J.-Y. Chemin

Poches de tourbillon à bord singulier

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1994-1995), exp. n° 12, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1994-1995____A12_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1994-1995

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

POCHES DE TOURBILLON A BORD SINGULIER

J.-Y. CHEMIN

Exposé n° XII

20 Décembre 1994

Introduction

L'objet de ce texte est l'étude du problème de la régularité du bord d'une poche de tourbillon. Cette question est une question classique de la mécanique des fluides bidimensionnels. Considérons donc une solution du système d'Euler dans $\mathbf{R}^2$

$$(E)\begin{cases} \partial_t v + v\cdot\nabla v &= -\nabla p \\ \operatorname{div} v &= 0 \\ v_{|t=0} &= v_0. \end{cases}$$

Supposons que le champ de vecteurs v à l'instant initial ait un tourbillon (c'est-à-dire le rotationnel) ω_0 borné et à support compact[1]. D'après un théorème célèbre de Yudovich (voir [8]), on sait que, dans ce cas, il existe une unique solution globale (en temps) du système (E) dont, à chaque instant, le tourbillon est borné et à support compact. Énonçons le théorème précis. Pour cela, on définit, comme dans [5], l'espace E_m des champs de vecteurs de divergence nulle qui sont somme d'un champ de vecteurs de divergence nulle L^2 et d'une solution stationnaire indéfiniment différentiable dont le rotationnel est une fonction radiale, indéfiniment différentiable à support compact, nulle près de l'origine et d'intégrale m. Il est aisé de démontrer que, si le rotationnel ω d'un champ de vecteurs de divergence nulle est borné à support compact, ce champ de vecteurs appartient $E_{\int\omega}$ (voir par exemple le lemme 1.3.1 de [5]).

Théorème 0.1 *Soient m un réel et v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à l'espace E_m. Supposons en outre que ω_0 appartienne à $L^\infty \cap L^1$. Il existe alors une unique solution (v,p) de (E) appartenant à l'espace $C(\mathbf{R}; E_m)\times L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; L^2)$ et telle que le tourbillon ω du champ de vecteurs v appartienne à $L^\infty(\mathbf{R}^3)\cap L^\infty(\mathbf{R}; L^1(\mathbf{R}^2))$.*

De plus, ce champ de vecteurs v possède un flot. Plus précisément, il existe une unique application ψ continue de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^2$ dans $\mathbf{R}^2$ telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))ds.$$

En outre, il existe une constante C telle que

$$\psi(t) - \mathrm{Id} \in C^{\exp(-Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1})}.$$

Ce résultat repose sur le trait caractéristique des fluides bidimensionnels, à savoir que le tourbillon est conservé le long des lignes de flot du champ de vecteurs solution, ce qui s'écrit

$$\partial_t\omega + v\cdot\nabla\omega = 0. \tag{1}$$

Le problème des poches de tourbillon consiste à supposer que le tourbillon est, à l'instant initial, la fonction caractéristique d'un domaine borné régulier. Dans ce cas, nous avons démontré que le bord reste régulier pour tout temps dans [3] et [4] (voir aussi [2] et [7]). Dans cet exposé, nous supposerons que le bord présente des points singuliers, par exemple des coins ou des cusps. Le but de cet exposé est de démontrer, que, pour tout temps t, le tourbillon est la fonction caractéristique d'un domaine dont le bord est régulier sauf aux points qui sont images par le flot des points singuliers du domaine initial.

Ce problème peut sembler académique. Pour motiver cette étude, nous voudrions rappeler un résultat obtenu en collaboration avec H. Bahouri dans [1]. Soit ω_0 la fonction sur le plan

[1] Cette hypothèse simplificatrice sera faite dans toute la suite du texte

$\mathbf{R}^2$ nulle en dehors de $[-1,1] \times [-1,1]$, impaire en les deux variables x_1 et x_2 et valant 2π sur $[0,1] \times [0,1]$. Considèrons le champ de vecteurs v_0 défini par

$$v_0(x_1, x_2) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_2 - y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int \frac{x_1 - y_1}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy. \end{cases}$$

On a alors l'énoncé suivant.

Théorème 0.2 *Soit v la solution de l'équation d'Euler associée à la donnée initiale v_0 définie ci-dessus. À l'instant t, le flot $\psi(t)$ du champ de vecteurs v n'appartient à C^α pour aucun $\alpha > \exp -t$.*

Comme nous le verrons dans la suite, le théorème général que nous allons démontrer contient les exemples tels que celui-ci.

La structure de l'article sera la suivante :

- dans une première section, nous allons rappeler comment l'on peut contrôler la norme Lipschitz d'un champ de vecteurs à partir de la norme L^∞ du tourbillon et d'une régularité additionnelle sur le tourbillon ;
- dans une deuxième section, nous énoncerons le théorème général et expliquerons comment il répond effectivement au problème posé ;
- dans la dernière section, nous tenterons de donner une idée de la démonstration en exposant notamment l'un des ingrédients qui est le caractère "pseudo-local" de la théorie de Littlewood-Paley.

1 Estimation stationnaire

Nous allons rappeler ici une condition suffisante pour que, si une fonction u est bornée $\partial_i \partial_j \Delta^{-1} u$ le soient aussi. Cette condition suffisante a été démontrée dans [3] et [4]. Nous allons ici en donner une version localisée. Sa démonstration nécessite des modifications mineures exposées dans [5]. En termes de mécanique des fluides, ceci revient à trouver comment majorer les dérivées du champ des vitesses des particules à partir de la norme L^∞ du tourbillon. Introduisons les définitions suivantes. Dans toute la suite, on désignera par ϵ un quelconque réel de l'intervalle $]0,1[$ et par Σ un quelconque fermé du plan (éventuellement vide).

Définition 1.1 *Soit $X = (X_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ une famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence. Une telle famille est dite admissible en dehors de Σ si et seulement si l'on a*

$$I(\Sigma, X) = \inf_{x \notin \Sigma} \sup_{\lambda \in \Lambda} |X_\lambda(x)| > 0.$$

Définissons maintenant la notion de régularité tangentielle par rapport à une telle famille de champs de vecteurs. Rappelons auparavant que, si $0 < \epsilon < 1$, C^ϵ désigne l'espace des distributions $u = u_0 + \sum_j \partial_j u_j$ avec $(u_j)_{0 \le j \le d} \subset C^\epsilon$.

Définition 1.2 *Soit X une famille régulière de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence et admissible en dehors de Σ. On désigne par $C^\epsilon(\Sigma, X)$ l'ensemble des distributions u appartenant à L^∞ telles que, pour tout λ, on ait*

$$X_\lambda(x, D)u \stackrel{\text{déf}}{=} \operatorname{div}(u X_\lambda) - u \operatorname{div} X_\lambda \in C^{\epsilon - 1}.$$

Avant d'énoncer le théorème, posons

$$\begin{aligned}
N_\epsilon(\Sigma, X) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_\lambda\|_\epsilon}{I(\Sigma, X)},\\
\|u\|^{\epsilon,0}_{\Sigma,X} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_0 + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x, D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)} \quad \text{et}\\
\|u\|^{\epsilon}_{\Sigma,X} &= N_\epsilon(\Sigma, X)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_\lambda(x, D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma, X)}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0, 1[$ et pour tout fermé Σ du plan, on ait la propriété suivante.*

Soit X une quelconque famille de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence ; on suppose que X est admissible en dehors de Σ. On considère alors une fonction ω appartenant à $C^\epsilon(\Sigma, X)$. Si v est le champ de vecteurs de divergence nulle, de gradient L^a et de tourbillon ω, alors le gradient de v est borné et l'on a

$$\|\nabla v\|_{L^\infty(\Sigma^c)} \le C\|\omega\|_{L^1} + \frac{C}{\epsilon}\|\omega\|_{L^\infty} \log\Big(e + \frac{\|\omega\|^\epsilon_{\Sigma,X}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\Big).$$

2 Énoncé des résultats

Avant d'énoncer le théorème général, nous allons exposer un cas particulier. Soient f_0 une fonction réelle du plan de classe $C^{1+\epsilon}$ et Γ_0 une réunion finie de courbes fermées continues simples se coupant en un nombre fini de points. On suppose que Γ_0 est l'ensemble des zéros de f_0. Désignons par Σ_0 l'ensemble singulier de Γ_0, c'est-à-dire l'ensemble des points de Γ_0 où le gradient de f_0 s'annule. Pour éviter la présence d'arcs tangents entre eux à l'ordre infini, on suppose l'existence d'un voisinage V_0 de Γ_0 telle que, pour tout point x de V_0, on ait

$$|\nabla f_0(x)| \ge d(x, \Sigma_0)^{-\gamma_0}.$$

Considérons maintenant ω_0 la fonction caractéristique de la réunion des intérieurs des courbes constituant Γ_0. Le problème sur lequel nous allons nous pencher pour conclure ce livre est le suivant : soit v_0 le champ de vecteurs de divergence nulle dont le tourbillon est ω_0 ; désignons par v la solution de Yudovich du système d'Euler. Le tourbillon $\omega(t)$ est-il, à l'instant t, la fonction caractéristique d'un domaine du même type?

La réponse sera moins définitive que lorsque le bord du domaine est régulier. Néammoins, nous obtiendrons le résultat suivant :

Théorème 2.1 *Soit D_0 un domaine borné du plan dont le bord Γ_0 est une courbe de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors d'un fermé Σ_0. Considérons la solution de Yudovich associée au champ de vecteurs v_0 de l'espace E_m tel que $\omega(v_0) = \mathbf{1}_{D_0}$.*

A l'instant t, le domaine $D(t) = \psi(t, D_0)$ a un bord $\Gamma(t)$ qui est de classe $C^{1+\epsilon}$ en dehors du fermé $\Sigma(t) = \psi(t, \Sigma_0)$.

Nous n'allons bien sûr pas démontrer un tel théorème sous cette forme. La méthode employée s'inspire de celle utilisée pour le cas régulier. Quelques difficultés supplémentaires apparaissent. En effet, comme le montrent l'exemple de l'introduction, il est vain d'espérer que le champ de vecteurs solution, ou même son flot, soit lipschitzien. Transporter une structure géométrique, c'est-à-dire des champs de vecteurs, par un champ de vecteurs non lipschitzien entraîne une difficulté.

Pour parer à cette difficulté née du manque de régularité du champ de vecteurs v, nous allons étudier le champ de vecteurs v et la structure géométrique liée au bord du domaine, en restant prudemment à une distance strictement plus grande que h de l'ensemble singulier Σ, h étant un petit paramètre strictement positif.

Introduisons les données géométriques, puis énonçons le théorème général relatif à leur persistance.

Si A est un ensemble du plan, et α un réel strictement positif, on désignera par A_α l'ensemble des points du plan à distance inférieure ou égale à α de A. De plus, dans toute la suite, on conviendra, dans le but d'éviter d'inutiles paranthèses, que A_α^c est l'ensemble des points à distance plus grande que α de A.

Définition 2.1 *Soient Σ un fermé du plan et Ξ un triplet (α, β, γ) de réels ; on considère une famille $\mathcal{X} = (X_{\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}$ de champs de vecteurs de classe C^ϵ ainsi que leur divergence. On pose $\mathcal{X}_h = (X_{\lambda,h})_{\lambda\in\Lambda}$.*

La famille $\mathcal{X}$ sera dite Σ-admissible d'indice Ξ si et seulement si les trois propriétés suivantes sont satisfaites :

$$\forall(\lambda, h) \in \Lambda\times]0, e^{-1}]\,, \ \text{Supp}\ X_{\lambda,h} \subset \Sigma^c_{h^\alpha}\,; \tag{2}$$

$$\mathcal{I}_\gamma(\Sigma, \mathcal{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} \inf_{h\in]0,e^{-1}]} h^\gamma I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) > 0\,; \tag{3}$$

$$\mathcal{N}_\epsilon(\mathcal{X}) \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta} N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) < \infty, \tag{4}$$

où, comme dans la section précédente, on définit $I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)$ et $N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)$ par

$$\begin{aligned} I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) &= \inf_{x\notin\Sigma_h} \sup_{\lambda\in\Lambda} |X_{\lambda,h}(x)| \quad \textit{et} \\ N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h) &= \frac{1}{\epsilon} \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_{\lambda,h}\|_\epsilon}{I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)}. \end{aligned}$$

Remarque De telles familles étant censées décrire des géométries singulières dont le lieu singulier est Σ, il est naturel de penser β et γ comme deux nombres strictement négatifs, ce qui sera toujours le cas.

Introduisons maintenant la notion de régularité tangentielle par rapport à une telle famille.

Définition 2.2 *Soient Σ un fermé du plan et $\mathcal{X}$ une famille Σ-admissible d'indice $\Xi = (\alpha, \beta, \gamma)$. On dit qu'une fonction u appartient à l'espace $C^{\epsilon,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}}$ si et seulement si la fonction u est bornée et*

$$\|u\|^{\epsilon,\beta}_{\Sigma,\mathcal{X}} \stackrel{\text{déf}}{=} \sup_{h\in]0,e^{-1}]} h^{-\beta} \|u\|^\epsilon_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h} < \infty,$$

où, comme dans la section précédente, $\|u\|^\epsilon_{\Sigma_h,\mathcal{X}_h}$ est définie par

$$\|u\|^\epsilon_{\Sigma_h,X_h} = N_\epsilon(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)\|u\|_{L^\infty} + \sup_{\lambda\in\Lambda} \frac{\|X_{\lambda,h}(x, D)u\|_{\epsilon-1}}{I(\Sigma_h, \mathcal{X}_h)}.$$

Nous allons maintenant énoncer le théorème de persistance des structures géométriques singulières qui contient le théorème 2.1 précédent.

Théorème 2.2 *Soient* Σ_0 *un fermé du plan et* m *un réel. On considère un champ de vecteurs de divergence nulle* v_0 *appartenant à* E_m *et dont le tourbillon* ω_0 *est borné et à support compact. Désignons par* v *la solution de Yudovitch du système d'Euler, par* ψ *son flot et posons* $\Sigma(t) = \psi(t, \Sigma_0)$*. On se donne alors une famille* $\mathcal{X}_0$ *de champs de vecteurs de classe* C^ϵ *ainsi que leur divergence. On suppose que cette famille est d'indice* $\Xi_0 = (\alpha_0, \beta_0, \gamma_0)$ *et que*

$$\omega_0 \in C^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Alors, pour tout temps t*, il existe une famille* $\mathcal{X}(t)$ *de champs de vecteurs de classe* C^ϵ *ainsi que leur divergence ; cette famille* $\mathcal{X}(t)$ *est* $\Sigma(t)$*-admissible d'indice* $\Xi(t)$ *et l'on a*

$$\omega(t) \in C^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)},$$

l'indice $\Xi(t)$ *étant donné par*

$$\begin{aligned}
\Xi(t) &= (\alpha(t), \beta(t), \gamma(t)) \quad \textit{avec} \\
\alpha(t) &= \alpha_0 \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}), \\
\beta(t) &= \left(\beta_0 - \frac{C}{\epsilon} L(\omega_0, t)\right) \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}), \\
\gamma(t) &= \left(\gamma_0 - \frac{C}{\epsilon} L(\omega_0, t)\right) \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}) \quad \textit{et} \\
L(\omega_0, t) &= \left(\log\left(e + \frac{\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1}}\right) - \beta_0\right)\left(e^{\frac{1}{\epsilon}\exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty \cap L^1})} - e^{\frac{1}{\epsilon}}\right).
\end{aligned}$$

De plus, on sait que, pour tout $(\lambda, h) \in \Lambda \times]0, e^{-1}]$*, on a*

$$X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x, D)\psi(t, x) \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^\epsilon).$$

Enfin, le champ de vecteurs $v(t)$ *est lipschitzien en dehors de* $\Sigma(t)$ *; plus précisément, on a*

$$\sup_{h \in]0,e^{-1}]} \frac{\|\nabla v(t)\|_{L^\infty((\Sigma(t))^c_h)}}{-\log h} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}).$$

Ce théorème est démontré en détail dans [5].

3 Ébauche de démonstration

Vérifier que le théorème 2.2 implique le théorème 2.1 est aisé (voir [5]). Le point principal est la démonstration est la propagation de la régularité tangentielle décrite par la famille $\mathcal{X}_0$. Pour cela, il faut être capable de démontrer des estimations de propagation pour des équations de transport relatives à des champs de vecteurs non lipschitziens. On sait bien, d'après [1] et [6], que ceci n'est pas possible sans perte de régularité. Ici, l'idée consiste à tirer parti de l'annulation, près de la singularité du champ de vecteurs v, des champs de vecteurs que l'on transporte. On perd alors, non pas de la régularité, mais des puissances de la distance à l'ensemble singulier.

Précisons cela. On définit tout d'abord les espaces normés suivants. Le but de cette section est la démonstration de quelques lemmes qui montrent le caractère "pseudo-local" de la théorie de Littlewood-Paley. Dans toute la suite, nous utiliserons divers espaces fonctionnels que nous allons définir dès maintenant.

Définition 3.1 *On désigne par LL l'ensemble des fonctions logarithmiquement lipschitziennes, c'est-à-dire l'ensemble des fonctions telles que*

$$\|u\|_{LL} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{\substack{x \neq y \\ |x-y| \leq e^{-1}}} -\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y| \log |x-y|} < \infty.$$

Un réel a plus grand que 1 étant donné, on appelle L (nous omettrons toujours de noter la dépendance en a) l'espace des fonctions u telles que

$$\|u\|_L \overset{\text{déf}}{=} \sup_{b \geq a} \frac{\|u\|_{L^b}}{b} < \infty.$$

Soit Σ un fermé du plan, on appelle $L(\Sigma)$ l'espace des fonctions u telles que

$$\|u\|_{L(\Sigma)} \overset{\text{déf}}{=} \sup_{h \leq e^{-1}} \frac{\|u\|_{L^\infty(\Sigma_h^c)}}{-\log h} < \infty \ ;$$

on appelle $LL(\Sigma)$ l'espace $L \cap L(\Sigma)$ et l'on pose

$$\|u\|_{LL(\Sigma)} = \|u\|_L + \|u\|_{L(\Sigma)} \ ;$$

et enfin, on appelle $LL^0(\Sigma)$, l'espace $LL(\Sigma) \cap C^0_\star$ et l'on pose

$$\|u\|_{LL^0(\Sigma)} = \|u\|_{LL(\Sigma)} + \|u\|_0.$$

Le lemme clef est le suivant

Lemme 3.1 *Soit v un champ de vecteurs de divergence nulle indéfiniment différentiable. Posons*

$$V(t) = \|\nabla v\|_{LL(\Sigma_t)} + \|\omega_0\|_{L^\infty} \quad et \quad W(t) = V(t) \exp \int_0^t \|v(\tau)\|_{LL} d\tau.$$

Considérons une fonction f appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}; C^r)$, avec r dans l'intervalle $]-1,1[$ solution de

$$(T) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) & = & g_1(t) + g_2(t) \\ f_{|t=0} & = & f_0. \end{array} \right.$$

Si le support de f_0 est inclus dans $(\Sigma_0)^c_h$, si, pour tout temps t, le support de $g_1(t) + g_2(t)$ est inclus dans $(\Sigma_t)^c_{\delta(t,h)}$, et si l'on a

$$\|g_2(t)\|_r \leq -C(r) W(t) \|f(t)\|_r \log h,$$

alors, la fonction f vérifie l'inégalité suivante :

$$\|f(t)\|_r \leq \|f_0\|_r h^{-C(r)\int_0^t W(\tau)d\tau} + \int_0^t h^{-C(r)\int_\tau^t W(\tau')d\tau'} \|g_1(\tau)\|_r d\tau.$$

Admettons un instant ce résultat. On en déduit sans trop de peine la proposition suivante :

Proposition 3.1 *Il existe une constante C, telle que, pour tout ϵ de l'intervalle $]0,1[$, et pour tout champ de vecteurs X_0 comme ci-dessus, si X est solution de*

$$(TG) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t X + v \cdot \nabla X & = & X(t,x,D)v \\ X_{|t=0} & = & X_0, \end{array} \right.$$

on ait

$$\|X(t,x,D)\omega(t)\|_{\epsilon-1} \leq \|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1} h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau} \tag{5}$$

$$\|\operatorname{div} X(t)\|_\epsilon \leq \|\operatorname{div} X_0\|_\epsilon h^{-C\int_0^t W(\tau)d\tau} \tag{6}$$

$$\|X(t)\|_\epsilon \leq C\Big(\|X_0\|_\epsilon + \|\operatorname{div} X_0\|_\epsilon + \epsilon\frac{\|X_0(x,D)\omega_0\|_{\epsilon-1}}{\|\omega_0\|_{L^\infty}}\Big) h^{-\frac{C}{\epsilon}\int_0^t W(\tau)d\tau}. \tag{7}$$

Considérons une famille Σ_0-admissible $\mathcal{X}_0$ et un champ de vecteurs v indéfiniment différentiable. On définit alors le champ de vecteurs $\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s)$ par le système suivant :

$$(TG')\left\{\begin{array}{rcl}\partial_s\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s) + v(s,x)\cdot\nabla\widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s) & = & \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(s,x,D)v(s,x)\\ \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(0,x) & = & X_{0,\lambda,\delta(t,h)}(x).\end{array}\right.$$

On définit alors $\mathcal{X}(t)$ par

$$X_{t,\lambda,h}(x) = \widetilde{X}_{t,\lambda,h}(t,x) \quad \text{et} \quad \mathcal{X}(t) = (X_{t,\lambda,h})_{(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]}. \tag{8}$$

À partir de la proposition 3.1, on établit facilement le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Il existe une constante C vérifiant les assertions suivantes. Soient v_0 un champ de vecteurs de divergence nulle de E_m, Σ_0 un fermé du plan et $\mathcal{X}(0)$ une famille Σ_0-admissible d'indice $\Xi_0 = (\alpha_0,\beta_0,\gamma_0)$. Supposons que*

$$\omega_0 \in L^\infty_0 \cap C^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}(0)}.$$

Alors, on a les propriétés suivantes.

- *Les champs de vecteurs $X_{t,\lambda,h}$ définis par la relation (8) appartiennent, pour tout couple $(\lambda,h)\in\Lambda\times]0,e^{-1}]$ à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R};C^\epsilon)$.*
- *La famille $\mathcal{X}(t)$ définie par la relation (8) est une famille $\Sigma(t)$-admissible d'indice $\Xi(t) = (\alpha(t),\beta(t),\gamma(t))$ avec*

$$\begin{array}{rcl}\alpha(t) & = & \alpha_0 E(\omega_0,t),\\ \beta(t) & = & \Big(\beta_0 - \dfrac{C}{\epsilon}L(\omega_0,t)\Big)E(\omega_0,t),\\ \gamma(t) & = & \Big(\gamma_0 - \dfrac{C}{\epsilon}L(\omega_0,t)\Big)E(\omega_0,t),\\ E(\omega_0,t) & = & \exp(Ct\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}) \quad \textit{et}\\ L(\omega_0,t) & = & \bigg(\log\Big(e + \dfrac{\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}}{\|\omega_0\|_{L^\infty\cap L^1}}\Big) - \beta_0\bigg)\Big(e^{\frac{1}{\epsilon}E(\omega_0,t)} - e^{\frac{1}{\epsilon}}\Big).\end{array}$$

- *Enfin, la régularité de $\omega(t)$ est ainsi décrite :*

$$\omega(t) \in C^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)} \quad \textit{et} \quad \|\omega(t)\|^{\epsilon,\beta(t)}_{\Sigma(t),\mathcal{X}(t)} \leq C\|\omega_0\|^{\epsilon,\beta_0}_{\Sigma_0,\mathcal{X}_0}.$$

Revenons maintenant à la démonstration du lemme 3.1. Sa preuve repose sur la théorie de Littlewood-Paley et le calcul paradifférentiel. Rappelons l'existence d'une partition de l'unité dyadique, c'est à dire d'une fonction φ supportée dans une couronne $\mathcal{C}$ et telle que, si

$$\chi(\xi) = 1 - \sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi),$$

alors χ est indéfiniment différentiable à support compact. On désignera par H la transformée de Fourier inverse de φ et par Δ_q l'opérateur

$$\Delta_q u = \mathcal{F}^{-1}(\varphi(2^{-q}\xi)\widehat{u}(\xi)) = 2^{qd}H(2^q\cdot) \star u$$

et l'on pose

$$S_q = \chi(D) + \sum_{p=0}^{q-1} \Delta_p.$$

On rappelons également la définition des espaces de Hölder dans ce cadre.

Définition 3.2 *Soit r un réel, on désigne par C^r l'espace des distributions tempérées telles que l'on ait*

$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C 2^{-qr}.$$

Cette définition coïncide bien sûr avec la définition usuelle lorsque r est strictement compris entre -1 et 1. Pour démontrer le lemme 3.1, on applique l'opérateur Δ_q à l'équation (T), d'où

$$\partial_t \Delta_q f + v \cdot \nabla \Delta_q f = \Delta_q g + [\Delta_q, v \cdot \nabla] f.$$

Supposons démontrer que

$$\|[\Delta_q, v \cdot \nabla] f\|_{L^\infty} \leq -C(r) 2^{-qr} W(t) \|f\|_r \log h. \tag{9}$$

En intégrant cette inégalité et en appliquant le lemme de Gronwall, on trouve le résultat voulu.

C'est la démonstration de l'inégalité (9) ci-dessus qui nécessite l'utilisation du caractère "pseudo-local" de la théorie de Littlewood-Paley. Nous renvoyons à [5] pour les détails de la preuve. Nous nous contenterons de donner ici la démonstration de l'inégalité suivante.

Lemme 3.2 *Soit g une fonction de $\mathcal{S}$. Un réel strictement positif λ étant donné, on posera $g_\lambda(x) = \lambda^d g(\lambda x)$. Pour tout réel positif N et pour tout réel r, il existe une constante C telle que, pour tout fermé K et pour toute distribution u appartenant à C^r et supportée dans K, on ait*

$$\|g_\lambda \star u\|_{L^\infty(K_h^c)} \leq C\lambda^{-r}(\lambda h)^{-N}\|u\|_r,$$

et ce pour tout couple de réels (λ, h) tel que λ et $\lambda h \geq 1$.

Soit ρ une fonction indéfiniment différentiable, positive, supportée dans la boule unité et valant identiquement 1 sur la boule de rayon $1/2$ centrée à l'origine. Il est alors clair que

$$\begin{aligned} (g_\lambda \star u)(x) &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} g(\lambda(x-y))u(y)dy \\ &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} g(\lambda(x-y))(1-\rho)\left(\frac{\lambda(x-y)}{\lambda d(x,K)}\right) u(y)dy. \end{aligned} \tag{10}$$

Posons

$$\mu = \lambda d(x,K)\,, \ q_\lambda = [\log_2 \lambda] \quad \text{et} \quad \widetilde{g}^\mu(x) = g(x)(1-\rho)\Big(\frac{x}{\mu}\Big).$$

Remarquons que, pour tout α de $\mathbf{N}^d$ et tout couple d'entiers positifs (N, M), il existe une constante C telle que l'on ait

$$\||\cdot|^M \partial^\alpha \widetilde{g}^\mu\|_{L^1} \leq C\mu^{-N}. \tag{11}$$

D'après l'égalité (10) ci-dessus, il vient, pour tout x n'appartenant pas à K,

$$(g_\lambda \star u)(x) = (\widetilde{g}^\mu_\lambda \star u)(x).$$

De plus, pour tout x n'appartenant pas à K, on a

$$(g_\lambda \star u)(x) = \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} \widetilde{g}^\mu(\lambda(x-y))(u(y)-u(x))dy.$$

En décomposant u suivant la taille par rapport à λ de ses fréquences, il vient alors, pour tout x n'appartenant pas à K,

$$\begin{aligned} (g_\lambda \star u)(x) &= \sum_{j=1}^{3} I^j_\lambda(x) \quad \text{avec} \\ I^1_\lambda(x) &= (\widetilde{g}^\mu_\lambda \star (\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u)(x), \\ I^2_\lambda(x) &= \lambda^d \int_{\mathbf{R}^d} \widetilde{g}^\mu(\lambda(x-y))(S_{q_\lambda}u(y) - S_{q_\lambda}u(x))dy \quad \text{et} \\ I^3_\lambda(x) &= -((\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u)(x) \int_{\mathbf{R}^d} \widetilde{g}^\mu(y)dy. \end{aligned} \tag{12}$$

Majorons $I^1_\lambda(x)$. Remarquons tout d'abord que

$$I^1_\lambda(x) = < (\widetilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot), (\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u > .$$

Les multiplicateurs de Fourier réels sont auto-adjoints et invariants par translation, donc

$$I^1_\lambda(x) = < ((\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})(\widetilde{g}^\mu)_\lambda)(x-\cdot), u > .$$

Par construction des opérateurs Δ_q, on a

$$|I^1_\lambda(x)| \leq \sum_{\substack{q\geq q_\lambda \\ |j|\leq 1}} \|\Delta_q((\widetilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot))\|_{L^1} \|\Delta_{q-j}u\|_{L^\infty}.$$

Par définition des espaces de Hölder, il vient

$$|I^1_\lambda(x)| \leq C\|u\|_r \sum_{q\geq q_\lambda} 2^{-qr} \|\Delta_q((\widetilde{g}^\mu)_\lambda(x-\cdot))\|_{L^1}.$$

Majorons maintenant la quantité

$$\sum_{q\geq q_\lambda} 2^{-qr}\|\Delta_q(\widetilde{g}^\mu)_\lambda\|_{L^1} = \sum_{q\geq q_\lambda} 2^{-qr} \int_{\mathbf{R}^d} \Big| \int_{\mathbf{R}^d} 2^{qd}\lambda^d h(2^q(x-y))\widetilde{g}^\mu(\lambda y)dy \Big| dx.$$

On utilise le changement de variables

$$\left\{ \begin{array}{rcl} y' &=& \lambda y \\ q' &=& q - q_\lambda \\ x' &=& \lambda x \ ; \end{array} \right.$$

d'où il ressort que

$$\sum_{q\geq q_\lambda} 2^{-qr}\|\Delta_q(\widetilde{g}^\mu)_\lambda\|_{L^1} \leq C\lambda^{-r} \sum_q 2^{-qr}\|\Delta_q\widetilde{g}^\mu\|_{L^1}.$$

Vu la définition de $\widetilde{g}^{\mu}$, la définition des opérateurs Δ_q assure que

$$\sum_q 2^{-qr}\|\Delta_q\widetilde{g}^{\mu}\|_{L^1} \leq C \sum_{|\alpha|\leq\max\{0,[r]+1\}} \|\partial^{\alpha}\widetilde{g}^{\mu}\|_{L^1},$$

ce qui, d'après (11), assure que

$$\sum_q 2^{-qr}\|\Delta_q\widetilde{g}^{\mu}\|_{L^1} \leq C_N(\lambda d(x,K))^{-N}.$$

D'où il vient que, pour tout réel r, on a

$$|I^1_\lambda(x)| \leq C\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}\|u\|_r.$$

Supposons maintenant r strictement négatif. Il est clair que

$$\begin{aligned} |I^2_\lambda(x) + I^3_\lambda(x)| &= |(\widetilde{g}^{\mu})_\lambda \star S_{q_\lambda}u(x)| \\ &\leq \|\widetilde{g}^{\mu}\|_{L^1}\|S_{q_\lambda}u\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

D'après les inégalités (11) et la définition 3.2, il en résulte que

$$|I^2_\lambda(x) + I^3_\lambda(x)| \leq C_{N,r}\|u\|_r\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}, \tag{13}$$

ce qui entraîne que, pour tout réel r strictement négatif,

$$\|(g_\lambda \star u)\|_{L^\infty(K^c_h)} \leq C\lambda^{-r}(\lambda d(x,K))^{-N}\|u\|_r. \tag{14}$$

Supposons maintenant r positif. On sait bien (voir par exemple la formule (2.2) de [5]) qu'il existe une suite de fonctions $(g^\alpha)_{|\alpha|=[r]+1}$ dont les transformées de Fourier sont supportées dans une couronne fixe et telle que, pour tout entier q, on ait

$$\Delta_q u = \sum_{|\alpha|=[r]+1}^{d} 2^{-q([r]+1)}(g^\alpha)_{2^q} \star \partial^\alpha u.$$

Comme le support de $\partial^\alpha u$ est inclus dans celui de u, et que $r-[r]-1$ est strictement négatif, il résulte de l'inégalité (14) que, pour tout N et pour tout réel r,

$$|\Delta_q u(x)| \leq C_N 2^{-qr}(2^q d(x,K))^{-N}\|u\|_r. \tag{15}$$

Majorons $|I^2_\lambda(x)|$. Pour cela, remarquons que, pour tout α de $\mathbf{N}^d$ et tout x n'appartenant pas au support de u, on a

$$\begin{aligned} S_q\partial^\alpha u(x) &= S_q\partial^\alpha u(x) - \partial^\alpha u(x) \\ &= \sum_{p\geq q}\partial^\alpha\Delta_p u(x). \end{aligned}$$

On déduit de l'inégalité (15) ci-dessus que

$$|S_q\partial^\alpha u(x)| \leq C_{\alpha,N}2^{-q(r-|\alpha|)}(2^q d(x,K))^{-N}\|u\|_r.$$

L'inégalité de Taylor à l'ordre $[r]+1$ assure que

$$\begin{aligned} |S_{q_\lambda}u(y) - S_{q_\lambda}u(x)| \leq \sum_{j=0}^{[r]} C_j|y-x|^j \sup_{|\alpha|=j}|S_{q_\lambda}\partial^\alpha u(x)| \\ + C_r|y-x|^{[r]+1}\sup_{|\alpha|=[r]+1}\|S_{q_\lambda}\partial^\alpha u\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Grâce aux inégalités (11) et (15) ci-dessus, on a, comme $\lambda h \geq 1$,

$$|I_\lambda^2(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} \int_{\mathbf{R}^d} (1+|y|)^{[r]+1} |\widetilde{g}^\mu(y)| dy,$$

ce qui, d'après l'inégalité (11), entraîne que

$$|I_\lambda^2(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} (\lambda d(x,K))^{-N}.$$

Le terme $|I_\lambda^3(x)|$ est très facile à majorer. En effet, d'après l'inégalité (15), on a, comme x est supposé ne pas appartenir à K,

$$|(\mathrm{Id} - S_{q_\lambda})u(x)| \leq C_{N,r} \|u\|_r d(x,K)^{-N} \sum_{q \geq q_\lambda} 2^{-q(r+N)}.$$

D'où, en prenant $r+N$ strictement positif, il vient, pour tout r positif ou nul, pour tout N positif (strictement positif si $r=0$)

$$|I_\lambda^3(x)| \leq C\|u\|_r \lambda^{-r} (\lambda d(x,K))^{-N}.$$

Le lemme 3.2 est ainsi complètement démontré.

Références

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Équations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, *Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis*, **127**, 1994, pages 159–182.

[2] A. Bertozzi et P. Constantin, Global regularity for vortex patches, *Communication in Mathematical Physics*, **152**(1), 1993, pages 19–26.

[3] J.-Y. Chemin, Persistance des structures géométriques liées aux poches de tourbillon, *Séminaire Équations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique*, 1990-1991.

[4] J.-Y. Chemin, Persistance de structures géométriques dans les fluides incompressibles bidimensionnels, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **26**(4), 1993, pages 1–26.

[5] J.-Y. Chemin, *Fluides parfaits incompressibles*, Astéristique, **230**, 1995, à paraître.

[6] F. Colombini et N. Lerner, Hyperbolic operators with non-Lipschitz coefficients, *Duke Mathematical Journal*, **77**, 1995.

[7] P. Serfati, Une preuve directe d'existence globale des vortex patches 2D, *Notes aux Comptes-Rendus de l'Académine des Sciences de Paris*, **318**, Série I, 1993, pages 515–518.

[8] V. Yudovich, Non stationnary flows of an ideal incompressible fluid, *Zh. Vych. Math.* **3**, 1963, pages 1032–1066.

Jean-Yves Chemin
Laboratoire d'Analyse Numérique, URA 189 du CNRS
Université Paris VI, BP 187
75232 PARIS CEDEX 05
Courrier électronique : chemin@ann.jussieu.fr