

# SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Y. COLIN DE VERDIÈRE

B. PARISSÉ

## Équilibre instable en régime semi-classique

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1993-1994), exp. n° 6, p. 1-9

<[http://www.numdam.org/item?id=SEDP\\_1993-1994\\_\\_A6\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994__A6_0)>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)  
(École Polytechnique), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE  
DE  
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Téléx 601.596 F

Séminaire 1993-1994

---

## EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

### **EQUILIBRE INSTABLE EN REGIME SEMI-CLASSIQUE**

**Y. COLIN de VERDIERE & B. PARISSE**



# Équilibre instable en régime semi-classique.

Bernard Parisse  
(en collaboration avec Yves Colin de Verdière)

Institut Fourier (URA 188 du CNRS)  
BP 74, F-38402 St Martin d'Hères Cedex  
parisse@fourier.grenet.fr

18 Janvier 1994

## 1 Introduction.

Dans cet exposé, je vais présenter des résultats obtenus en collaboration avec Y. Colin de Verdière ([3] et [4]). Nous nous intéressons à des familles de fonctions propres associées à des familles de valeurs propres de l'équation de Schrödinger en dimension 1:

$$P\phi_h = \left( -\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x) \right) \phi_h = E(h)\phi_h$$

lorsque  $h \rightarrow 0$  pour des valeurs de l'énergie  $E(h)$  proches d'un maximum local de  $V(x)$ .

On prendra des potentiels  $V \in C^\infty$  tels que:

- $\liminf_{x \rightarrow \infty} V(x) > 0$ ,
- $V(0) = 0$ ,
- $V'(0) = 0$ ,
- $V''(0) \ll 0$ , pour simplifier  $V''(0) = -1$ .

Par exemple,  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 - x^3 + x^4$ .

Rappelons que lorsque  $E$  n'est pas valeur critique de  $V$ , le spectre se présente en "paquets" espacés de trous de taille proportionnelle à  $h$ : par exemple pour le double puits symétrique (typiquement  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2 + x^4$ ), si  $E < 0$ , les paquets sont des paires de valeurs propres exponentiellement proches et si  $E > 0$ , les paquets se réduisent à une valeur propre. Les fonctions propres correspondantes sont des intégrales oscillantes associées à des variétés lagrangiennes, les valeurs de l'énergie autorisées sont quantifiées par les conditions de Bohr-Sommerfeld.

Pour  $E$  proche du minimum de  $V$ , Helffer et Sjöstrand ([12]) ont également donné une description du spectre et des fonctions propres.

Pour  $E$  proche de 0, les premiers résultats sont ceux de Ford-Hill-Wakeeno-Wheeler ([8]) sur le problème de Dirichlet pour un potentiel  $V(x) = -x^2$ . Les autres études sur le sujet sont plus récentes, citons en particulier:

- C. Gérard et A. Grigis ([9]) qui étudient le cas de potentiels  $V$  analytiques et décrivent le spectre lorsque  $E \notin [-Ch, Ch]$  (pour  $C$  assez grand),
- Duclos et Hogreve ([6]) étudient la concentration des fonctions propres d'énergie  $E$ ,
- Brummelhuis, Paul et Uribe ([1]) dont les formules de trace généralisent l'asymptotique de Weyl pour le nombre de valeurs propres dans des intervalles d'énergie du type  $[Ah, Bh]$ .

- Carry et Rusu étudient dans [2] une généralisation des conditions de Bohr-Sommerfeld (à  $O(h)$  près). Celle-ci semble être connue depuis 1966 (cf. Fröman, *Ark. Fys.*, **32**, 79).

Sjöstrand semble être le premier à avoir justifié rigoureusement les conditions de Bohr-Sommerfeld pour un potentiel  $C^\infty$  mais dans un cadre un peu différent (les variétés lagrangiennes étudiées dans [16] sont images de celles de Schrödinger par une rotation d'angle  $\frac{\pi}{4}$  ce qui modifie certains indices de Maslov).

## 2 Principaux résultats.

Nous avons obtenus des résultats sur la concentration des fonctions propres et sur la forme du spectre au voisinage de la valeur critique de l'énergie.

### 2.1 Premier aspect: concentration microlocale.

Deux outils permettent d'étudier la concentration d'une famille de fonctions  $(\phi_h)$ :

- le  $h$ -front d'onde, transposé de la notion de front d'onde  $C^\infty$  de Hörmander dans le cadre semi-classique:  $Z = WF^h(\phi_h)$  est l'ensemble des points de  $T^*X$  où  $\phi_h$  présente des oscillations non négligeables (c'est-à-dire non  $O(h^\infty)$ ).  
Lorsque  $\phi_h$  est solution de l'équation de Schrödinger,  $Z$  est un fermé invariant par le flot hamiltonien  $p(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$ .
- les mesures de concentration microlocales  $\mu_h$ . Ces mesures sont définies sur  $T^*X$  et leur limite vague (lorsque  $h \rightarrow 0$ )  $\mu_\infty$  est définie sans ambiguïté. La mesure  $\mu_\infty$  est portée par  $Z$  et est invariante par le flot hamiltonien lorsque  $\phi_h$  est solution de l'équation de Schrödinger. Des notions très voisines ont été introduites par P. Gérard ([10]) et L. Tartar ([17]).

Rappelons brièvement la définition mathématique de ces deux notions, pour les hypothèses techniques d'existence on renvoie à [3]:

- $WF^h(\phi_h)$ :  
Si  $U$  est un ouvert de  $T^*\mathcal{R}$ , alors  $U \cap WF^h(\phi_h) = \emptyset$  si pour tout symbole  $a$  à support compact dans  $U$ , on a:

$$|\text{Op}^W(a)\phi_h|_{L^2} = O(h^\infty),$$

où  $\text{Op}^W(a)$  désigne la quantification de Weyl du symbole  $a$ .

- $\mu_h$ :  
Si  $a$  est un symbole d'ordre  $-\infty$  (à décroissance rapide en  $x$  et en  $\xi$ ), on pose:

$$\mu_h(a) = (\text{Op}^+(a)\phi_h | \phi_h),$$

où  $\text{Op}^+(a)$  désigne une *quantification positive*, c'est-à-dire qu'à un symbole positif, elle associe un opérateur positif. Comme exemple de quantification positive, on peut adopter le choix suivant (cf. Helffer-Martinez-Robert [11]):

$$\text{Op}^+(a) = \frac{1}{2\pi h} \int a(y, \eta) \Pi^{y, \eta} dy d\eta,$$

où  $\Pi^{y, \eta}$  désigne le projecteur sur le translaté de  $(y, \eta)$  dans l'espace des phases de l'état fondamental de l'oscillateur harmonique.

La quantification de Weyl ne possède pas cette propriété de positivité, mais on a la relation:

$$\text{Op}^+(a) = \text{Op}^W(a) + O(h).$$

Pour illustrer ces notions, considérons des solutions *BKW* de l'équation de Schrödinger attachée à une variété lagrangienne  $\Lambda$ , en-dehors du lieu critique. La famille  $\phi_h(x)$  est alors définie (localement) par:

$$\phi_h(x) = a_h(x) e^{\frac{i}{h} S(x)} \quad \text{où } \Lambda = \{(x, S'(x))\}, \quad (1)$$

et où  $a_h$  est un symbole.

Notons  $\pi_\Lambda$  la restriction à  $\Lambda$  de la projection canonique de  $T^*\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}$ . On vérifie alors facilement que, localement en  $x$ , on a:

$$WF^h(\phi_h) \subset \Lambda, \quad \mu_h(x, \xi) = \pi_\Lambda^*(|a_0|^2(x) dx) + O(h), \quad (2)$$

autrement dit, le  $h$ -front d'onde est porté par la variété lagrangienne et les mesures de concentration sont égales au carré du symbole principal de l'intégrale oscillante. Ce résultat est d'ailleurs vrai sans condition sur le lieu critique (cf. Duistermaat: [7]).

Le résultat est alors le:

**Théorème 1** Soit  $I$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$ ,  $V \in C^\infty(I, \mathbb{R})$ , tel que  $V(0) = V'(0) = 0, V''(0) < 0$ . Soit  $p(x, \xi) = \frac{1}{2}\xi^2 + V(x)$ , on suppose que  $\Lambda = p^{-1}(0)$  est connexe et ne contient pas d'autres points critiques de  $p$  que  $(0, 0)$ .

On note  $\Lambda_{in, out}^\pm$  les quatre morceaux de variétés lagrangiennes de  $\Lambda$ , l'indice in ou out faisant référence au sens du flot hamiltonien et l'indice  $\pm$  au signe de  $\xi$  (cf. figure 1, p. 3).

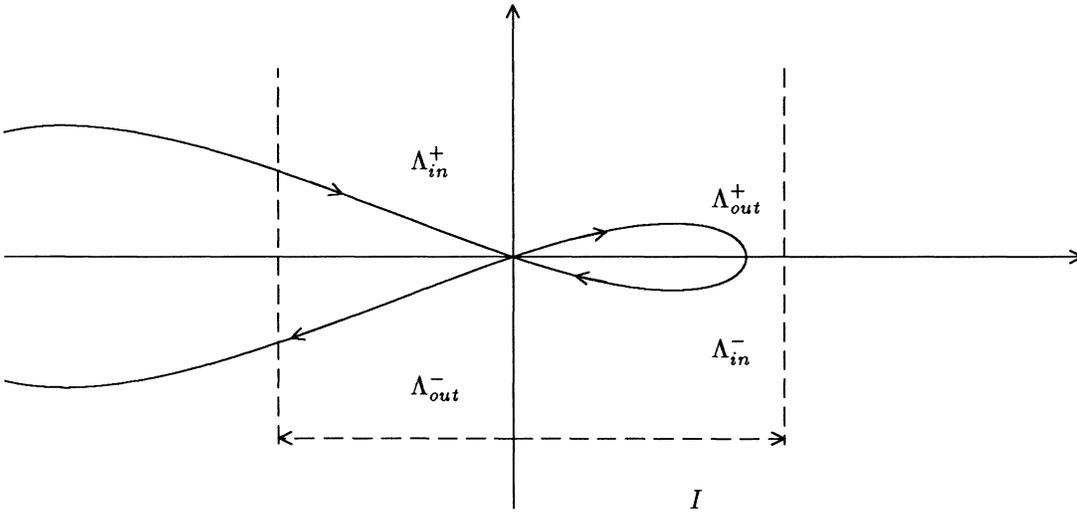


Figure 1: Les variétés  $\Lambda_{d, \pm}$  et  $\Lambda_{g, \pm}$ .

On note  $\delta_o$  la masse de Dirac en  $(0, 0)$  et  $\delta_{in, out}^\pm$  les mesures de Lebesgue sur  $\Lambda_{in, out}^\pm$  associées à la paramétrisation comme orbites du flot hamiltonien  $Y_p$  de  $p$ .

Soit

$$P = -\frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} + V(x)$$

et  $\varphi_h$  une famille de solutions de

$$(P - E(h))\varphi_h = 0,$$

où  $E(h)$  tend vers 0, et telles que la norme dans  $L^2(I, dx)$  de  $\varphi_h$  vaille 1.

Alors on a, en désignant par  $\mu_h$  les mesures de concentrations microlocales associées aux  $\varphi_h$ :

- (a)  $\mu_h$  tend vaguement vers  $\delta_o$ ,
- (b)  $\forall \mathcal{K} \subset \Lambda$ , compact dont l'intérieur rencontre soit  $\Lambda_{in}^+$  et  $\Lambda_{in}^-$  soit  $\Lambda_{out}^+$  et  $\Lambda_{out}^-$ , on a

$$\mu_h(\mathcal{K}) \geq \frac{C(\mathcal{K})}{|\ln h|}.$$

Ce résultat est encore vrai si on suppose que  $|E| \leq C$  pour  $C$  assez petit.

- (c) De plus, si  $E(h) = O(h)$ , dans l'espace des mesures de Radon réelles sur  $\Lambda \setminus (0, 0)$  muni de la topologie de la convergence vague, les valeurs d'adhérence de

$$|\ln h| \mu_h$$

sont dans la somme directe des enveloppes convexes

$$\sqrt{-V''(0)} \text{conv}(\delta_{out}^-, \delta_{out}^+) \oplus \text{conv}(\delta_{in}^-, \delta_{in}^+).$$

## 2.2 Deuxième aspect: forme du spectre.

Il s'agit en particulier d'expliquer dans le cas du double puits symétrique comment on passe des paquets de deux valeurs propres exponentiellement proches ( $E < 0$ ) aux valeurs propres régulièrement espacées ( $E > 0$ ). La situation sera donc celle d'un double puits (mais pas forcément symétrique) et on va commencer par donner les conditions de Bohr-Sommerfeld généralisées.

On note  $A(E)$  l'aire de la variété  $\Lambda = \{(x, \xi) / p(x, \xi) = E\}$ . Notons que pour  $E$  tendant vers 0,  $A(E)$  n'est pas  $C^\infty$  mais le lemme de Morse isochore ([5]) permet de se ramener localement à  $V(x) = -\frac{1}{2}x^2$ . Dans ce cas particulier, on montre que  $A(E) - E \ln E$  est  $C^\infty$ . Donc, quitte à remplacer  $E$  par  $\tilde{E} = f(E)$ , où  $f$  est une fonction  $C^\infty$  de  $E$ , on montre que  $A(E) - \tilde{E} \ln \tilde{E}$  est  $C^\infty$  en  $E = 0$ .

Pour  $E < 0$ ,  $\Lambda$  possède deux composantes connexes,  $\Lambda_d$  incluse dans  $\{x > 0\}$  et  $\Lambda_g$  incluse dans  $\{x < 0\}$ . On peut donc définir la différence des deux aires  $\Delta A(E) = A_d - A_g$ , qui est (sans modification) une fonction  $C^\infty$  de  $E$  également en  $E = 0$  dont on choisit un prolongement  $C^\infty$  toujours noté  $\Delta A(E)$  pour  $E > 0$ . On montre que le choix du prolongement ne change pas les conditions de Bohr-Sommerfeld (modulo  $O(h^\infty)$ ).

On peut énoncer les conditions de Bohr-Sommerfeld de la manière suivante:

**Proposition 2** *Il existe  $h_0 > 0$  et  $E_0 > 0$  tels que, pour  $h \in ]0, h_0]$  et  $E \in [-E_0, E_0]$ , on ait: il existe une bijection  $b$  entre l'ensemble des valeurs propres (comptées avec multiplicité) de:*

$$\left(-\frac{1}{2}h^2 \frac{d^2}{dx^2} + V(x)\right)\phi_h = E(h)\phi_h$$

et l'ensemble des solutions de:

$$\cos(\pi + \arg \Gamma(\frac{1}{2} - it) - t + t \ln |t| + \alpha(E, h)) = \frac{\cos \beta(E, h)}{\sqrt{1 + e^{2t\pi}}}, \quad (3)$$

telle que  $b(\mu) - \mu = O(h^\infty)$ , où:

- $t = \frac{1}{h} f_h(E)$ ,  $f_h$  est une fonction  $C^\infty$  admettant un développement en puissances de  $h$  dont le premier terme est  $f$ ,
- $\alpha = \frac{1}{2h} A(E) +$  un symbole classique en  $h$  à coefficients  $C^\infty$  en  $E$ ,
- $\beta = \frac{1}{2h} \Delta A(E) +$  un symbole classique en  $h$  à coefficients  $C^\infty$  en  $E$ .

Remarquons que lorsque  $E(h)$  tend vers une limite  $E$  non nulle, l'équation (3) redonne les conditions de Bohr-Sommerfeld habituelles. On applique en effet la formule de Stirling à la fonction  $\Gamma$  pour  $t \rightarrow \pm\infty$ :

$$\arg \Gamma(\frac{1}{2} - it) = t - t \ln |t| + o(1)$$

d'où l'on tire (à  $O(h)$  près):

- si  $E > 0$  ( $t \rightarrow +\infty$ ),

$$\pi + \frac{A(E)}{2h} = \frac{\pi}{2}(2k + 1), \quad k \text{ entier}$$

i.e.  $A(E) = h\pi(2k + 1)$ .

- si  $E < 0$  ( $t \rightarrow -\infty$ ),

$$\pi + \frac{A(E)}{2h} = \pm \frac{\Delta A(E)}{2h} + 2k\pi$$

i.e.  $A_g(E) = h\pi(2k+1)$  ou  $A_d(E) = h\pi(2k+1)$ .

Une conséquence de la proposition 2 est que le nombre de valeurs propres dans l'intervalle  $[Ah, Bh]$  est équivalent à  $\pi(B-A)|\ln h|$  (généralisation de la formule de Weyl). Lorsque  $h$  tend vers 0, il y a donc de plus en plus de valeurs propres  $E(h)$  dont le paramètre  $t = \frac{\tilde{E}}{h}$  tend vers une limite donnée.

Il reste à donner un sens quantitatif à la forme du spectre. Nous proposons d'étudier le rapport entre deux trous successifs dans le spectre. Si on note  $\lambda_n$  la suite ordonnée des valeurs propres, on pose:

$$r_n = \frac{\lambda_{n+2} - \lambda_{n+1}}{\lambda_{n+1} - \lambda_n}.$$

Remarquons que pour le double puits symétrique, lorsque  $E < 0$ ,  $r_n$  est alternativement exponentiellement petit et exponentiellement grand. Plutôt que d'étudier  $r_n$ , on va s'intéresser au *paramètre de forme du spectre*:

$$R_n = \inf(r_n, r_n^{-1}).$$

Le cas classique du double puits donne alors:

- pour  $E < 0$ ,  $R_n = O(h^{-N} e^{-\frac{C(E)}{h}})$  où  $C(E)$  désigne la distance d'Agmon entre les deux puits,
- pour  $E > 0$ ,  $R_n \rightarrow 1$ .

Pour  $h$  tendant vers 0, nous avons vu précédemment que de nombreuses valeurs propres ont leur paramètre  $\frac{1}{h}\tilde{E}$  qui tendent vers la même limite  $t$ . Pour ces valeurs propres, on peut calculer un équivalent de  $R_n$  en fonction de  $t$ :

$$\frac{1}{R} \sim \frac{\pi}{\arccos\left(\frac{|\cos \beta|}{\sqrt{1+e^{2i\pi}}}\right)} - 1$$

ce qui permet de représenter la fonction  $R$  en fonction de  $t = \frac{E}{h}$  (cf. figure 2, p. 6).

### 3 Idée des preuves.

L'idée principale est de construire un opérateur intégral de Fourier ramenant l'étude de  $P$  à celle de l'opérateur modèle  $P_0 = \frac{h}{2i}(x\partial_x + \partial_x x)$  (microlocalement près de  $(0,0)$ ). L'étude des solutions explicites du modèle permet alors de prouver le théorème 1 et la proposition 2.

Commençons par définir les notions de solution microlocale et d'égalité microlocale entre fonctions et opérateurs.

1. On dira que  $\phi_h$  est solution microlocale de l'opd (opérateur pseudo-différentiel)  $P$  sur un ouvert  $U \subset T^*X$  si  $WF^h(P\phi_h) \cap U = \emptyset$ ,
2. Lorsque  $WF^h(\phi_h - \psi_h) \cap U = \emptyset$ , on dira que les familles  $\phi_h$  et  $\psi_h$  sont égales microlocalement sur  $U$  ce que l'on notera  $\phi_h \sim_U \psi_h$ ,
3. Enfin, deux opd  $P$  et  $Q$  sont égaux microlocalement sur un ouvert  $U$  si pour toute famille  $\phi_h$ , on a  $WF^h((P-Q)\phi_h) \cap U = \emptyset$ .

Deux énoncés permettent de préciser comment se comportent les solutions microlocales de l'équation  $(P-E)\phi_h \sim_U 0$  sur un voisinage ouvert  $W$  de  $(0,0)$ . Le premier est un théorème de forme normale:

**Théorème 3** Soit  $P$  un opd autoadjoint sur son domaine de symbole  $p$  tel que  $p(0,0) = 0$ ,  $p'(0,0) = 0$  et tel que  $p''(0,0)$  soit non dégénéré de signature  $(1,1)$ . Il existe alors un oif (opérateur intégral de Fourier)  $U$ , une famille  $f_h$  de fonctions de l'énergie  $E$  admettant un développement en puissances de  $h$  et telles que  $f_0(0) = 0$  et  $f'_0(0) > 0$ , et un réel  $\delta > 0$  tels que:

$$U^{-1}f_h(P)U \sim_{]-\delta,\delta[} P_0 = \frac{h}{2i}(x\partial_x + \partial_x x).$$

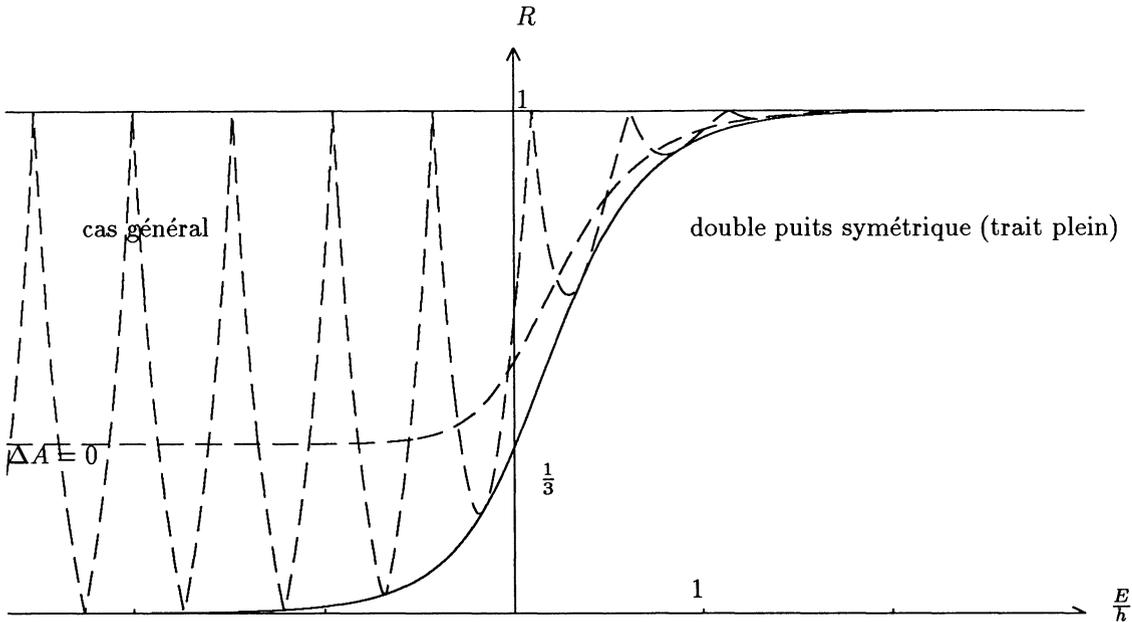


Figure 2: Paramètre de forme du spectre près de la valeur critique  $E = 0$ .

Ce théorème a tout d'abord été prouvé par B. Helffer et J. Sjöstrand ([13]) avec des hypothèses d'analyticité sur le potentiel  $V$ . Dans le cadre  $C^\infty$ , on pourra se référer à [16] ou [3]. En deux mots, on le montre d'abord pour les symboles principaux grâce au lemme de Morse isochore, puis on élimine successivement les puissances croissantes de  $h$  en résolvant des équations de transport ou en ajustant le développement de  $f_h$  pour tuer les monômes résonnants des équations de transport.

Le second résultat est un théorème de propagation des singularités:

**Théorème 4** *Soit  $U$  un ouvert,  $P$  un opd de symbole  $p$  réel et  $\mathcal{E}$  l'espace vectoriel des solutions microlocales sur  $U$  de  $P\phi_h \sim_U 0$  quotienté par l'égalité microlocale sur  $U$ . Si l'intersection de  $U$  avec  $\{p = 0\}$  est un unique arc de bicaractéristique  $\gamma$  tel que  $dp|_\gamma \neq 0$ , alors  $\mathcal{E}$  est de dimension inférieure ou égale à 1.*

Grâce au théorème de forme normale, on se ramène à étudier les solutions microlocales de  $P_0 - \tilde{E}$  (où  $\tilde{E} = f_h(E)$ ). Mais on connaît les solutions distributions de  $(P_0 - \tilde{E})\phi_h = 0$ . Ce sont les fonctions:

$$v_q^\pm(x) = Y(\pm x) \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\pm \frac{1}{\hbar} E \ln|x|}, \quad \hat{v}_p^\pm(\xi) = Y(\pm \xi) \frac{1}{\sqrt{\xi}} e^{-\frac{1}{\hbar} E \ln|\xi|}.$$

On en déduit deux paires de solutions microlocales  $\{w_q^\pm\}$  et  $\{w_p^\pm\}$  de  $P_0$  sur  $] -\delta, \delta[^2$  en tronquant les solutions distributions par un opd  $\Pi$ , microlocalement égal à l'identité sur  $] -\delta, \delta[^2$ , par exemple:

$$\Pi u(x) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int \int e^{\frac{1}{\hbar}(x-y)\cdot\xi} \chi(\xi) \chi\left(\frac{x+y}{2}\right) u(y) dy d\xi,$$

où  $\chi = 1$  sur  $] -\delta, \delta[$  et  $\chi \in C_0^\infty([-2\delta, 2\delta])$ .

On montre alors, en appliquant le théorème 4, que la dimension de l'espace vectoriel des solutions microlocales de  $P_0 - \tilde{E}$  est de dimension deux. On a ainsi deux bases de solutions microlocales  $\{w_q^+, w_q^-\}$  et  $\{w_p^+, w_p^-\}$ .

Afin de microlocaliser sur chacune des quatre branches de la variété  $\Lambda$ , au lieu de représenter une solution microlocale de l'opérateur de Schrödinger comme somme soit des  $w_q^\pm$ , soit des  $w_p^\pm$ , on peut aussi représenter une solution microlocale dans  $] -\delta, \delta[^2 - \{(0, 0)\}$  comme somme de quatre intégrales oscillantes associées à ces quatre branches. On introduit donc les intégrales oscillantes  $\phi_{in, out}^\pm$  associées à  $\Lambda_{in, out}^\pm$ . On

peut ainsi représenter les solutions microlocales de  $(P_0 - E)\phi = 0$  sur  $]-\delta, \delta[^2 - \{(0, 0)\}$  par :

$$\phi_h \sim_{]-\delta, \delta[^2 - \{(0, 0)\}} \sum_{\pm} x_{in}^{\pm} \phi_{in}^{\pm} + x_{out}^{\pm} \phi_{out}^{\pm}.$$

La condition “être solution microlocale de l’équation de Schrödinger” entraîne alors l’existence de 2 relations entre les coefficients  $x_{in, out}^{\pm}$  (puisque on a 4 coefficients et un espace vectoriel de dimension 2), il existe donc une matrice  $T$ , appelée matrice de transfert, telle que :

$$\begin{pmatrix} x_{out}^+ \\ x_{out}^- \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_{in}^+ \\ x_{in}^- \end{pmatrix}, \quad T = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - i\frac{E}{h}\right) e^{\frac{\pi}{4}(2\frac{E}{h} + i)} e^{-i\frac{E}{h} \ln h} \begin{pmatrix} 1 & -ie^{-\frac{E}{h}\pi} \\ -ie^{-\frac{E}{h}\pi} & 1 \end{pmatrix} + O(h^\infty), \quad (4)$$

cette matrice est unitaire et son expression se déduit du calcul explicite des transformées de Fourier de  $v_q^{\pm}$ .

Pour montrer le théorème de concentration microlocale, il suffit alors de connaître le comportement asymptotique des mesures de concentration microlocales  $\mu_h$  associées à  $\sum_{\pm} x_q^{\pm} w_q^{\pm}$ , ce qui se fait à nouveau grâce à un calcul explicite sur les fonctions  $v$ . On globalise alors grâce au théorème d’Égorov (invariance de  $\mu_h$  par le flot hamiltonien).

Pour généraliser les conditions de Bohr-Sommerfeld, on représente les solutions près de  $x = -\delta$  et de  $x = \delta$  par des sommes d’intégrales oscillantes  $\psi_{in, out}^{\pm}$  :

$$\psi_{h, E} \sim_{x \rightarrow \delta} x_{out}^+ \psi_{out}^+ + x_{in}^- \psi_{in}^- \sim_{x \rightarrow -\delta} x_{out}^- \psi_{out}^- + x_{in}^+ \psi_{in}^+$$

où on normalise les phases des  $\psi_{in, out}^{\pm}$  par le choix  $\psi_{in, out}^{\pm}(\pm\delta) \in \mathbb{R}^+$ . Les  $\psi_{in, out}^{\pm}$  sont donc à des phases près les transformées par l’opérateur  $U$  des  $\phi_{in, out}^{\pm}$ . Ce qui entraîne l’existence d’une matrice de transfert  $\tilde{T}$ , unitaire, telle que :

$$\begin{pmatrix} x_{out}^+ \\ x_{out}^- \end{pmatrix} = \tilde{T} \begin{pmatrix} x_{in}^+ \\ x_{in}^- \end{pmatrix},$$

cette matrice est la matrice  $T(\tilde{E})$  à des phases près. Ces phases admettent des développements asymptotiques très agréables car près de  $x = \pm\delta$ , le symbole  $p$  n’est pas critique. De plus, on connaît  $\tilde{T}(E)$  pour  $E$  ne tendant pas vers 0, elle s’exprime à l’aide des fonctions de mesures d’aires introduites à la section 2. On considère alors  $E$  et  $h$  comme deux paramètres indépendants, on déduit alors des relations théoriques existant entre les matrices  $\tilde{T}$  et  $T$  la forme de la matrice  $\tilde{T}$  et le début du développement en  $h$  des phases qui y apparaissent.

On ajoute aux deux relations obtenues entre les quatre coefficients  $x_{in, out}^{\pm}$  par l’intermédiaire de la matrice de transfert les deux relations obtenues à l’extérieur de  $[-\delta, \delta]^2$ . On en déduit que 1 est valeur propre d’une matrice unitaire carrée d’ordre 2 ce qui donne après calculs la proposition 2. Plus exactement, on montre que si  $E$  est solution de (3), alors on peut construire un quasi-mode d’ordre  $O(h^\infty)$ , donc le spectre contient une valeur propre égale à  $E$  à  $O(h^\infty)$  près. Pour s’assurer qu’on épuise le spectre, on part d’une fonction propre, c’est donc une solution microlocale donc la valeur propre vérifie (3) à  $O(h^\infty)$  près. Enfin, on règle les questions de multiplicité par la conservation du produit scalaire  $L^2$  (à  $O(h^\infty)$  près) par l’égalité microlocale (sur un intervalle suffisamment grand).

L’étude du paramètre de forme du spectre  $R_n$  se ramène à placer deux points sur une même verticale (cf. figure 3, p. 8), le premier point appartenant au cercle de rayon 1 et d’angle  $\alpha$  et le second point appartenant au cercle de rayon  $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2i\pi}}}$  et d’angle  $\beta$ .

Comme les angles  $\alpha$  et  $\beta$  vérifient :

$$\partial_E \alpha = |\ln h| + O(1), \quad \partial_E \beta = O(1)$$

autrement dit comme l’angle  $\beta$  varie très peu par rapport à l’angle  $\alpha$  (pour  $h$  assez petit), on obtient 3 valeurs propres successives pour des angles  $\alpha$  correspondant aux points  $A_1, A_2$  et à nouveau  $A_1$  du cercle de rayon 1. Le rapport  $R$  est donc égal, à  $O(\frac{1}{|\ln h|})$  près, au rapport des longueurs entre les deux arcs de cercle reliant les deux points  $A_1$  et  $A_2$  du cercle de rayon 1 situés à la verticale du point  $B$  du cercle de rayon  $\frac{1}{\sqrt{1+e^{2i\pi}}}$  et d’angle  $\beta$ . Donc :

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi}{\arccos\left(\frac{|\cos \beta|}{\sqrt{1+e^{2i\pi}}}\right)} - 1$$

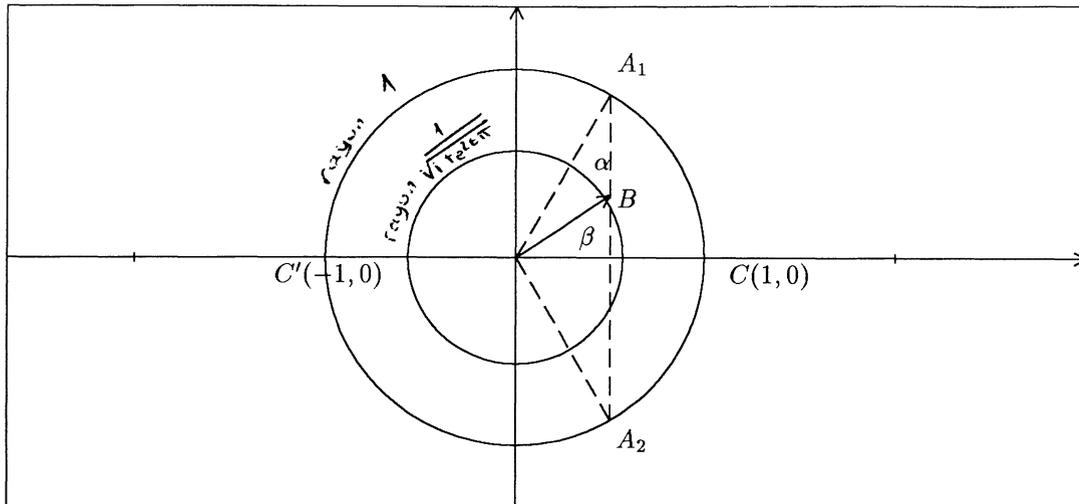


Figure 3: Le paramètre de forme vaut  $\frac{A_1 B A_2}{A_1 C' A_2}$ .

Par exemple, pour  $\frac{E}{h} \rightarrow 0$  (donc  $t \rightarrow 0$ ) dans le cas du double puits symétrique ( $\beta = 0$ ), on obtient:

$$\frac{1}{R} = \frac{\pi}{\arccos \frac{1}{\sqrt{2}}} - 1 = 3.$$

Pour une preuve rigoureuse de ce résultat, il suffit d'adapter à notre situation la preuve de [16].

## 4 Remarques.

- Pour l'équation de Hill avec un potentiel analytique, März a étudié la taille des gaps et des bandes du spectre près de  $E = 0$ , le rapport entre ces deux tailles est l'analogie dans cette situation du paramètre de forme (cf. [15]).
- L'étude du spectre près de  $E = 0$  a des applications:
  - en géométrie hyperbolique que l'on peut résumer de la façon suivante: s'il existe des fonctions propres du laplacien qui se concentrent sur des géodésiques instables, cette concentration est alors logarithmiquement lente.
  - en physique du solide: cf. Horn ([14]), Sjöstrand ([16]).
- Lorsque  $E$  n'est pas  $O(h)$  mais tend vers 0, il semble que la concentration en 0 soit logarithmiquement lente, mais par rapport à  $E$ , i.e.  $\mu_h(K) \geq \frac{C(K)}{|\ln E|}$ .
- Il serait intéressant de connaître numériquement le spectre de l'équation de Schrödinger dans la zone  $[-Ch, Ch]$ .
- Est-il possible de généraliser en dimension supérieure à 1 ce qu'il semble raisonnable de généraliser, à savoir la concentration logarithmique des fonctions propres au point d'équilibre instable?

## Références

- [1] R. Brummelhuis, T. Paul, and A. Uribe. Spectral estimates around a critical level. *Manuscript, Reims*, 1993.

- [2] J. Carry and P. Rusu. Separatrix eigenfunction. *Physical Review A*, 45(12):8501–8512, 15 June 1992.
- [3] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique - I. Concentration microlocale. *Prépublication de l'Institut Fourier*, 252, 1993.
- [4] Y. Colin de Verdière and B. Parisse. Équilibre instable en régime semi-classique - II. Conditions de Bohr-Sommerfeld. *En préparation*, 1994.
- [5] Y. Colin de Verdière and J. Vey. Le lemme de Morse isochore. *Topology*, 18:283–299, 1979.
- [6] P. Duclos and H. Hogreve. On the semi-classical localization of quantum probability. *J. Math. Phys.*, 34(5):1681–1691, 1993.
- [7] J. Duistermaat. Oscillatory integrals, lagrange immersions and unfolding of singularities. *C.P.A.M.*, 27:207–281, 1974.
- [8] K. Ford, D. Hill, M. Wakeno, and J. Wheeler. Quantum Effects near a Barrier Maximum. *Annals of Physics*, 7:239–258, 1959.
- [9] C. Gérard and A. Grigis. Precise estimates of tunneling and eigenvalues near a potential barrier. *Journal of Differential Equations*, 72:149–177, 1988.
- [10] P. Gérard. Microlocal defect measures. *Comm. PDE*, 16(11):1761–1794, 1991.
- [11] B. Helffer, A. Martinez, and D. Robert. Ergodicité et limite semi-classique. *Communications in Mathematical Physics*, 109:313–326, 1987.
- [12] B. Helffer and J. Sjöstrand. Multiple wells in the semi-classical limit-I. *Communication in Partial Differential Equation*, 9(4):337–408, 1984.
- [13] B. Helffer and J. Sjöstrand. Semi-classical analysis for Harper's equation- III. Cantor structure of the spectrum. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 117(4), 1989.
- [14] W. Horn. *Semiclassical approximations for tunneling near the top of a potential barrier and its applications to solid state physics*. PhD thesis, UCLA, 1989.
- [15] C. März. Spectral Asymptotics for Hill's Equation near the potential maximum. *Asymptotic Analysis*, 5:221–267, 1992.
- [16] J. Sjöstrand. Density of state oscillations for magnetic Schrödinger operator. In Bennewitz, editor, *Differential Equations and Mathematical Physics*, pages 295–345, University of Alabama at Birmingham, March 15-21 1990.
- [17] L. Tartar. H-measures, a new approach for studying homogenization oscillations and concentration effects in partial differential equations. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 115A:193–230, 1990.