Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

H. Bahouri
J.-Y. Chemin

Champs de vecteurs quasi-lipschitziens et mécanique des fluides

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 7, p. 1-14
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CHAMPS DE VECTEURS QUASI-LIPSCHITZIENS ET MECANIQUE DES FLUIDES

H. BAHOURI & J.-Y. CHEMIN

Exposé n° VII

19 Octobre 1993

Introduction

La motivation initiale des résultats exposés ici est un problème d'évolution de la régularité dans le système d'Euler relatif à la mécanique des fluides bidimensionnels. Considérons une solution du système d'Euler dans $\mathbf{R}^2$

$$(E)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t v + v\cdot\nabla v &=& -\nabla p \\ \operatorname{div} v &=& 0 \\ v_{|t=0} &=& v_0. \end{array}\right.$$

Supposons que le champ de vecteurs v à l'instant initial ait un tourbillon (c'est-à-dire le rotationnel) ω_0 borné et un gradient de puissance $p$ième intégrable. On sait que, dans ce cas, il existe une unique solution globale (en temps) du système (E) dont, à chaque instant, le tourbillon est borné et le gradient de puissance $p$ième intégrable. De plus, on a, trait caractéristique des fluides bidimensionnels,

$$\partial_t\omega + v\cdot\nabla\omega = 0. \tag{1}$$

La question est alors la suivante. Supposons en outre que ω_0 appartienne à un espace de Sobolev du type W^s_p, pour s dans l'intervalle $]0,1[$, qu'en est-il alors de ω_t, le tourbillon à l'instant t?

Il est bien connu (voir par exemple [10]) que, dans le cadre où nous nous sommes placés, le champ de vecteurs solution du système (E) n'est a priori pas meilleur que logarithmiquement lipschitzien (en abrégé log-lipschitzien), c'est-à-dire que l'on a, pour tout couple de points (x,x') du plan,

$$|v(t,x)-v(t,x')| \leq C|x-x'|(1-\log|x-x'|).$$

On sait depuis les travaux de Wolibner (voir [8]) qu'un tel champ de vecteurs admet un flot en un sens légèrement affaibli. Il existe en effet une unique application ψ continue de $\mathbf{R}\times\mathbf{R}^d$ dans $\mathbf{R}^d$ (la dimension est quelconque pour cette propriété) telle que

$$\psi(t,x) = x + \int_0^t v(s,\psi(s,x))ds$$

et telle que, pour tout t, $\psi(t)$ soit un homéomorphisme de $\mathbf{R}^d$ dans lui-même. De plus, l'application ψ vérifie

$$\begin{aligned} |x-y| \leq e^{1-\exp\int_0^t \widetilde{V}(\tau)d\tau} \Rightarrow & |\psi(t,x)-\psi(t,y)| \\ & \leq |x-y|^{\exp-\int_0^t \widetilde{V}(\tau)d\tau} e^{1-\exp-\int_0^t \widetilde{V}(\tau)d\tau}. \end{aligned}$$

On a posé ici

$$\widetilde{V}(t) = \sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x)-v(t,x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)}.$$

On s'attend donc à ce que la régularité Sobolev du tourbillon décroisse exponentiellement. Cependant, le lecteur se convaincra très aisément que cela ne se lit pas instantanément sur la définition (pour $p<\infty$) de W^s_p par

$$u \in W^s_p \Leftrightarrow u \in L^p \quad \text{et} \quad \iint \frac{|u(x)-u(x')|^p}{|x-x'|^{n+sp}} dx dx' < \infty.$$

Cette question nous a amemé à étudier les propriétés des équations de transport relatives à un champ de vecteurs de divergence nulle seulement intégrable en temps à valeurs log-lipschitz, c'est-à-dire les équations du type

$$(T) \begin{cases} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) &= g \\ f_{|t=0} &= f_0. \end{cases}$$

Le texte est organisé de la façon suivante. Dans la première section, nous énonçons trois résultats relatifs aux équations de transport (T). Ensuite, nous exhibons une solution à tourbillon borné de l'équation d'Euler (E) dont le flot présente effectivement une régularité hölderienne exponentiellement décroissante.

Dans la deuxième section, nous étudions en détail cet exemple.

Dans la troisième section, nous donnons une idée des démonstrations de ces théorèmes. Le lecteur intressé est inviter à consulter [1].

Remerciements Nous tenons à remercier J.-M. Bony pour les fructueuses discussions que nous avons eu avec lui à propos de ce travail.

1 Enoncé des résultats

Nous allons tout d'abord introduire une notation. Dans tout la suite, nous désignerons par LL l'espace des fonctions log-lipschitziennes, c'est-à-dire l'espace des fonctions bornées sur $\mathbf{R}^d$ telles que

$$\|u\|_{LL} \stackrel{\text{déf}}{=} \|u\|_{L^\infty} + \sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x)-v(t,x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)} < \infty.$$

Le premier des résultats présentés ici est relatif à l'évolution de la régularité.

Théorème 1.1 *Soient v un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; LL)$ et s un réel de l'intervalle $]0,1]$. On considère une fonction f_0 appartenant à W^s_p et une fonction g appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; W^s_p)$.*

Il existe alors une unique solution de

$$(T)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) & = & g \\ f_{|t=0} & = & f_0 \end{array}\right.$$

telle que, pour tout $s' < s$, on ait $\|f(t)\|_{W_p^{\sigma(s',t)}} \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+)$ en posant

$$\begin{array}{rcl} \sigma(s',t) & = & s' \exp - \displaystyle\int_0^t \widetilde{V}(\tau)d\tau \quad et \\ \widetilde{V}(t) & = & \displaystyle\sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x)-v(t,x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)}. \end{array}$$

Remarque Ce théorème est la conséquence du théorème 3.1 qui énonce un résultat analogue, mais valable jusqu'à l'indice $s' = s$. L'espace utilisé est l'espace $F^s_{p,\infty}$ (voir la définition 3.2).

Du théorème ci-dessus, on déduit trivialement le corollaire suivant.

Corollaire 1.1 *Soit v un champ de vecteurs solution de (E) telle que la donnée initiale ait un tourbillon appartenant à $L^\infty \cap W^s_p$. Alors, pour tout $s' < s$ et pour tout temps t, le tourbillon à l'instant t appartient à l'espace $W_p^{\sigma(s',t)}$.*

Remarquons que ce corollaire est vide si $s > 2/p$. En effet, dans ce cas, le champ de vecteurs $v(0)$ est höldérien d'indice $1+s-2/p$ grâce aux injections de Sobolev. D'après le théorème d'existence dans les classes de Hölder (voir par exemple [3]), le problème posé est alors trivialement résolu et bien sûr sans perte de régularité.

Le théorème suivant est une généralisation très partielle d'un théorème sur les équations de transport démontré par R. Di-Perna et P.-L. Lions dans [5].

Théorème 1.2 *Désignons par $\mathcal{M}$ l'ensemble des mesures bornées de l'espace $\mathbf{R}^d$ et considérons un champ de vecteurs de divergence nulle v appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; LL(\mathbf{R}^d))$. Soient une distribution g appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; \mathcal{M})$ et une mesure f_0 de $\mathcal{M}$.*

Il existe alors une unique solution de

$$(T)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) & = & g \\ f_{|t=0} & = & f_0 \end{array}\right.$$

dans l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+;\mathcal{M})$.

Ce deuxième théorème est sans lien apparent avec le premier. Cependant, l'un et l'autre sont, en partie, des conséquences du théorème d'unicité (et d'existence) qui suit. Ce théorème s'énonçant dans le langage des espaces de Besov, nous allons rappeler leurs définitions. Leur définition utilise le découpage dyadique de l'ensemble des fréquences. La construction d'un tel découpage repose sur la proposition suivante :

Proposition 1.1 *Il existe deux fonctions* χ *et* φ *appartenant respectivement à* $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$ *et à* $C_0^\infty(\mathbf{R}^d\setminus\{0\})$ *telles que :*

$$\begin{gathered}\chi(\xi)+\sum_{q\geq 0}\varphi(2^{-q}\xi)=1,\\ |p-q|\geq 2\Rightarrow \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot)\cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-p}\cdot)=\emptyset,\\ q\geq 1\Rightarrow \mathrm{Supp}\ \chi\cap \mathrm{Supp}\ \varphi(2^{-q}\cdot)=\emptyset,\\ \frac{1}{3}\leq \chi^2(\xi)+\sum_{q\geq 0}\varphi^2(2^{-q}\xi)\leq 1.\end{gathered}$$

La démonstration est tout à fait classique, voir par exemple [2].

Nous allons maintenant fixer les notations qui nous serviront dans toute la suite de ce texte. On choisit une fois pour toute deux fonctions χ et φ satisfaisant la proposition 1.1.

Notations

$$\begin{gathered}h=\mathcal{F}^{-1}\varphi\quad\text{et}\quad h_0=\mathcal{F}^{-1}\chi,\\ \Delta_{-1}u=\chi(D)u=\mathcal{F}^{-1}(\chi(\xi)\widehat{u}(\xi)),\\ \text{si } q\geq 0,\ \Delta_q u=\varphi(2^{-q}D)u=2^{qd}h(2^q\cdot)\star u,\\ \text{si } q\leq -2,\ \Delta_q u=0,\\ S_q u=\sum_{p\leq q}\Delta_p u.\end{gathered}$$

On peut maintenant rappeler la définition des espaces fonctionnels que nous utiliserons.

Définition 1.1 *Soient* p *et* r *deux éléments de l'intervalle* $[1,+\infty]$. *On considère un quelconque réel* s.

L'espace $B^s_{p,r}$ *est l'espace des distributions tempérées* u *telles que la suite*

$$\|u\|_{B^s_{p,r}}\stackrel{\text{déf}}{=}\left(\sum_{k\in\mathbf{Z}}2^{(2+k)rs}\|\Delta_k u\|_{L^p}{}^r\right)^{\frac{1}{r}}<\infty$$

Notations On désignera dans toute la suite l'espace $B^s_{p,\infty}$ par B^s_p. Enfin, l'espace B^s_∞ étant l'espace de Hölder usuel C^s, nous utiliserons la notation usuelle C^s.

Théorème 1.3 *Etant donné un réel β de l'intervalle $]0,1/2[$, il existe une constante C vérifiant les propriétés suivantes. Soient $s \in]-1+\beta,-\beta[$, $T>0$, $\lambda > C$ et V une fonction localement intégrable de $\mathbf{R}^+$ à valeurs dans $\mathbf{R}^+$ tels que*

$$\sigma(s,\lambda,T) \stackrel{\text{déf}}{=} s - \lambda\int_0^T V(t)dt \geq \beta - 1.$$

On considère alors des distributions $f_0 \in B^s_p$, $f \in L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+;B^s_p)\cap C(\mathbf{R}^+;\mathcal{S}')$, $g \in L^1_{loc}(\mathbf{R}^+;B^s_p)$, et v un champ de vecteurs appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+;LL)$ et vérifiant, pour tout réel positif t,

$$\sup_q \frac{\|\nabla S_q v(t)\|_{L^\infty}}{2+q} \leq V(t).$$

Si l'on a

$$(T)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) &=& g \\ f_{|t=0} &=& f_0, \end{array}\right.$$

alors, on a

$$\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,t)}} \leq \frac{\lambda}{\lambda - C}\Big(\|f_0\|_{B^s_p} + \int_0^T \|g(t)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,t)}}dt\Big).$$

Remarquons qu'un théorème avec un perte analogue (dans le cadre des espaces de Sobolev) a été démontré par F. Colombini et N. Lerner dans [4].

Pour conclure cette section, et justifier ces résultats, nous allons exhiber un exemple montrant que le phénomène de décroissance exponentielle de la régularité du flot se produit effectivement.

Soit ω_0 la fonction sur le plan $\mathbf{R}^2$ nulle en dehors de $[-1,1]\times[-1,1]$, impaire en les deux variables x_1 et x_2 et valant 2π sur $[0,1]\times[0,1]$. On considère le champ de vecteurs v_0 défini par

$$v_0(x_1,x_2) = \left\{\begin{array}{l} -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{x_2-y_2}{|x-y|^2}\omega_0(y)dy \\ \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int \frac{x_1-y_1}{|x-y|^2}\omega_0(y)dy \end{array}\right.$$

La faible régularité du flot de la solution du système d'Euler associée est décrite par le théorème suivant :

Théorème 1.4 *Soit v la solution de l'équation d'Euler associée à la donnée initiale v_0 définie ci-dessus. A l'instant t, le flot $\psi(t)$ du champ de vecteurs v n'appartient à C^α pour aucun $\alpha > \exp -t$.*

2 Etude de l'exemple

Nous allons dans un premier temps étudier quelque peu le champ de vecteurs v_0. Remarquons tout d'abord que v_0 est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Il en résulte que ce champ de vecteurs est tangent à ces deux axes et donc nul à l'origine. Nous allons démontrer la proposition suivante.

Proposition 2.1 *Il existe une constante C telle que, pour tout x_1 tel que $0 \leq x_1 \leq C$, on ait*

$$v_0^1(x_1, 0) \geq -2x_1 \log x_1.$$

En effet, en posant $\widetilde{\omega}_0(x_1) = 2H(x_1) - 1$, il vient

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1,0) &= \frac{1}{2\pi} \int \frac{y_2}{|x-y|^2} \omega_0(y) dy \\ &= \int_{-1}^{1} dy_1 \widetilde{\omega}_0(y_1) \int_0^1 \frac{2y_2}{(x_1 - y_1)^2 + y_2^2} dy_2. \end{aligned}$$

Par un calcul immédiat, on en déduit que

$$\begin{aligned} v_0^1(x_1,0) &= \widetilde{v}_0^1(x_1,0) + \overline{v}_0^1(x_1,0) \quad \text{avec} \\ \widetilde{v}_0^1(x_1,0) &= -\int_0^1 \log(x_1 - y_1)^2 dy_1 + \int_0^1 \log(x_1 + y_1)^2 dy_1 \quad \text{et} \\ \overline{v}_0^1(x_1,0) &= \int_0^1 \log \frac{1 + (x_1 - y_1)^2}{1 + (x_1 + y_1)^2} dy_1. \end{aligned}$$

Un calcul d'intégrale des plus élémentaires assure que, pour $0 \leq x_1 < 1$, on a

$$\widetilde{v}_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + 2(1 + x_1) \log(1 + x_1) - 2(1 - x_1) \log(1 - x_1).$$

Donc, lorsque $0 \leq x_1 < 1$, on a

$$v_0^1(x_1, 0) = -4x_1 \log x_1 + f(x_1),$$

où f est une fonction impaire indéfiniment différentiable sur $]-1, 1[$. Ceci assure la conclusion de la proposition.

Revenons maintenant à l'équation d'Euler et à sa solution v correspondant à la donnée initiale v_0. D'après les théorèmes de Yudovitch (voir [10]) et Wolibner (voir [8]), le flot du champ de vecteurs v est une fonction continue de la variable (t,x). De plus, on sait qu'à chaque instant, le champ de vecteurs v est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Donc ces deux axes sont globalement invariants par le flot. L'origine, qui est leur point d'intersection, est donc stable par le flot ψ du champ de vecteurs v, On a ainsi, pour tout t,

$$\psi(t,0)=0,\ \psi^1(t,0,x_2)=0 \quad \text{et} \quad \psi^2(t,x_1,0)=0. \tag{2}$$

Soit T un réel strictement positif arbitraire. Le tourbillon est conservé le long des lignes de flot (voir l'égalité (1)). La relation (2) ci-dessus assure donc l'existence d'un voisinage W de l'origine tel que l'on ait, pour tout $t\in[0,T]$,

$$\omega(t)_{|W}=\omega_{0|W}.$$

Le champ de vecteurs de divergence nulle $\widetilde{v}(t)=v(t)-v_0$ est symétrique par rapport aux deux axes de coordonnées. Son tourbillon est identiquement nulle sur W. Donc, il existe une constante A telle que l'on ait, pour tout $t\in[0,T]$,

$$|v(t,x)-v_0(x)|\leq A|x|.$$

De la proposition 2.1, il résulte l'existence d'une constante C' telle que, $(t,x_1)\in[0,T]\times[0,C']$, on ait

$$v(t,x_1,0)\geq -x_1\log x_1.$$

Soit maintenant $x_1\in[0,1[$ tel que, pour tout $t\in[0,T]$, on ait

$$\psi^1(t,x_1,0)\in[0,C'].$$

Il résulte de l'inégalité ci-dessus que l'on a

$$\psi^1(t,x_1,0)\geq x_1(t) \quad \text{avec} \quad \dot{x}_1(t)=-x_1(t)\log x_1(t).$$

Il en résulte alors que

$$\psi^1(t,x_1,0)\geq x_1^{\exp -t}$$

D'où la proposition vu que $\psi(t,0)=0$.

3 Une idée des démonstrations

Commençons par donner une idée de la démonstrationà du théorème 1.3. Pour démontrer ce théorème, on localise en fréquence dans des couronnes de taille 2^q au moyen des opérateurs Δ_q.

La première des choses à faire est de caractériser l'espace des fonctions log-lipschitziennes dans ce cadre. C'est l'objet de la proposition suivante, démontrée dans [1].

Proposition 3.1 *Il existe une constante C telle qu'étant donnée une fonction u de LL, on ait*

$$C^{-1}\|u\|_{LL} \leq \|S_{-1}u\|_{L^\infty} + \sup_q \frac{\|\nabla S_q u\|_{L^\infty}}{2+q} \leq C\|u\|_{LL}.$$
$$\|\Delta_q u\|_{L^\infty} \leq C\|u\|_{LL}(2+q)2^{-2-q}.$$

Nous allons tout d'abord admettre que, si f est solution de (T), alors $\Delta_q f$ est solution de

$$(T_q)\left\{\begin{array}{rcl} \partial_t f_q + S_q v \cdot \nabla f_q & = & \Delta_q g - R_q(v,f) \\ f_{q|t=0} & = & \Delta_q f_0, \end{array}\right.$$

et que, pour tout $\sigma \geq \beta - 1$, $R_q(v,f)$ vérifie

$$\|R_q(v,f)\|_{L^p} \leq C(2+q)2^{-q\sigma}V(t)\|f(t)\|_{B^\sigma_p}, \tag{3}$$

si l'on a pris soin de poser

$$V(t) = \sup_q \frac{\|\nabla S_q v(t)\|_{L^\infty}}{2+q}.$$

Une fois ceci admis, la démonstration du théorème est facile. En effet, comme $\Delta_q f$ est solution de (T_q), on a, en désignant par ψ_q le flot du champ de vecteurs $S_q v$,

$$\begin{aligned}\Delta_q f(t,x) = \Delta_q f_0(\psi_q^{-1}(t,x)) &+ \int_0^t \Delta_q g(\tau, \psi_q(\tau, \psi_q^{-1}(t,x)))d\tau \\ &- \int_0^t R_q(v,f)(\tau, \psi_q(\tau, \psi_q^{-1}(t,x)))d\tau.\end{aligned}$$

Posons

$$J_q(\tau,t) = \sup_{x\in\mathbf{R}^d} |\det D_x\psi_q(\tau, \psi_q^{-1}(t,x))|^{-1}.$$

Il vient alors immédiatement de l'équation sur le jacobien que

$$J_q(\tau,t) \le 2^{2(2+q)\int_\tau^t V(\tau')d\tau'}.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}\|\Delta_q f(t)\|_{L^p} &\le \|\Delta_q f_0\|_{L^p} 2^{2(2+q)\int_0^t V(\tau')d\tau'} \\ &+ \int_0^t \|\Delta_q g(\tau)\|_{L^p} 2^{2(2+q)\int_\tau^t V(\tau')d\tau'} d\tau \\ &+ C\int_0^t (2+q)V(\tau) 2^{(2+q)(2\int_\tau^t V(\tau')d\tau' - \sigma(s,\lambda,\tau))} \|f(\tau)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,\tau)}} d\tau.\end{aligned}$$

Multiplions l'inégalité ci-dessus par $2^{(2+q)\sigma(s,\lambda,t)}$. Comme

$$\sigma(s,\lambda,t) = \sigma(s,\lambda,\tau) - \lambda\int_\tau^t V(\tau')d\tau',$$

il vient, pour tout $\lambda \ge 2$,

$$\begin{aligned}2^{(2+q)\sigma(s,\lambda,t)}\|\Delta_q f(t)\|_{L^p} \le \|f_0\|_{B_p^s} &+ \int_0^t \|g(\tau)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,\tau)}} d\tau \\ &+ C\int_0^t (2+q)V(\tau) 2^{(2+q)(2-\lambda)\int_\tau^t V(\tau')d\tau'} \|f(\tau)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,\tau)}} d\tau.\end{aligned}$$

De plus, un calcul d'intégrale des plus immédiats montre que la seconde intégrale de l'inégalité ci-dessus est majorée par

$$\frac{C}{\lambda-2}\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,t)}}.$$

Il en résulte que, pour tout q, et tout $\lambda > 2$, on a

$$\begin{aligned}2^{(2+q)\sigma(s,\lambda,t)}\|\Delta_q f(t)\|_{L^p} \le \|f_0\|_{B_p^s} &+ \int_0^t \|g(\tau)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,\tau)}} d\tau \\ &+ \frac{C}{\lambda-2}\sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_{B_p^{\sigma(s,\lambda,t)}}.\end{aligned}$$

D'où le théorème en prenant λ assez grand. Pour la démonstration de l'inégalité (3), nous renvoyons le lecteur à [1]. Signalons simplement que cette preuve utilise systématiquement la caractérisation des fonctions log-lipschziennes à l'aide de la théorie de Littlewood-Paley contenue dans la proposition 3.1.

Remarquons maintenant que, par régularisation du champ de vecteurs v, on peut démontrer le théorème 1.2. Pour cela, régularisons donnée initiale et champ de vecteurs. Soit donc $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ une suite de champs de vecteurs de divergence nulle indéfiniment différentiables, bornée dans l'espace $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; LL)$ et telle que, pour tout $\epsilon \in]0,1[$,

$$\lim_{n\to\infty} v_n = v \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\mathbf{R}^+, C^\epsilon).$$

On considère une suite $(f_{0,n})_{n\in\mathbf{N}}$ bornée dans L^1 de fonctions telle que

$$\lim_{n\to\infty} f_{0,n} = f_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{M}.$$

Enfin, on se donne une suite $(g_n)_{n\in\mathbf{N}}$ bornée dans $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; L^1)$ telle que

$$\lim_{n\to\infty} g_n = g \quad \text{dans} \quad L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; \mathcal{M}).$$

Désignons par f_n la solution de

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t f_n + v_n \cdot \nabla f_n & = & g_n \\ f_{n|t=0} & = & f_{0,n}. \end{array} \right.$$

Il est clair que $(f_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite bornée de $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; L^1)$. On peut donc en extraire une sous-suite faiblement convergente vers une fonction f appartenant à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; \mathcal{M})$. Il est alors évident que $f_n v_n$ tend faiblement vers fv qui est donc solution de

$$(T) \left\{ \begin{array}{rcl} \partial_t f + \operatorname{div}(fv) & = & g \\ f_{|t=0} & = & f_0. \end{array} \right.$$

Comme f appartient à l'espace $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+; \mathcal{M})$ et que $\mathcal{M} \subset B^0_1$, l'application du théorème d'unicité 1.3 conclut la démonstration du théorème 1.2.

Malheureusement, les espaces de Besov précédemment introduits ne conviennent pas pour démontrer un théorème impliquant le théorème 1.1. Il faut donc en introduire de nouveaux.

Définition 3.1 *Soient p et r deux éléments de l'intervalle $[1, +\infty]$. On considère un quelconque réel s. L'espace $F^s_{p,r}$ est l'espace des distributions tempérées u telles que la fonction*

$$\|u\|_{F^s_{p,r}} \stackrel{\text{déf}}{=} \left(\int_{\mathbf{R}^d} \left(\sum_k 2^{(2+k)rs} |\Delta_k u(x)|^r \right)^{p/r} dx \right)^{\frac{1}{p}} < \infty.$$

Il est bien connu, voir par exemple [7], que l'on a, pour tout ϵ strictement positif,

$$B^{s+\epsilon}_{p,r} \subset F^s_{p,r} \subset B^{s-\epsilon}_{p,r}.$$

Ces espaces sont, au moins en apparence, tout autant inadaptés au problème que les espaces de Besov. Cependant, introduisons les espaces suivants :

Définition 3.2 *Soient $p \in [1,\infty]$ et $s \in]0,1[$. On appelle F^s_p l'espace des fonctions u appartenant à L^p telles qu'il existe une fonction U appartenant à L^p telle que l'on ait, pour tout couple (x,x') de $\mathbf{R}^d \times \mathbf{R}^d$,*

$$\frac{|u(x)-u(x')|}{|x-x'|^s} \leq U(x)+U(x'). \tag{4}$$

Remarquons tout d'abord que l'espace F^s_p, muni de la norme

$$\|u\|_{F^s_p} = \|u\|_{L^p} + \inf\{\|U\|_{L^p},\ U \text{ satisfaisant } (4)\},$$

est un espace de Banach. Dans toute la suite, une fonction u étant donnée, nous désignerons génériquement par U une fonction vérifiant (4).

Nous allons démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit $s \in]0,1[$ et v un champ de vecteurs de divergence nulle appartenant à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+; LL)$. Posons*

$$\widetilde{V}(t) = \sup_{0<|x-x'|\leq 1} \frac{|v(t,x)-v(t,x')|}{|x-x'|(1-\log|x-x'|)} \quad et \quad \sigma(s,t) = s\exp - \int_0^t \widetilde{V}(\tau)d\tau.$$

On considère $f_0 \in F^s_p$ et g telle que la fonction $\|g(t)\|_{F^{\sigma(s,t)}_p}$ appartienne à $L^1_{loc}(\mathbf{R}^+)$.

Alors, il existe une unique solution de

$$(T')\begin{cases} \partial_t f + v\cdot\nabla f &= g \\ f_{|t=0} &= f_0. \end{cases}$$

telle que $\|f(t)\|_{F^{\sigma(s,t)}_p}$ appartienne à $L^\infty_{loc}(\mathbf{R}^+)$.

Pour des raisons tout-à-fait similaires aux précédentes, il suffit de démontrer des estimations convenables sur les solutions régulières d'une équations de transport associée à un champ de vecteurs indéfiniment différentiable.

Il est immédiat d'observer qu'étant donné un homéomorphisme θ tel que

$$|\theta(x)-\theta(x')| \leq C_{1,\theta}|x-x'|^\alpha \quad \text{pour} \quad |x-x'|\leq 1,$$

on a, pour $|x-x'|\leq 1$,

$$\begin{aligned}\frac{|u(\theta(x))-u(\theta(x'))|}{|x-x'|^{s\alpha}} &\leq \frac{|u(\theta(x))-u(\theta(x'))|}{|\theta(x)-\theta(x')|^{s}}\frac{|\theta(x)-\theta(x')|^{s}}{|x-x'|^{s\alpha}}\\ &\leq C^s_{1,\theta}(U(\theta(x))+U(\theta(x'))).\end{aligned}$$

Si de plus, θ conserve la mesure, on a clairement que

$$\|u\circ\theta\|_{F^{s\alpha}_p}\leq (1+C^s_{1,\theta})\|u\|_{F^s_p}.$$

En appliquant l'inégalité ci-dessus à chaque instant dans l'équation

$$(T)\left\{\begin{array}{rcl}\partial_t f+v\cdot\nabla f &=& g\\ f_{|t=0} &=& f_0,\end{array}\right.$$

il vient, $C(t)$ désignant une fonction localement bornée croissante,

$$\|f(t)\|_{F_p^{\sigma(s,t)}}\leq C(t)\|f_0\|_{F^s_p}+C(t)\int_0^t\|g(\tau)\|_{F_p^{\sigma(s,\tau)}}d\tau.$$

La fonction $\|f(t)\|_{F_p^{\sigma(s,t)}}$ est donc une fonction localement bornée sur $\mathbf{R}^+$. La seule chose restant maintenant à éclaircir est la relation entre les espaces F^s_p et les espaces de Besov. La proposition suivante répond à cette question et achève ainsi la démonstration du théorème 1.1

Proposition 3.2 *Soient $p\in[1,\infty]$ et $s\in]0,1[$. Si $p>1$, alors $F^s_p=F^s_{p,\infty}$. Sinon, on a seulement $B^s_{1,1}\subset F^s_1\subset B^s_1$.*

La démonstration étant assez technique, nous n'en présentons ici qu'un fragment, le lecteur intéressé étant renvoyé à [1]. Le cas intéressant est le cas où $p>1$. Comme $\varphi=\widehat{h}$ est identiquement nulle près de l'origine, il vient

$$\Delta_q u(x)=2^{qd}\int_{\mathbf{R}^d}h(2^q(x-y))(u(y)-u(x))dy.$$

D'où il résulte, en posant $h_s(z)=|z|^s|h(z)|$, que

$$\begin{aligned}2^{qs}|\Delta_q u(x)| &\leq 2^{qd}\int_{\mathbf{R}^d}h_s(2^q(x-y))\frac{|u(y)-u(x)|}{|y-x|^s}dy\\ &\leq \|h_s\|_{L^1}U(x)+2^{qd}\int_{\mathbf{R}^d}h_s(2^q(x-y))U(y)dy.\end{aligned}$$

Cette inégalité (5) peut s'écrire

$$2^{qs}|\Delta_q u(x)|\leq\|h_s\|_{L^1}U(x)+(2^{qd}h_s(2^q\cdot)\star U)(x).$$

La fonction h_s est majorée par une fonction $\widetilde{h}_s$ radiale, intégrable et décroissante. Le théorème 2 page 62 de [6] affirme que si K est une fonction radiale, intégrable et décroissante (en temps que fonction de la distance à l'origine), alors

$$|(K \star w)(x)| \leq \|K\|_{L^1} w^\star(x), \tag{5}$$

où $w^\star(x)$ désigne la fonction maximale de w définie par

$$w^\star(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{\mathrm{Vol\ B(x,r)}} \int_{B(x,r)} w(y)dy.$$

On en déduit que, pour tout x de $\mathbf{R}^d$, on a

$$2^{qs}|\Delta_q u(x)| \leq \|\widetilde{h}_s\|_{L^1}(U(x) + U^\star(x)).$$

Comme on a supposé que p était strictement supérieur à 1, on a $\|U^\star\|_{L^p} \leq C_{d,p}\|U\|_{L^p}$. D'où il résulte que $\|u\|_{F^s_{p,\infty}} \leq C_{d,p}\|u\|_{F^s_p}$. La réciproque mélange l'utilisation de la fonction maximale avec des découpages en fréquences suivants la taille relative de $|x - x'|$ et 2^{-q}.

References

[1] H. Bahouri et J.-Y. Chemin, Equations de transport relatives à des champs de vecteurs non-lipschitziens et mécanique des fluides, *Prépublication de l'Ecole Polytechnique n⁰ 1059*, 1993, à paraître dans Archiv for Rationnal Mechanics and Analysis.

[2] J.-M. Bony, Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, **14**, 1981, pages 209–246.

[3] J.-Y. Chemin, Une facette mathématique de la mécanique des fluides I, *Prépublication n° 1055 de l'Ecole Polytechnique*, 1993.

[4] F. Colombini et N. Lerner, Hyperbolic operators with non-Lipschitz coefficients, *Prépublication de l'Université de Rennes*, 1994.

[5] R. Di Perna et P.-L. Lions, Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces, *Inventiones Mathematicae*, **98**(3), 1989, pages 511–549.

[6] E.M. Stein, *Singular integrals and differentiability properties of functions*, Princeton University Press (1970).

[7] H. Triebel, *Interpolation theory, function spaces, differential operators*, North Holland (1978).

[8] W. Wolibner, Un théorème d'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long, *Mathematische Zeitschrift*, **37**, 1933, pages 698–726.

[9] M. Yamasaki, A quasi-homogeneous version of paradifferential operators, I. Bounded on spaces of Besov type, *Journal of the faculty of science of the university of Kyoto*, **33** (1), pages 131–174.

[10] V. Yudovitch, Non stationnary flow of an ideal and incompressible liquid,*Zh. Vych. Math.*, **3**, 1963, pages 1032–1066.

H. Bahouri
Département de Mathématiques
Université de Tunis
Campus El Manzah
1060 Tunis

J.-Y. Chemin
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université de Paris VI
4 Place Jussieu BP187
75 252 Paris Cedex 05