), et donc l'indice de 0 par rapport à γ est aussi ± 1 .

La courbe γ que nous venons de construire est presque celle qu'il nous faut pour la proposition 4.2. Son seul défaut est de ne pas être simple, mais ceci n'est pas très difficile à arranger. Si γ n'est pas simple, et si y, z sont deux points distincts de \mathbb{R}/\mathbb{Z} tels que $\gamma(y) = \gamma(z)$, alors γ peut être vue comme la concaténation de deux boucles (l'une obtenue en suivant γ entre y et z , l'autre en suivant γ entre z et y). Comme l'indice de 0 par rapport à γ est ± 1 , l'une au moins de ces boucles a un indice $\neq 0$. On peut donc remplacer γ par la boucle d'indice non nul, et gagner la longueur de l'autre boucle. Choisissons de faire ceci, avec un choix de y, z qui maximise la longueur de la boucle économisée. On obtient une nouvelle courbe $\gamma^{(1)}$ fermée. Si $\gamma^{(2)}$ n'est pas simple, on recommence. Si l'on finit par obtenir une courbe $\gamma^{(m)}$ simple, on peut prendre $\Gamma = \gamma^{(m)}$, et on a prouvé la proposition. Sinon, il n'est pas difficile de voir que la suite des courbes $\gamma^{(m)}$ converge vers une courbe Γ qui vérifie bien les conditions de la proposition 4.2. La démonstration est un peu pénible, parce qu'il vaut mieux parler de paramétrages, mais pas difficile. Le point essentiel est que la somme des longueurs des boucles dont on se débarrasse est finie, ce qui fait converger la suite $\gamma^{(m)}$. Ceci termine (ce que nous souhaitons dire de) la démonstration de la proposition 4.2.

Nous pouvons maintenant retourner à l'étude des quasiminima pour H^1 en dimension 2 et démontrer le théorème 1.4.

Soit donc E un quasiminimum pour H^1 . En particulier, E est compact et sépare 0 de ∞ , et $H^1(E) < +\infty$. On peut donc tracer sur E une courbe de Jordan qui sépare 0 et ∞ . Appelons Γ (l'image de) cette courbe de Jordan. Comme $\Gamma \in \mathcal{F}$ et E est un quasiminimum, $H^1(E \setminus \Gamma) = 0$ et Γ est également un quasiminimum. Il ne reste plus qu'à

voir que Γ est une courbe corde-arc.

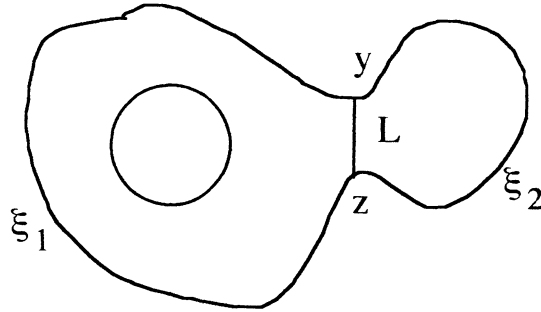


Figure 3

Soit y, z deux points distincts de Γ , et notons L le chemin le plus court qui joint y à z dans $\bar{D}_1 \setminus D_0$. Le plus souvent, L est le segment $[y, z]$, mais il se peut aussi que L contienne un arc du cercle ∂D_1 . Notons ξ_1 et ξ_2 les deux arcs de Γ qui joignent y à z . On obtient deux courbes fermées Γ_1, Γ_2 dans $\bar{D}_1 \setminus D_0$ en juxtaposant ξ_1 et L ou ξ_2 et L . De plus, l'indice de 0 par rapport à Γ , qui vaut ± 1 , est égal à la somme (ou la différence) des indices de 0 par rapport à Γ_1 et Γ_2 . L'un de ces indices est donc non nul. Supposons (sans perte de généralité) que ce soit le premier. Alors Γ_1 sépare 0 de ∞ , donc $\Gamma_1 \in \mathcal{F}$. Comme Γ est un quasiminimum, (1.3) nous dit que

$$(4.8) \quad H^1(\Gamma \setminus \Gamma_1) \leq M H^1(\Gamma_1 \setminus \Gamma),$$

et donc

$$(4.9) \quad \begin{aligned} H^1(\xi_2) &= H^1(\xi_2 \setminus L) + H^1(L \cap \xi_2) \\ &= H^1(\Gamma \setminus \Gamma_1) + H^1(L \cap \xi_2) \\ &\leq M H^1(\Gamma_1 \setminus \Gamma) + H^1(L \cap \xi_2) \\ &= M H^1(L \setminus \Gamma) + H^1(L \cap \xi_2) \\ &\leq M H^1(L) \leq \frac{\pi}{2} M |y - z|. \end{aligned}$$

On en déduit que Γ est une courbe corde-arc de constante $\leq \frac{\pi}{2} M$, et le théorème s'ensuit.

Le fait que toute courbe corde-arc fermée de constante $\leq C$ est l'image d'un cercle par une bijection bilipschitzienne de \mathbb{R}^2 (avec des constantes bilipschitziennes $\leq k(C)$) est assez classique, mais pas élémentaire. Voir par exemple le théorème 7.9, p. 165 de [Po].

REMARQUE 4.10. Contrairement à ce qui se passe en dimensions supérieures, la démonstration du théorème 1.4 donne aussi une manière de construire des quasiminima pour H^1 à partir d'un ensemble $K \subset \bar{D}_1 \setminus D_0$ de mesure finie et qui sépare 0 de ∞ .

On commence par construire une courbe de Jordan Γ contenue dans K , comme dans la démonstration de la proposition 4.2. Si Γ n'est pas corde-arc (ou, ce qui revient au

même, si ce n'est pas un quasiminimum), on peut trouver des points $y, z \in \Gamma$ tels que $H^1(\Gamma \setminus \Gamma_1) > M H^1(\Gamma_1 \setminus \Gamma)$, avec les notations utilisées ci-dessus. On choisit y, z de façon à maximiser $H^1(\Gamma \setminus \Gamma_1)$, et on remplace Γ par Γ_1 . On remplace ensuite Γ_1 par une courbe simple contenue dans Γ_1 (cette fois, on peut s'en tirer beaucoup plus facilement qu'avec la proposition 4.2). Si la courbe obtenue n'est toujours pas corde-arc, on recommence. Le processus converge, pour le même genre de raison qu'à la fin de la proposition 4.2 : chaque modification de la courbe nous fait gagner une longueur presque égale à la longueur totale de la modification, ce qui fait que la somme de ces longueurs est finie. La courbe obtenue à la fin est corde-arc ; c'est également facile à vérifier. Si l'on choisit M assez grand, on trouve une courbe corde-arc avec une assez mauvaise constante $(\frac{\pi}{2}M)$, mais la longueur totale qui a été ajoutée à K est aussi petite qu'on le veut. [A chaque étape, la longueur de $\Gamma_1 \setminus \Gamma$ est inférieure à $(M - 1)^{-1}$ fois le gain de longueur ; comme le gain total de longueur est $\leq H^1(K)$, on en déduit une bonne majoration de la longueur ajoutée.] L'argument ci-dessus n'est pas tout-à-fait une démonstration, car il faut aussi vérifier qu'aucune masse ne se crée lors du passage à la limite final. Ceci dit, la vérification est assez facile, à cause du fait que la somme des longueurs des modifications est finie.

REMARQUE 4.11. Nous obtenons ainsi une démonstration constructive de l'analogie du théorème 2.2 en dimension 2 : pour tout $C_0 < +\infty$ et tout $\epsilon > 0$, il existe M tel que si $K \subset \overline{B(0,2)} \setminus B(0,1) \subset \mathbb{R}^2$ est un compact qui sépare 0 et ∞ et tel que $H^1(K) \leq C_0$, alors on peut trouver une courbe corde-arc Γ , de constante $\leq M$, qui sépare 0 de ∞ , et telle que $H^1(\Gamma \setminus K) \leq \epsilon$. La constante M peut bien sûr être calculée à partir de C_0 et ϵ . Sauf erreur de ma part, on peut prendre M tel que $(\frac{2}{\pi}M - 1)\epsilon = C_0 - 2\pi$.

Je ne sais pas trop si ce résultat est nouveau. En tout cas, le Théorème 2.1 quand $n = 2$ était connu et se démontre un peu plus facilement que ça (à l'aide du "lemme du soleil levant").

5. Deux mots du cas général ; domaines d'isopérimétrie.

Donnons maintenant une rapide description du plan de la démonstration du théorème 1.12. Pour plus de détails, on pourra consulter [DS4]. Voir aussi [DS5] pour l'essentiel de la démonstration dans le cadre spécifique des quasiminima pour H^d .

Pour la démonstration du théorème, il est préférable de voir E comme la frontière d'un domaine W qui contient D_0 . (Voir le début du paragraphe 3). La première étape de la démonstration consiste à montrer que si $W \in \mathcal{F}_1$ (voir (3.1)) quasiminimise $H^{n-1}(\partial W)$, alors il existe un ouvert W_0 , qui coïncide avec W sauf sur un ensemble de mesure nulle, et dont la frontière est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ qui satisfait à la condition B .

Pour cette partie de la démonstration, il suffit de comparer W à des compétiteurs de la forme $\hat{W} = W \cup B$, ou $\check{W} = W \setminus B$, où B est une boule qui ne rencontre pas D_0 . Dans les deux cas, on fait disparaître $\partial W \cap B$. En échange, il faut ajouter $\partial B \setminus W$ à notre frontière dans le premier cas, et $\partial B \cap W$ dans le second cas. Comme W est un quasiminimum, on trouve que

$$(5.1) \quad H^{n-1}(\partial W \cap B) \leq M \inf \{H^{n-1}(\partial B \setminus W), H^{n-1}(\partial B \cap W)\}.$$

On utilise ensuite (5.1), un peu comme un lemme de monotonie, pour en déduire le résultat cherché. Très grossièrement, l'idée générale est que si W a des fins tentacules (rentrants ou sortants), il est avantageux de les couper. [Voir la figure 4.]

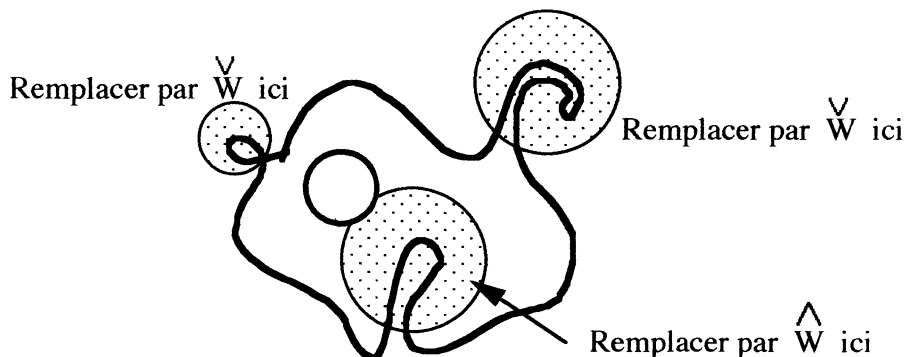


Figure 4

Dans la seconde partie de la démonstration, on montre que si W_0 est l'ouvert obtenu dans la première partie de l'argument, alors W_0 est connexe, et de plus est un "domaine d'isopérimétrie".

DEFINITION 5.2. Un *domaine d'isopérimétrie* est un ouvert W de \mathbb{R}^n pour lequel il existe une constante $C_3 > 0$ telle que

$$(5.3) \quad \min(|\Omega|, |W \setminus \Omega|) \leq C_3 H^{n-1}(W \cap \partial\Omega)^{\frac{n}{n-1}}$$

pour tout ouvert $\Omega \subset W$, où l'on a noté $|\Omega|$ la mesure de Lebesgue de Ω .

En somme, il s'agit bien de domaines à l'intérieur desquels on a une inégalité isopérimétrique du type habituel. Bien qu'on ne l'ait pas demandé d'emblée, un domaine d'isopérimétrie est forcément connexe. Les boules (ou leurs images bilipschitziennes) sont des exemples typiques de domaines d'isopérimétrie. Le diabolo de la figure 5 n'est un domaine d'isopérimétrie qu'avec une mauvaise constante.

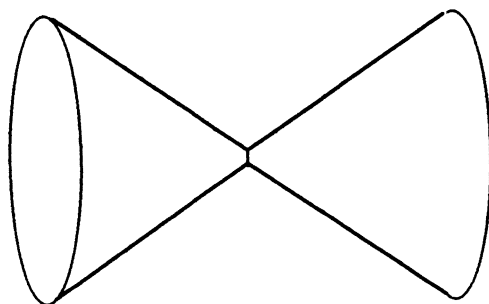


Figure 5

Revenons à notre ouvert W_0 . La raison pour laquelle il est logique que W_0 soit connexe est que si W_0 était l'union de plusieurs composantes connexes, on pourrait le remplacer par la

composante U_0 de 0 dans W_0 . On gagnerait ainsi sans contrepartie toute la partie de ∂W_0 qui ne se trouve pas dans ∂U_0 . [Voir la figure 6.]

De la même manière, si W_0 n'était pas un domaine d'isopérimétrie, on pourrait trouver un ouvert Ω de W_0 qui contient D_0 et tel que

$$(5.4) \quad |W_0 \setminus \Omega| > C'_3 H^{n-1}(W_0 \cap \partial \Omega)^{\frac{n}{n-1}},$$

avec une constante C'_3 aussi grande qu'on veut. En comparant (5.4) avec l'inégalité isopérimétrique standard dans \mathbb{R}^n , on obtiendrait

$$(5.5) \quad H^{n-1}(W_0 \cap \partial \Omega) < M^{-1} H^{n-1}(\partial \Omega \setminus W_0).$$

On espère bien en déduire une contradiction, parce que remplacer W_0 par Ω nous fait seulement perdre $H^{n-1}(W_0 \cap \partial \Omega)$, mais devrait nous faire gagner $H^{n-1}(\partial \Omega \setminus W_0)$. [Voir la figure 7.]

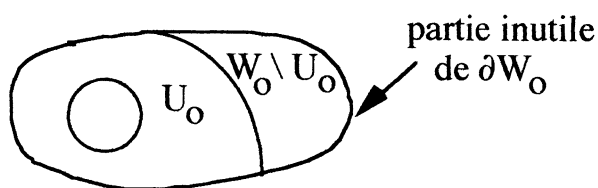


Figure 6

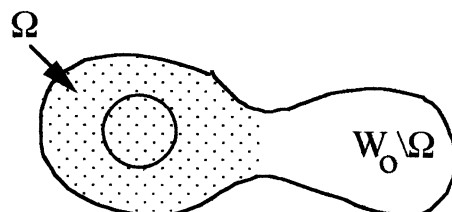


Figure 7

Ces raisonnements ne marchent pas tels quels, parce que les frontières de W_0 et de Ω peuvent être plus compliquées que sur les figures. En ce qui concerne la connexité, par exemple, il pourrait se faire que W_0 soit l'union de deux composantes connexes, mais que la frontière de chacune d'entre elle soit égale à ∂W_0 tout entier. De même, pour l'isopérimétrie, il se pourrait que Ω ait des petites bulles qui viennent s'accumuler près de la frontière de $\Omega_0 \setminus \Omega$, de sorte que $\partial \Omega$ contient encore tout ∂W_0 et remplacer W_0 par Ω ne nous fait rien gagner. Ces ennuis ne sont pas aussi graves qu'il y paraît ; par exemple on peut commencer par retirer les bulles de Ω avant de faire le remplacement. La condition B que ∂W_0 vérifie est bien utile pour contrôler ce qui se passe à la frontière.

A l'issue de cette deuxième partie, on sait que W_0 est un domaine d'isopérimétrie, et que sa frontière est un ensemble Ahlfors-régulier de dimension $n - 1$ qui satisfait à la condition B . La démonstration de la première partie nous donne même une précision supplémentaire : il existe une constante $C_1 > 0$ telle que, pour tout $x \in \partial W_0$ et tout rayon $r \in]0, \text{diam } W_0[$, il existe deux boules B_1, B_2 contenues dans $B(x, r)$, de rayon $\frac{r}{C_1}$, et telles que $B_1 \subset W_0$ et $B_2 \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{W}_0$.

Cette condition est un peu plus forte que la condition B sur ∂W_0 : on demandait seulement dans la définition 1.7 que les boules B_1 et B_2 soient dans des composantes connexes distinctes de $\mathbb{R}^n \setminus \partial W_0$, alors que maintenant on exige que l'une soit dans W_0 ,

l'autre hors de \bar{W}_0 . Lorsque W_0 vérifie cette condition, on dira qu'il satisfait à la condition B . La troisième partie de la démonstration consiste à prouver le résultat suivant.

THEOREME 5.5. *Soit W un domaine borné qui contient la boule unité. Si W est un domaine d'isopérimétrie, satisfait à la condition B , et a une frontière ∂W qui est Ahlfors-régulière de dimension $n - 1$, alors W est un domaine de John (centré en 0).*

Le théorème 5.5 est presque exactement ce qui nous manquait pour conclure. Il nous dit que W_0 est un domaine de John ; le fait que $\mathbb{R}^n \setminus \bar{W}_0$ est également un domaine de John se montre de la même manière, en échangeant les rôles de 0 et ∞ .

La démonstration du théorème 5.5 est amusante (pour nous), mais un peu trop technique pour être décrite dans ces notes. Essayons seulement de nous convaincre ici que c'est un résultat plaisant et que les hypothèses ne sont pas superflues.

La condition de John et celle d'isopérimétries sont un peu de même nature : dans les deux cas, il s'agit de manières de dire que les points de W peuvent être reliés par nombreuses courbes. La grande différence est que dans le cas d'un domaine de John, on demande aussi que ces courbes puissent être regroupées en tubes suffisamment épais. La figure 8 suggère un exemple de domaine W qui est un domaine d'isopérimétrie (avec une bonne constante), alors qu'il n'est de John qu'avec une très mauvaise constante : la grille centrale, qui peut être aussi fine que l'on veut, empêche de relier les deux moitiés de W par des tubes épais. Noter que dans cet exemple, ∂W est bien Ahlfors-régulier, mais ne satisfait pas à la condition B .

Le théorème 5.5 dit que la condition B , c'est-à-dire la présence de boules assez grandes contenues dans le complémentaire de W , empêche l'existence de grilles comme dans la figure 8, ou au moins force celles-ci à être trop grandes pour être régulières. La Tour Eiffel généralisée de la figure 9 est un ensemble où W et $\mathbb{R}^n \setminus \bar{W}$ sont tous les deux des domaines d'isopérimétrie vérifiant la condition B , mais W n'est pas un domaine de John. [La frontière n'est pas Ahlfors-régulière de codimension 1.]

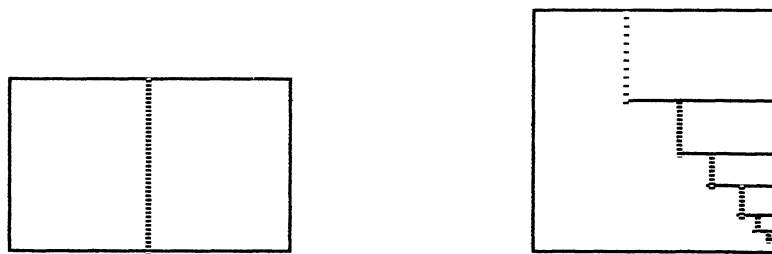


Figure 8. A gauche : un domaine d'isopérimétrie qui n'est de John qu'avec une mauvaise constante. A droite : comment obtenir un domaine qui n'est pas de John en répétant la construction.

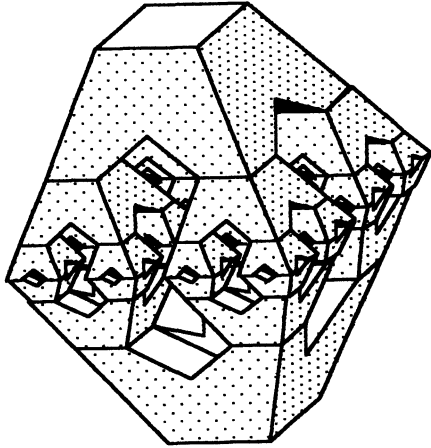


Figure 9. L'intérieur de cette tour Eiffel généralisée est un domaine d'isopérimétrie qui n'est pas un domaine de John, malgré la condition B.

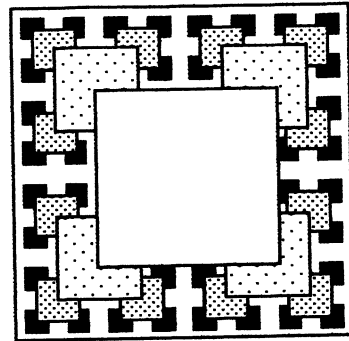


Figure 10. Les sections de l'intérieur de la tour Eiffel par divers plans horizontaux.

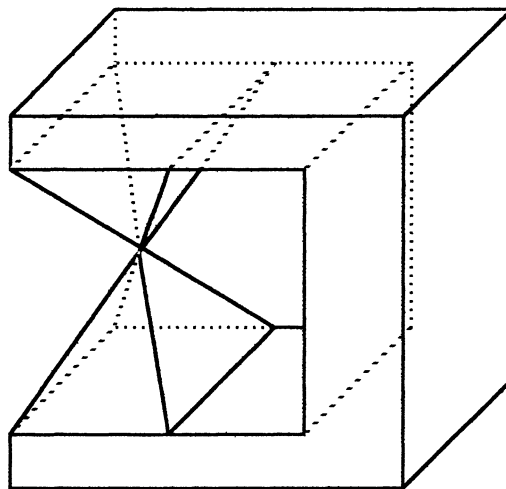


Figure 11. Un quasiminimum typique. L'un des deux domaines de John n'est pas d'accès non-tangentiel (NTA).

Bibliographie.

- [Al] F. J. Almgren, Existence and regularity almost everywhere of solutions to elliptic variational problems with constraints, *Memoirs of the Amer. Math. Soc.* 165, volume 4 (1976), i-199.
- [DJe] G. David et D. Jerison, Lipschitz approximations to hypersurfaces, harmonic measure, and singular integrals, *Indiana U. Math. Journal.* 39, 3 (1990), 831-845.
- [DS1] G. David et S. Semmes, Quantitative rectifiability and Lipschitz mappings, *Transactions A.M.S.* 337 (1993), 855-889.
- [DS2] G. David et S. Semmes, Analysis of and on uniformly rectifiable sets, A.M.S series of Mathematical surveys and monographs, Volume 38, 1993.
- [DS3] G. David et S. Semmes, Uniform rectifiability and Singular sets, à paraître, *Annales de l' I.H.P.*
- [DS4] G. David et S. Semmes, Quasiminimal surfaces of codimension 1 and John domains, préprint IHES, 1996.
- [DS5] G. David et S. Semmes, Surfaces quasiminimales de codimension 1: un morceau de démonstration, actes du colloque E.D.P. de St Jean de Monts, Juin 1996.
- [DS6] G. David et S. Semmes, Uniform rectifiability of quasiminimal surfaces of codimension 1 (titre approximatif), preprint, fin 1996.
- [JKV] P. Jones, N. Katz et A. Vargas, Checkerboards, Lipschitz functions and uniform rectifiability, à paraître, *Revista Mat. Iberoamericana*.
- [Ma] P. Mattila, Geometry of sets and measures in Euclidean space, Cambridge University Press 1995.
- [Po] C. Pommerenke, Boundary behaviour of conformal maps, *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften* 299, Springer-Verlag 1992.
- [Se1] S. Semmes, A criterion for the boundedness of singular integrals on hypersurfaces, *Trans. A.M.S.* 311, 2 (1989), 501-513.
- [Se2] S. Semmes, Analysis, geometry, and topology with little smoothness, nontrivial structure, and infinite complexity, *Proceedings of the I.C.M. Kyoto*.
- [St] E. M. Stein, Singular integrals and differentiability properties of functions, Princeton university press 1970 .

Guy David,
Université de Paris-Sud (Orsay)
Mathématiques, Bat 425
91405 Orsay Cedex, France

Stephen Semmes
Mathematics, Rice University,
P.O. Box 1892,
Houston Texas 77005, USA