

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

F. GOLSE

## **Approximation par la diffusion et automorphismes hyperboliques du tore**

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1993-1994), exp. n° 9,  
p. 1-13

[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1993-1994\\_\\_\\_A9\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994___A9_0)

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1993-1994

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### **APPROXIMATION PAR LA DIFFUSION ET AUTOMORPHISMES HYPERBOLIQUES DU TORE.**

**F. GOLSE**



# Approximation par la diffusion et automorphismes hyperboliques du tore.

FRANÇOIS GOLSE  
*Université Paris VII*

## 1. — Introduction.

Le but de cette note est de présenter quelques résultats d'approximation par la diffusion de modèles déterministes et réversibles d'équations de transport obtenus en collaboration avec C. Bardos.

Considérons une population de particules ponctuelles situées entre deux plaques planes horizontales distantes de  $h$ ; on suppose que les particules n'interagissent pas entre elles mais se réfléchissent sur les plaques de la manière suivante : la composante verticale du vecteur vitesse est changée en son opposée et la composante horizontale, qui est supposée paramétrée par  $\mathbf{T}^2 = \mathbf{R}^2/(2\pi\mathbf{Z})^2$ , est modifiée par action à droite d'un automorphisme hyperbolique de  $\mathbf{T}^2$  (voir figure 1).

Précisons un peu les notations :  $(x, z) \in \mathbf{R}^d \times (0, h)$  est la variable de position des particules, et on suppose que les composantes verticales des vitesses des particules prennent leurs valeurs dans l'ensemble  $\{+c, -c\}$ . On introduit un champ de directions horizontales  $a : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}^d$  suffisamment régulier (voir plus loin) et de moyenne nulle, et on suppose que les composantes horizontales des vitesses des particules sont de la forme  $ca(\omega)$ ,  $\omega \in \mathbf{T}^2$ . On note  $f_+(t, x, z, \omega)$  (resp.  $f_-(t, x, z, \omega)$ ) la densité des particules qui, à l'instant  $t$  occupent la position  $(x, z)$  et sont animées de la vitesse  $(ca(\omega), +c)$  (resp.  $(ca(\omega), -c)$ ).

On considère ensuite l'automorphisme hyperbolique du tore  $T$  défini par

$$T \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

L'application  $T : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{T}^2$  est de classe  $C^\infty$  et laisse invariante la mesure  $d\omega_1 d\omega_2/4\pi^2$ ; elle est de plus bijective et son inverse déterminé par

$$T^{-1} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \end{pmatrix} \pmod{2\pi}. \quad (2)$$

est également de classe  $C^\infty$ .

Le système des équations de Liouville pour les densités  $f^\pm$  est

$$\partial_t f^\pm + ca(\omega)\partial_x f^\pm \pm c\partial_z f^\pm = 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad 0 < z < h, \quad \omega \in \mathbf{T}^2. \quad (3)$$

Les conditions de réflexion sur les plaques sont données par

$$f^+(t, x, 0, \omega) = f^-(t, x, 0, T\omega), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \omega \in \mathbf{T}^2, \quad (4a)$$

$$f^-(t, x, h, \omega) = f^+(t, x, h, T\omega), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \omega \in \mathbf{T}^2. \quad (4b)$$

Finalement, on considèrera la condition initiale suivante :

$$f^\pm(0, x, z, \omega) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad 0 < z < h, \quad \omega \in \mathbf{T}^2; \quad (5)$$

cette condition initiale est compatible avec l'approximation du mouvement des particules par une diffusion horizontale lorsque  $h \rightarrow 0$ , ce qui est le résultat que l'on se propose d'établir dans ce travail : ainsi, en supposant que la donnée initiale (5) ne dépend pas des variables  $z$  et  $\omega$  appelées à disparaître à la limite, on élimine les difficultés liées à l'apparition d'une couche initiale. La méthode des caractéristiques permet d'écrire explicitement la solution sous la forme

$$f^\pm(t, x, z, \omega) = \phi\left(x - h \sum_{k=0}^{[ct/h]} a(T^k \omega)\right) + O(h). \quad (6)$$

La limite asymptotique conduisant à une diffusion horizontale consiste à faire tendre  $h$  vers 0 et à observer le système pour des temps longs. Pour cela, on introduit un petit paramètre  $\epsilon > 0$  et on change  $h$  en  $\epsilon h$  et  $t$  en  $t/\epsilon$ . Le problème devient

$$\epsilon^2 \partial_t f_\epsilon^\pm + \epsilon a(\omega) \partial_x f_\epsilon^\pm \pm c \partial_z f_\epsilon^\pm = 0, \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad 0 < z < h, \quad \omega \in \mathbf{T}^2. \quad (6)$$

$$f_\epsilon^+(t, x, 0, \omega) = f_\epsilon^-(t, x, 0, T\omega), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \omega \in \mathbf{T}^2, \quad (7a)$$

$$f_\epsilon^-(t, x, h, \omega) = f_\epsilon^+(t, x, h, T\omega), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad \omega \in \mathbf{T}^2, \quad (7b)$$

$$f_\epsilon^\pm(0, x, z, \omega) = \phi(x), \quad x \in \mathbf{R}^d, \quad 0 < z < h, \quad \omega \in \mathbf{T}^2. \quad (8)$$

Sa solution est donnée par la formule

$$f_\epsilon^\pm(t, x, z, \omega) = \phi\left(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{[ct/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega)\right) + O(\epsilon). \quad (9)$$

Il suffira donc d'étudier l'expression

$$\psi_\epsilon(t, x, \omega) = \phi\left(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{[ct/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega)\right) \quad (10)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

## 2.— Enoncé des résultats.

Dans ce qui suit, on utilisera systématiquement la notation

$$\langle F \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbf{T}^2} F(\omega) d\omega.$$

A l'application  $T$  définie par (1) est associé l'opérateur unitaire  $U_T$  de  $L^2(\mathbf{T}^2)$  défini par  $U_T f = f \circ T$ . (On vérifie aisément que son adjoint est défini par  $U_T^* f = U_T^{-1} f = f \circ T^{-1}$ ).

**Définition 1.** Un cobord est un élément de  $\text{Im}(I - U_T)$ . Deux fonctions de  $L^2(\mathbf{T}^2)$ ,  $f$  et  $g$ , sont homologues si et seulement si  $f - g$  est un cobord : on notera cette relation d'équivalence  $f \sim g$ .

La proposition suivante met en place les propriétés élémentaires de ce qui sera le coefficient de diffusion horizontale, dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ . Elle repose essentiellement sur une estimation de la décroissance des coefficients de corrélation  $\|\langle a \circ T^k \otimes a \rangle\|$  pour  $k \rightarrow \infty$ , qui est de type exponentiel en  $k$  pour  $a$  de classe de Sobolev  $H^s$  avec  $s > 0$ ). Le point 1) est classique : voir par exemple [1] (modulo une erreur mineure : le facteur  $\frac{1}{2}$  dans le membre de droite de (11) y étant oublié); et l'essentiel des idées pour le point 4) apparaît (sous une forme abstraite et dans le cas de fonctions  $a$  à valeurs scalaires) dans [2].

**Proposition 2.** Soit  $s > 0$  et  $a : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}^d$  dans la classe de Sobolev  $H^s(\mathbf{T}^2)$  telle que  $\langle a \rangle = 0$ .

1) La série suivante converge vers un nombre positif ou nul

$$D(a) = \frac{1}{2} \langle a^2 \rangle + \sum_{k \geq 1} \langle a \circ T^k \otimes a \rangle \geq 0. \quad (11)$$

2)  $\text{Im}(I - U_T)$  est dense dans  $L^2(\mathbf{T}^2)$ .

3) Soit  $\xi \in \mathbf{R}^d$  et  $b \in H^s(\mathbf{T}^2; \mathbf{R}^d)$  homologue à  $a$  telle que  $\langle a \rangle = 0$ . Si  $\xi \cdot a \sim \xi \cdot b$ ,  $\xi \cdot D(a)\xi = \xi \cdot D(b)\xi$ .

4) Soit  $\xi \in \mathbf{R}^d$ . Il y a équivalence entre les propriétés

i)  $\xi \cdot D(a)\xi = 0$ ;

ii)  $D(a)\xi = 0$ ;

iii) la suite indexée par  $N$  de fonctions de  $L^2(\mathbf{T}^2)$  définie par

$$\sum_{k=1}^N \xi \cdot a \circ T^k$$

est bornée dans  $L^2(\mathbf{T}^2)$ ;

iv)  $\xi \cdot a$  est un cobord.

Le résultat principal de ce travail est le

**Théorème 3.** Soit  $s > 0$  et  $a : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}^n$  dans la classe de Sobolev  $H^s(\mathbf{T}^2)$  telle que  $\langle a \rangle = 0$ . Soit une donnée initiale  $\phi \in C^2(\mathbf{R}^d)$ . Alors la famille  $\psi_\epsilon$  définie en (10) vérifie

$$\psi_\epsilon(t, x, \omega) \rightarrow u(t, x), \quad C^0([0, \tau], w^* - L^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^2)), \quad (12)$$

pour tout  $\tau > 0$ , où  $u$  est la solution de

$$\partial_t u = hc \nabla_x \cdot (D(a) \nabla_x u), \quad u(0, x) = \phi(x). \quad (13)$$

Et l'on a

$$\|f_\epsilon^\pm - \psi_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbf{R} \times \mathbf{R}^d \times (0, \epsilon h) \times \mathbf{T}^2)} = O(\epsilon). \quad (14)$$

Pour démontrer ce résultat, on imite la preuve de la formule d'Ito et on cherche à montrer que les moyennes des différents produits intervenant dans la formule se décorrèlent pour converger vers les produits des moyennes correspondantes. Dans la formule d'Ito, ceci est automatique car le mouvement brownien est par hypothèse un processus à accroissements indépendants. Ici, l'indépendance ne s'obtient que dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ , et elle est une conséquence des diverses propriétés de mélange héritées de l'application  $T$  : voir plus loin.

Un résultat analogue a été démontré par [3] pour les suspensions de sous-shifts de type fini sous des applications höldériennes. On pourrait se ramener à cette situation en codant la transformation  $T$  au moyen d'une partition de Markov ; toutefois le but de ce travail est de donner une preuve de ce type de résultat qui ne repose sur aucune notion de théorie ergodique et (dans le cas présent) n'utilise que des techniques élémentaires de séries de Fourier.

Bien que le modèle initial (6)-(7)-(8) soit "réversible" (il s'agit d'un flot hamiltonien brisé, donc biunivoque et préservant la mesure de l'espace des phases  $(\delta_c + \delta_{-c})dx dz d\omega$ ) l'équation limite (13) génère un semi-groupe défini uniquement pour  $t \geq 0$ . En particulier, la norme  $L^2(dx)$  de la solution de l'équation (13) est strictement décroissante pour  $t > 0$  et ne stationne que lorsque cette solution est spatialement constante (alors que la norme  $L^2((\delta_c + \delta_{-c})dx dz d\omega)$  est conservée au cours du temps). Le modèle (13) est donc en quelque sorte le modèle le plus simple de système irréversible. On doit toutefois prendre garde au point suivant : il est possible d'inverser le semi-groupe de la chaleur pour des temps courts et des fonctions holomorphes : c'est ce que réalise la formule d'inversion de la transformée de Fourier-Bros-Iagolnitzer due à Lebeau [4] dans le cas de  $\mathbf{R}^n$  : voir [5] pour les analogues de cette formule sur les variétés riemanniennes compactes réelles analytiques. Mais cette formule d'inversion n'est évidemment pas stable dans des espaces de fonctions non analytiques : or l'approximation du modèle (6)-(7)-(8) par (13) a effectivement lieu dans une topologie plus faible que celle de n'importe quel espace de fonctions holomorphes sur un voisinage ouvert de  $\mathbf{R}^n$  dans  $\mathbf{C}^n$  (celle de  $C^0([0, \tau], w^* - L^\infty(\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^2))$ ) (cf. (13)-(14)).

### 3.— Principe des démonstrations.

La preuve de la proposition 2 est basée sur la propriété "de mélange" suivante vérifiée par  $T$  :

(H1) pour tout  $f \in H^s(\mathbf{T}^2)$  le coefficient d'auto-corrélation de  $f$

$$C_f(n) = \langle f \circ T^n \cdot f \rangle - \langle f^2 \rangle$$

vérifie

$$C_f(n) = \|f\|_2^2 O(e^{-sn\alpha}) \text{ où } \alpha = \log\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).$$

Plus précisément on a le

**Lemme 4.** Soit  $0 \leq \chi(R) \rightarrow 0$  pour  $R \rightarrow +\infty$  décroissante et la classe de fonctions

$$H_\chi = \{f \in L^2(\mathbf{T}^2) \text{ t.q. } \sum_{|k_1|, |k_2| > R} |\hat{f}(k)|^2 \leq \chi(R)^2 \|f\|_2^2\}.$$

Pour tout  $f$  et  $g \in H_\chi$  telles que  $\langle f \rangle = \langle g \rangle = 0$ ,

$$|\langle f \circ T^n \cdot g \rangle| \leq \frac{1}{4\pi^2} \|f\|_2 \|g\|_2 \chi \left( \left( \frac{3+\sqrt{5}}{2} \right)^{n/2} \right) \quad (15)$$

Ce lemme précise quelque peu les résultats de [10].

**Preuve du lemme 4.** Pour démontrer ce résultat, on utilise la réduction de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \lambda_+ & 0 \\ 0 & \lambda_- \end{pmatrix}$$

où  $\theta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ ,  $\lambda_+ = 1 + \theta$  et  $\lambda_- = \lambda_+^{-1}$ . Notons  $\mu = (1 + \theta^2)^{-1/2}$ ; on a

$$Me_+ = \lambda_+ e_+, \quad Me_- = \lambda_- e_-, \quad \text{avec } e_+ = \mu \begin{pmatrix} \theta \\ 1 \end{pmatrix}, \quad e_- = \mu \begin{pmatrix} 1 \\ -\theta \end{pmatrix}.$$

On notera que  $(e_+, e_-)$  est une base orthonormée de vecteurs propres de  $M$ . Ensuite, puisque  $\theta$  a pour polynôme minimal sur  $\mathbf{Q}$   $X^2 - X - 1$  qui est de degré 2 à racines simples, on a l'estimation suivante concernant l'approximation rationnelle de  $\theta$  (dûe à Kronecker) :

$$\inf_{(p,q)=1} \left| \theta - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{1}{\theta q^2}. \quad (17)$$

Soit maintenant  $f$  et  $g \in L^2(\mathbf{T}^2)$  telles que  $\langle f \rangle = \langle g \rangle = 0$ ; la formule de Plancherel montre que

$$\langle f \circ T^n \cdot g \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \neq 0} \hat{f}(M^{-n}k) \hat{g}(-k)$$

et on décompose cette somme sur  $K_R$  et  $K_R^c$  où  $K_R$  est défini par

$$K_R = \{k \in \mathbf{Z}^2 \text{ t.q. } \sup(|k_1|, |k_2|) \leq R\}.$$

En utilisant l'appartenance de  $g$  à la classe  $H_\chi$  et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on voit que

$$\left| \sum_{k \in K_R^c} \hat{f}(M^{-n}k) \hat{g}(-k) \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \chi(R)$$

Pour  $k \in K_R$  écrivons que  $k = (k \cdot e_+)e_+ + (k \cdot e_-)e_-$  et remarquons, grâce à l'estimation de Kronecker, que

$$|k \cdot e_-| \geq \theta^{-1} |k|^{-1} \geq (\sqrt{2}R\theta)^{-1}$$

de sorte que

$$|M^{-n}k| \geq \frac{\lambda_+^n}{\sqrt{2R\theta}}.$$

Par conséquent

$$\left| \sum_{k \in K_R - \{0\}} \hat{f}(M^{-n}k) \hat{g}(-k) \right| \leq \|f\|_2 \|g\|_2 \chi \left( \frac{\lambda_+^n}{\sqrt{2R\theta}} \right)$$

en utilisant que  $f \in H_\chi$  et que  $\chi$  est décroissante. On conclut en choisissant  $R = \lambda_+^{n/2}$ . //

On peut maintenant esquisser la

**Preuve de la Proposition 2.** Le point 2) découle de l'ergodicité de l'application  $T$  par rapport à la mesure  $d\omega_1 d\omega_2$  et de l'application du théorème de Hahn-Banach, et le point 3) d'un calcul évident. Pour ce qui est du point 1), la convergence de la série découle immédiatement du lemme 4; il ne reste qu'à en établir la positivité. Observons que, par invariance de la mesure  $d\omega_1 d\omega_2$  sous l'action de  $T$

$$\langle a \circ T^k \otimes a \circ T^l \rangle = \langle a \circ T^{k-l} \otimes a \rangle. \quad (19)$$

Il vient alors

$$\left\langle \left( \sum_{k=0}^{N-1} a \circ T^k \right)^{\otimes 2} \right\rangle = \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \langle a \circ T^{k-l} \otimes a \rangle = N \langle a^{\otimes 2} \rangle + 2 \sum_{m=1}^{N-1} (N-m) \langle a \circ T^m \otimes a \rangle \quad (20)$$

en sommant à  $m = k - l$  constant. Observons ensuite, grâce au lemme 4 et au théorème de Cesaro, que

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} m \langle a \circ T^m \otimes a \rangle = 0;$$

par conséquent

$$D(a) = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\langle \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a \circ T^k \right)^{\otimes 2} \right\rangle \geq 0, \quad (18)$$

en tant que matrice symétrique réelle.

**Remarque 5.** On notera que la positivité de la série (11) est une conséquence de la vitesse de mélange établie au lemme 4 pour des fonctions suffisamment régulières. La question suivante se pose alors de façon naturelle : existe-t-il des fonctions scalaires  $a \in L^2(\mathbf{T}^2)$  telles que  $\langle a \rangle = 0$  et  $D(a) < 0$ ? (il résulte de la preuve ci-dessus que la suite  $C_a(n)$  est nécessairement non décroissante).

Passons au point 4) : il est évident que iv) implique iii), iii) implique i) (utiliser le point 1)), i) équivaut à ii) (appliquer le théorème de Cauchy-Schwarz à la forme quadratique positive  $\xi \mapsto \xi \cdot D(a)\xi$ ). Pour simplifier, notons  $f = \xi \cdot a$ ;  $f \in H^s(\mathbf{T}^2)$  et  $\langle f \rangle = 0$ . On introduit la fonction

$$r(z) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k \in \mathbf{Z}} \langle f \circ T^k \cdot f \rangle e^{ikz} \quad z \in \mathbf{T}^1.$$

Il résulte du lemme 4 que  $r(z)$  est une fonction holomorphe sur  $B_{\alpha s} = \{z \in \mathbf{C} \text{ t.q. } |\text{Im}z| < \alpha s\}$ . On calcule alors

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f \circ T^k \right)^2 \right\rangle &= \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} \hat{r}(k-l) = \int_{-\pi}^{\pi} r(x) \left( \sum_{k=0}^{N-1} \sum_{l=0}^{N-1} e^{-i(k-l)x} \right) dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{r(x) + r(-x) - 2r(0)}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \sin^2 \left( \frac{N}{2} x \right) dx + 2\pi N r(0). \end{aligned}$$

Le terme intégral dans le membre de droite ci-dessus est borné car  $r \in C^2(\mathbf{T}^1)$ . Il y a donc l'alternative suivante :

- soit  $r(0) \neq 0$  auquel cas  $\xi \cdot D(a)\xi = 2\pi r(0) > 0$ ;
- soit  $r(0) = 0$ , auquel cas iii) a lieu.

Ceci montre que i) implique iii). Pour démontrer que iii) implique iv), notons  $g$  une valeur d'adhérence de

$$g_N = \sum_{k=0}^N f \circ T^k$$

pour la topologie faible de  $L^2(\mathbf{T}^2)$  (l'existence de  $g$  étant garantie par le fait que la suite  $(g_N)$  est bornée dans  $L^2(\mathbf{T}^2)$  d'après iii)). En utilisant le lemme 4, pour toute fonction  $\phi \in C^\infty(\mathbf{T}^2)$  on a

$$\langle (g_N - g_N \circ T)\phi \rangle - \langle f\phi \rangle = -\langle f \circ T^{N+1} \phi \rangle \rightarrow 0, \text{ lorsque } N \rightarrow \infty.$$

Donc  $g - g \circ T = f$ . //

Comme on l'a dit plus haut, la démonstration du théorème 2 imite la preuve de la formule d'Ito (cf. [6]) pour le mouvement brownien standard. A cette fin on écrit la formule de Taylor à l'ordre 3 pour l'accroissement

$$\begin{aligned} &\langle \psi_\epsilon(t + \tau, x, \cdot, \cdot) \rangle - \langle \psi_\epsilon(t, x, \cdot, \cdot) \rangle \\ &= \langle \nabla \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) \cdot \epsilon h \sum_{k=\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \rangle \\ &+ \frac{1}{2} \langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) : \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \rangle \\ &+ O\left( \left| \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right) \right|^3 \right). \end{aligned} \tag{21}$$

On cherche à montrer la propriété de décorrélation suivante

$$\langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) : \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \rangle$$

$$-\langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) \rangle : \langle \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \rangle \rightarrow 0 \quad (22)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Ce dernier terme est égal à

$$\nabla^2 \langle \psi_\epsilon(t, x, \cdot) \rangle : \langle \left( \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor - \lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \rangle \rightarrow \frac{1}{2} D(a) : \nabla^2 \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \langle \psi_\epsilon(t, x, \cdot) \rangle \quad (23)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On cherche également à établir la propriété de décorrélation analogue pour le terme d'ordre un. Enfin, on cherche également à majorer le reste.

Cette propriété de décorrélation ainsi que la majoration du reste sont basées sur une propriété ergodique plus forte que le simple mélange à vitesse exponentielle des fonctions de classe  $H^s$  avec  $s > 0$ . On procède de la façon suivante : on commence par montrer que

$$\begin{aligned} & \langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) \rangle \cdot \left\langle \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor c(t+\delta)/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \right\rangle \\ & - \langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{\lfloor ct/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega)) \rangle \left\langle \left( \epsilon h \sum_{k=\lfloor c(t+\delta)/\epsilon^2 h \rfloor + 1}^{\lfloor c(t+\tau)/\epsilon^2 h \rfloor} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \right\rangle \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (24)$$

lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , pour tout  $\delta > 0$  et  $h > 0$ .

Pour démontrer cette approximation, il ne suffit plus, comme dans (H1) de décorréler deux instants éloignés, mais deux *laps de temps* éloignés, et ce de manière uniforme par rapport à la longueur de ces laps de temps. Ceci amène à considérer une propriété très analogue à la “propriété de Bernouilli très faible” (en anglais : “very weak Bernoulli”) introduite par Ornstein-Weiss (voir [7]). L’hypothèse utilisée ici diffère de celle de [7] car elle ne porte pas sur des partitions mais sur des polynômes trigonométriques; elle est toutefois mieux adaptée au problème considéré ici.

On va donc démontrer que la transformation  $T$  vérifie la propriété suivante :

(H2) il existe deux constantes  $\beta_0 > 0$  et  $\beta_1$  telles que  $\forall P, Q$  polynômes trigonométriques de degrés  $\leq R$

$$\left\langle \prod_{k \in U} P \circ T^{-k} \prod_{k \in V} Q \circ T^k \right\rangle - \left\langle \prod_{k \in U} P \circ T^{-k} \right\rangle \left\langle \prod_{k \in V} Q \circ T^k \right\rangle = 0$$

pour tout  $l, m \in \mathbb{N}$ , tout  $U \subset \{n, \dots, n+l\}$  et tout  $V \subset \{n, \dots, n+m\}$  et tout  $n \geq \beta_0 \log R + \beta_1$ .

Esquissons la démonstration de (H2).

**Preuve de la propriété (H2).** Cette preuve est très semblable à celle du lemme 4 quoiqu’un peu plus compliquée. La méthode est à peu près la même que celle employée par Katznelson dans [8], mais on demande ici un résultat plus précis.

Il suffit donc de considérer des expressions

$$\langle e^{i\omega \cdot X_{\bar{U}}} e^{i\omega \cdot X_{\bar{V}}} \rangle - \langle e^{i\omega \cdot X_{\bar{U}}} \rangle \langle e^{i\omega \cdot X_{\bar{V}}} \rangle$$

avec

$$X_{\bar{U}} = \sum_{k \in U} M^{-k} \xi_k, \quad X_{\bar{V}} = \sum_{k \in V} M^k \eta_k$$

et  $\xi_k \in K_R$  et  $\eta_k \in K_R \forall k$  (la définition de  $K_R$  étant donnée dans la preuve du lemme 4).

Le point essentiel est donc de montrer que, pour  $n \geq \beta_0 \log R + \beta_1$ ,

$$X_{\bar{U}} + X_{\bar{V}} = 0 \text{ implique que } X_{\bar{U}} = X_{\bar{V}} = 0.$$

La variété stable de  $M^{-1}$  agissant sur  $\mathbf{R}^2$  est  $\mathbf{R}e_+$ , la variété instable  $\mathbf{R}e_-$ . Il est facile de vérifier que, puisque  $\xi \in K_R$

$$|X_{\bar{U}} \cdot e_+| \leq \sqrt{2}R \frac{\lambda_-^n}{1 - \lambda_-} \quad |X_{\bar{V}} \cdot e_-| \leq \sqrt{2}R \frac{\lambda_-^n}{1 - \lambda_-}.$$

On définit les voisinages des variétés stables et instables

$$I_R^n = \{X \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } |X \cdot e_+| \leq \sqrt{2}R \frac{\lambda_-^n}{1 - \lambda_-}\}$$

$$S_R^n = \{X \in \mathbf{R}^2 \text{ t.q. } |X \cdot e_-| \leq \sqrt{2}R \frac{\lambda_-^n}{1 - \lambda_-}\}$$

(cf. figure 2). On voit immédiatement que

$$X_{\bar{U}} + X_{\bar{V}} = 0 \text{ implique que } X_{\bar{U}} \text{ et } X_{\bar{V}} \in S_R^n \cap I_R^n$$

On observe que, pour  $n$  assez grand,  $S_R^n \cap I_R^n \cap \mathbf{Z}^2 = \{0\}$ . Pour quantifier cela, remarquons que si de plus  $X_{\bar{U}}$  ou  $X_{\bar{V}}$  est non nul, on a

$$|X_{\bar{U}} \cdot e_+| \geq \frac{1}{2\theta R} \text{ ou } |X_{\bar{V}} \cdot e_-| \geq \frac{1}{2\theta R},$$

puisque,  $R > 0$  étant donné,  $S_R^n \cap I_R^n \subset K_R$  pour  $n$  assez grand. En effet, tout vecteur  $v$  de  $K_R$  non nul à coordonnées entières vérifie  $|v \cdot e_{\pm}| \geq \frac{1}{2\theta R}$  d'après l'estimation de Kronecker (17). L'inégalité dans (H2) portant sur  $n$  traduit précisément le fait que

$$S_R^n \cap I_R^n \subset K_R \text{ et } \frac{1}{2\theta R} \geq \sqrt{2}R \frac{\lambda_-^n}{1 - \lambda_-},$$

ce qui permet de conclure. //

Une conséquence de la propriété (H2) est

$$(H3) \quad \text{La suite } \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{k=0}^N a(T^k \omega) \text{ est bornée dans } L^1(\mathbf{T}^2).$$

Rappelons que d'après (18) et la proposition 2 1) on sait déjà que cette suite est bornée dans  $L^2(\mathbf{T}^2)$ . En fait, il suffirait pour la suite de la démonstration du théorème 2 de montrer que la suite des carrés des normes euclidiennes des vecteurs ci-dessus est équi-intégrable dans  $L^1(\mathbf{T}^2)$ , ce qui est évidemment impliqué par (H3).

La démonstration de (H3) à partir de (H2) suit un mécanisme classique : voir par exemple [9] où ce type de propriété est établie lorsque la transformation  $T$  est un  $K$ -système. Il n'est pas difficile d'adapter cette preuve en utilisant (H2) — qui est en fait une hypothèse plus restrictive.

Avec (H3), on obtient immédiatement une majoration des restes suivants :

- d'une part le reste de Taylor

$$O\left(\left\langle \left( \epsilon h \sum_{k=[ct/\epsilon^2 h]+1}^{[c(t+\tau)/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega) \right) \right\rangle^3 \right)$$

dans (21);

- d'autre part les termes

$$\langle \nabla^2 \phi(x - \epsilon h \sum_{k=0}^{[ct/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega)) : \left( \epsilon h \sum_{k=[ct/\epsilon^2 h]+1}^{[c(t+\delta)/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \rangle$$

ainsi que

$$\left\langle \left( \epsilon h \sum_{k=[ct/\epsilon^2 h]+1}^{[c(t+\delta)/\epsilon^2 h]} a(T^k \omega) \right)^{\otimes 2} \right\rangle$$

qui interviennent comme restes lorsqu'on remplace la propriété de décorrélation (22) par (23).

La propriété (H3) et l'inégalité de Jensen montrent que ce premier reste est  $O((hc\tau)^{3/2})$  uniformément en  $\epsilon \rightarrow 0^+$  et que les seconds sont des  $O(hc\delta)$  uniformément en  $\tau > 0$  et  $\epsilon \rightarrow 0^+$ .

Pour démontrer le théorème 3, on procède donc comme suit :

- on commence par fixer  $\delta$  et  $\tau$  et on passe à la limite lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$  en utilisant (24) : soit donc  $u(t, x)$  une valeur d'adhérence de la famille  $\langle \psi_\epsilon(t, x, \cdot) \rangle$  dans  $L^\infty(\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^d)$  faible-\*; elle vérifie clairement

$$\int_{\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^d} \chi(t, x) ((u(t + \tau, x) - u(t, x) - \tau hc D(a) : \nabla^2 u(t, x)) dx dt = O((hc\tau)^{3/2}) + O(hc\delta); \quad (25)$$

pour tout  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^d)$  et tout  $\delta > 0$ ;

- on fait ensuite tendre  $\delta$  vers 0, ce qui montre que  $u$  est solution de l'équation de diffusion de (13);
- on remarque que, d'après (21), (H3) et l'estimation des restes ci-dessus :

$$\int_{\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^d} \chi(t, x) (\langle \psi_\epsilon(t + \tau, x) \rangle - \langle \psi_\epsilon(t, x) \rangle) dt dx \rightarrow 0 \text{ lorsque } \tau \rightarrow 0$$

uniformément en  $\epsilon > 0$ ; le théorème d'Ascoli montre alors que  $\langle \psi_\epsilon \rangle$  est relativement compacte dans  $C^0([0, t^*]; w^* - L^\infty(\mathbf{R}^d))$  et donc en particulier que  $u(0, \cdot) = \phi$ .

Par compacité, on voit donc que  $\langle \psi_\epsilon \rangle \rightarrow u$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , où  $u$  est l'unique solution du problème (13).

Il faudrait, pour démontrer complètement le théorème 3, admettre dans (25) des fonctions test  $\chi$  dépendant de  $\omega$ . Par un argument de densité (Stone-Weierstrass) on se ramène à des fonctions du type  $\chi(t, x, \omega) = \chi_1(t, x)\chi_2(\omega)$  pour lesquelles la preuve est identique à celle que nous venons d'esquisser. La remarque cruciale est que, d'après ce qui précède,  $\langle \psi_\epsilon \chi_2 \rangle \rightarrow v$  dans  $C^0([0, t^*]; w^* - L^\infty(\mathbf{R}^d))$  pour tout  $t^* > 0$ , où  $v$  est solution de la même équation de diffusion que dans (13) mais avec pour donnée initiale  $\phi \langle \chi_2 \rangle$ . Par unicité de la solution de (13), on en déduit que  $v = \langle \chi_2 \rangle u$ . Donc, de façon générale,  $\langle \psi_\epsilon \chi \rangle \rightarrow u \langle \chi \rangle$  dans  $C^0([0, t^*]; w^* - L^\infty(\mathbf{R}^d))$  pour tout  $t^* > 0$  et toute fonction  $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^{+*} \times \mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^2)$ , ce qui démontre le théorème 3. //

#### 4.— Remarques finales.

On est donc parti du modèle (3)-(4a-b) qui définit un flot hamiltonien brisé global induisant une bijection isométrique sur  $L^p(\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^2)$ ; le théorème 3 montre qu'une certaine limite asymptotique de ce flot est le semi-groupe de la chaleur sur  $\mathbf{R}^d$ . La possibilité d'un comportement asymptotique de type irréversible est cachée dans le fait que cette limite est prise au sens d'une topologie faible  $*$  (dans  $L^\infty$ ), qui ne permet pas de passer à la limite dans les fonctions non linéaires du flot brisé de (3)-(4a-b). On peut en particulier considérer l'exemple instructif de  $\|f_\epsilon^+(t, \cdot, \cdot)\|_2 + \|f_\epsilon^-(t, \cdot, \cdot)\|_2$  qui est conservée pour tout  $\epsilon > 0$  puisque le groupe associé au modèle (3)-(4a-b) est une isométrie de  $L^2(\mathbf{R}^d \times \mathbf{T}^2)$ ; en revanche, la quantité  $\|u(t, \cdot)\|_2$  est une fonction strictement décroissante en  $t$ , sauf lorsque  $u(t, \cdot)$  atteint un état stationnaire (i.e. une fonction harmonique et bornée sur  $\mathbf{R}^d$ , soit une constante).

Toutes ces remarques n'ont évidemment d'intérêt que lorsque  $D(a) \neq 0$ . On sait d'après les points 2) et 4) de la proposition 2) que  $D(a)$  est nul pour  $a$  variant dans un sous-espace dense de  $L^2(\mathbf{T}^2)/\mathbf{R}$ . Il est facile de se convaincre que  $\text{Im}(I - U_T) \neq L^2(\mathbf{T}^2)/\mathbf{R}$  : pour  $d = 1$  et  $a(\omega_1, \omega_2) = \cos \omega_1$ ,  $D(a) = \frac{1}{4}$ . De façon plus générale, il serait extrêmement utile de connaître une expression explicite de  $D(a)$ . Notons  $F_n$  le  $n$ -ième terme de la suite de Fibonacci définie par  $F_0 = 0$ ,  $F_1 = 1$  et  $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ . Alors (voir par exemple [10]) :

$$M^n = I + \begin{pmatrix} F_{n+2} & F_{n+1} \\ F_{n+1} & F_n \end{pmatrix}$$

(le polynôme minimal de  $M - I$  est  $X^2 - X - 1$  puisque celui de  $M$  est  $X^2 - 3X + 1$ ) et par conséquent, en utilisant la formule (11) pour une fonction  $f : \mathbf{T}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $H^s$  avec  $s > 0$  :

$$D(f) - \frac{1}{2} \langle f^2 \rangle = \sum_{n \geq 1} \langle f \circ T^n \cdot f \rangle = \frac{1}{4\pi^2} \sum_{n \geq 1} \sum_{k \in \mathbf{Z}^2 - \{0\}} \hat{f}(M^n k) \hat{f}(-k)$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \sum_{k \in \mathbb{Z}^2 - \{0\}} \sum_{n \geq 1} \hat{f}(k_1 + F_{n+2}k_1 + F_{n+1}k_2, F_{n+1}k_1 + k_2 + F_n k_2) \hat{f}(-k_1, -k_2)$$

ce qui peut être utile pour calculer explicitement  $D(f)$  pour les polynômes trigonométriques.

*Je tiens à remercier J.-M. Strelcyn de m'avoir signalé la référence [8].*

### Références.

- [1] L. Bunimovich, Ya. Sinai : Commun. in Math. Phys 78, (1980), 479–497.
- [2] V. Leonov : Teor. Verojatnost. i Primenen 6, (1961), 93–101.
- [3] M. Denker, W. Philipp : Ergodic Theory and Dyn. Syst. 4, (1984), 541–552.
- [4] G. Lebeau : Ann. Inst. Fourier 35, (1985), 145–216.
- [5] F. Golse, E. Leichtnam : article en préparation.
- [6] R. Dautray : “Méthodes probabilistes pour les équations de la physique”, Masson (1989)
- [7] R. Bowen : “Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms” Lectures Notes in Math. 470, Springer Verlag (1975).
- [8] Y. Katznelson : Israel J. of Math. 10, (1971), 186–195.
- [9] M. Ratner : Israel J. of Math. 16, (1973), 181–197.
- [10] J. Crawford, J. Cary : Physica D 6, (1982-83), 223-232.

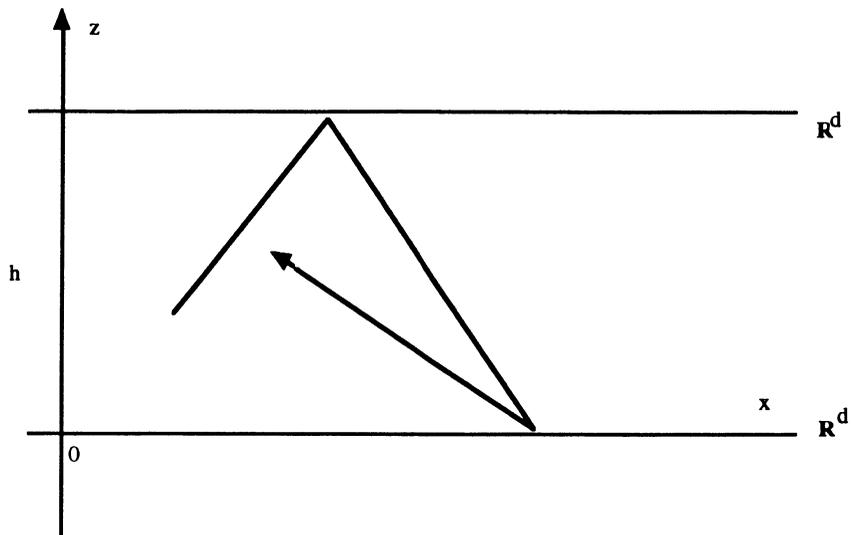


Fig. 1

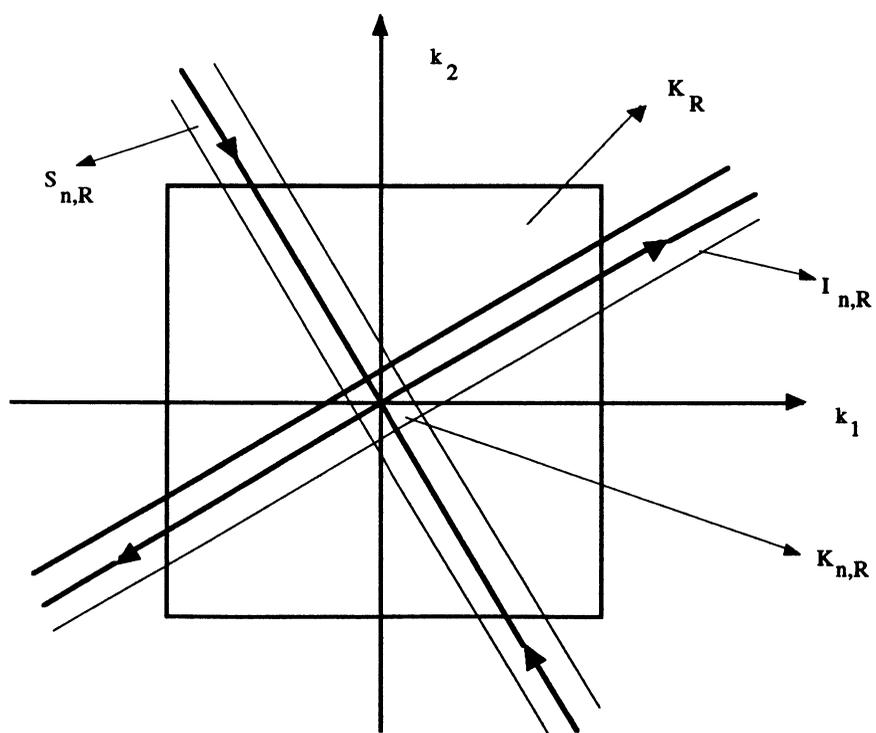


Fig. 2