

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. ZUILY

Plongement isométrique de la sphère à courbure non négative dans R^3

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 5, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994___A5_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PLONGEMENT ISOMETRIQUE DE LA SPHERE A COURBURE NON NEGATIVE DANS \mathbf{R}^3

C. ZUILY

(d'après Hong-Zuily)

I Introduction

Un problème classique de la théorie globale des surfaces est celui posé par H. Weyl en 1916 : étant donnée une métrique g sur la sphère S^2 à courbure positive, existe-t-il un plongement isométrique de (S^2, g) dans l'espace Euclidien \mathbf{R}^3 , dont l'image est convexe ? Dans le cas où la courbure de Gauss est strictement positive (et la métrique assez régulière) cette question a été résolue par l'affirmative et par deux voies différentes. La première, qui a été initiée par Weyl lui-même [W], utilise des techniques d'e.d.p. non linéaires, et c'est à Nirenberg [N] que l'on doit la solution complète du problème. La seconde s'appuie sur des arguments géométriques (approximation par des polyèdres) pour prouver l'existence d'une solution en un sens très faible (Alexandrov [A]), puis sur des e.d.p. pour prouver la régularité (Pogorelov [P], Sabitov [Sa]). Finalement, on dispose aujourd'hui du résultat suivant.

Théorème 1.1.— *Soit (M, g) une surface Riemannienne de classe $C^{k,\alpha}$, ($k \geq 2$, $0 < \alpha < 1$) à courbure de Gauss strictement positive, homéomorphe à une sphère. Il existe alors un plongement isométrique de (M, g) dans \mathbf{R}^3 , de classe $C^{k,\alpha}$ dont l'image est une surface strictement convexe. Ce plongement est unique à un déplacement près.*

Sous cette forme, ce résultat est dû à Sabitov [Sa], Nirenberg l'ayant démontré pour des métriques au moins C^4 et Heinz [He1], pour celles qui sont au moins C^3 .

Lorsque la courbure est positive, mais peut s'annuler, il existe un résultat général dû à Alexandrov [A] qui concerne les variétés éventuellement peu régulières, par exemple des polyèdres.

Théorème 1.2 (Alexandrov [A]).— *Toute variété de dimension deux à courbure non négative, homéomorphe à une sphère, est isométrique à une surface convexe de \mathbf{R}^3 .*

Ce résultat, démontré par des méthodes géométriques, ne fournit que des isométries peu régulières. Cependant l'observation suivant ([I]) montre qu'en général il ne faut pas espérer autant de régularité que dans le Théorème 1.1.

Proposition 1.3 ([I]).— *Soit $X : (S^2, g) \rightarrow \mathbf{R}^3$ un plongement isométrique de classe C^2 où $g \in C^4$. Supposons que la courbure de Gauss K de g satisfait*

$$(1.1) \quad K \geq 0 \quad \text{sur} \quad S^2$$

(1.2) *Il existe $P \in S^2$ tel que $K(P) = 0$ et P est un point critique non dégénéré de K .*

Alors si la courbure moyenne H est telle que $H(P) = 0$, on a $X \notin C^3$.

Preuve. Notons $r = d(\cdot, P)$ la distance à P . Grâce à (1.1.) et (1.2), on a au voisinage de P :

$$(1.3) \quad K \geq C^2 r^2$$

Comme $K \geq 0$, l'image de X borne un corps convexe. Le choix de la normale intérieure montre que l'on a $H \geq 0$, et par conséquent si $H(P) = 0$, H a un minimum en P . Supposons $X \in C^3$, alors $H \in C^1$ et donc $\nabla H(P) = 0$, ce qui implique que $H = 0(r)$. Mais on a toujours l'inégalité $H^2 \geq K$, ce qui contredit (1.3).

L'objet de cet exposé est de décrire la preuve du :

Théorème 1.4 (Hong-Zuily [H-Z]).— *Soit g une métrique C^4 sur S^2 dont la courbure vérifie*

$$(1.4) \quad K \geq 0 \quad \text{sur } S^2$$

Il existe un plongement isométrique X de (S^2, g) dans \mathbf{R}^3 de classe $C^{1,1}$. De plus X est $C^{3,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$, dans le complémentaire de $K^{-1}(0)$ (C^∞ si la métrique est C^∞).

Ce théorème a été démontré par Iaia [I] dans le cas où $K^{-1}(0)$ est un point P_0 au voisinage duquel $\Delta_g K$ est positif ou nul.

D'autre part, indépendamment, P. Guan - Y.Y. Li [GL] ont récemment obtenu l'existence d'un plongement $C^{1,1}$, sous l'hypothèse (1.4), mais leur méthode ne leur permet pas démontrer la régularité hors de $K^{-1}(0)$.

Au vu de la Proposition 1.3 il est raisonnable de penser que le plongement X est plus régulier au voisinage des points où $K = 0$ mais $H \neq 0$. C'est encore aujourd'hui un problème ouvert.

Notons enfin que d'après Pogorelov [P] et Sacksteder [S] dans le cadre du théorème 1.4 deux plongements isométriques de classe C^2 sont congruents. Pour les plongements $C^{1,1}$ c'est un problème ouvert.

II Preuve du théorème 1.4

On utilise la méthode de Weyl et Nirenberg. L'observation de base est la suivante.

- Soit Σ une surface convexe de \mathbf{R}^3 , régulière, à courbure strictement positive localement donnée par $X : U \subset \mathbf{R}^2 \rightarrow \Sigma$. Notons $u = (u_1, u_2)$ les coordonnées locales,

$(g_{ij}(u))$, $(l_{ij}(u))$ les composantes de la métrique et de la deuxième forme fondamentale de Σ et enfin $G = \det g_{ij}$. Prenons pour origine le centre de la plus grande boule pouvant être inscrite dans le convexe bordé par Σ et posons

$$(2.1) \quad \rho(u) = -\frac{1}{2}\|X(u)\|^2$$

où, $\|\cdot\|$ est la norme Euclidienne de \mathbf{R}^3 . Alors ρ vérifie l'équation

$$(2.2) \quad \det(\nabla_{ij}\rho + g_{ij}) = K.G.(-2\rho - \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\nabla_i\rho\nabla_j\rho)$$

Remarquons que chaque composante de X vérifie une équation voisine de (2.2) mais l'avantage de cette dernière est que la quantité $-2\rho - \sum_{i,j=1}^2 g^{ij}\nabla_i\rho\nabla_j\rho$ a une interprétation géométrique simple. Elle représente le carré de la distance de l'origine au plan tangent à Σ au point $X(u)$.

• On approxime ensuite la métrique g par des métriques C^∞ à courbure strictement positives

Lemme 2.1.— Soit g une métrique C^4 sur S^2 dont la courbure K est non négative. Il existe une suite (g_ε) de métriques C^∞ de courbure K_ε telle que

- a) g_ε converge vers g dans C^4 ,
- b) K_ε converge vers K dans C^2 ,
- c) $K_\varepsilon > 0$ sur S^2 pour ε assez petit.

Preuve : Soit $F = \{P \in S^2 : K(P) = 0\}$. On peut supposer $F \neq \emptyset$ sinon le théorème 1.4. résulte du Th.1.1. Ensuite d'après le théorème de Gauss-Bonnet $F \neq S^2$. Soient $\sigma_1 \subset \sigma_2$ deux ouverts de S^2 contenus dans $S^2 \setminus F$ et $\theta \in C^\infty(S^2)$, $0 \leq \theta \leq 1$, $\theta = 1$ sur σ_1 , $\theta = 0$ sur $S^2 \setminus \sigma_2$. On prend alors

$$(2.3) \quad \tilde{g}_\varepsilon = e^{2\varepsilon v} g$$

où v est une solution C^∞ de

$$(2.4) \quad \Delta_g v = \theta - \frac{1}{|S^2|g} \int_{(S^2,g)} \theta(\omega) d\omega$$

dont la métrique \tilde{K}_ε est donnée par

$$(2.5) \quad e^{2\varepsilon v} \tilde{K}_\varepsilon = K - \varepsilon \Delta v .$$

On vérifie facilement que $\tilde{K}_\varepsilon > 0$ sur S^2 puis à ε fixé on approche, dans C^4 , \tilde{g}_ε par une suite (g_{ε_n}) de métriques C^∞ à courbures strictement positives grâce à la technique de régularisation de Green et Wu [GW].

• La variété (S^2, g_ε) ayant une courbure K_ε strictement positive, il résulte du théorème 1.1 que l'on peut trouver un plongement isométrique C^∞ $X_\varepsilon : (S^2, g_\varepsilon) \rightarrow \mathbf{R}^3$ tel que, $\Sigma_\varepsilon = X_\varepsilon(S^2)$ soit une surface bordant un ensemble strictement convexe de \mathbf{R}^3 .

L'objectif est de trouver des bornes uniformes de la norme C^2 de X_ε . On en déduira, après extraction de sous suite, que (X_ε) converge dans $C^{1,\alpha}$, pour tout $\alpha < 1$, vers un plongement isométrique $X \in C^{1,1}$ de (S^2, g) dans \mathbf{R}^3 .

A. Bornes C^0 de X_ε :

Quitte à translater X_ε par une constante, ce qui ne change pas les dérivées de X_ε , on peut supposer que l'origine est le centre de la plus grande boule que l'on peut inscrire dans l'ensemble convexe bordé par Σ_ε . Alors

$$(2.6) \quad |X_\varepsilon(P)| \leq \text{diametre } (S^2, g_\varepsilon) \leq \max_{S^2} e^{2\varepsilon v} \text{ diam } (S^2, g) \leq C_0$$

B. Bornes C^1 de X_ε :

On a

$$\langle \nabla_i X_\varepsilon, \nabla_j X_\varepsilon \rangle = g_{\varepsilon ij} = e^{2\varepsilon v} g_{ij} \quad \text{donc}$$

$$(2.7) \quad |\nabla_g X_\varepsilon(P)|_g^2 = \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} \langle \nabla_i X_\varepsilon, \nabla_j X_\varepsilon \rangle = e^{2\varepsilon v} \sum_{i,j=1}^2 g^{ij} g_{ij} \leq 2 \max_{S^2} e^{2\varepsilon v} \leq C_1$$

C. Bornes C^2 de X_ε :

Les bornes C^1 étant établies nous allons montrer que l'on peut inscrire une boule de rayon r_ε à l'intérieur de Σ_ε avec $r_\varepsilon \geq r_0 > 0$.

Cela résulte du lemme suivant :

Lemme 2.2 (Cheng-Yau [CY]).—

Soit Σ une surface compacte connexe dans \mathbf{R}^3 de courbure K définie sur S^2 . Il existe un nombre $r > 0$, qui dépend uniquement d'une borne supérieure de $\int_{S^2} \frac{d\omega}{K(\omega)}$ et d'une borne inférieure de $\inf_{u \in S^2} \int \max(0, \langle u, \omega \rangle) \frac{d\omega}{K(\omega)}$, tel que l'on puisse inscrire une boule de rayon r à l'intérieur du convexe borné par Σ .

Appliquons ce lemme à Σ_ε .

Comme $K_\varepsilon = e^{-2\varepsilon v}(K - \varepsilon\Delta v)$ on a $0 < K_\varepsilon \leq A$ où A est indépendant de ε , par conséquent

$$\int_{S^2} \max(0, \langle u, \omega \rangle) \frac{d\omega}{K_\varepsilon(\omega)} \geq \frac{1}{A} \int_{S^2} \max(0, \langle u, \omega \rangle) d\omega = \frac{2\pi}{A}$$

Ensuite comme $\Sigma_\varepsilon \rightarrow S^2$, $x \mapsto n(x)$, où n est la normale en x à Σ_ε , est un difféomorphisme global on a

$$\int_{S^2} \frac{d\omega}{K_\varepsilon(\omega)} = \int_{\Sigma_\varepsilon} d\sigma_\varepsilon = \int_{(S^2, g_0)} e^{2\varepsilon v} d\sigma_0 \leq \sup_{\substack{0 < \varepsilon < 1 \\ p \in S^2}} e^{2\varepsilon v(p)} \text{ aire } (S^2, g_0)$$

On déduit du lemme 2.2, puisque $-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2$ est la distance de l'origine au plan tangent à Σ_ε au point P que la fonction ρ_ε définie en (2.1) vérifie :

$$(2.8) \quad \begin{cases} \det(\nabla_{ij}\rho_\varepsilon + g_{\varepsilon ij}) = K_\varepsilon G_\varepsilon(-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2) \\ -2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2 \geq r_0^2 > 0 \end{cases}$$

On considère la fonction C^∞ sur S^2 définie par

$$(2.9) \quad w_\varepsilon = \Delta_{g_\varepsilon} \rho_\varepsilon \cdot \exp\left(\frac{\lambda}{2} |\nabla\rho_\varepsilon|_{g_\varepsilon}^2\right)$$

où λ est une constante réelle satisfaisant

$$(2.10) \quad \lambda C_0^2 \leq \frac{1}{4}$$

où C_0 est définie en (2.6). Posons d'autre part (en supprimant l'indice ε) :

$$(2.11) \quad \begin{cases} F(z_{ij}) = \det z_{ij}, \quad z_{ij} = \nabla_{ij}\rho + g_{ij}, \\ f = KG(-2\rho - |\nabla\rho|_g^2), \\ F^{ij} = \frac{\partial F}{\partial z_{ij}}, \quad F^{ijpq} = \frac{\partial^2 F}{\partial z_{ij} \partial z_{pq}}, \\ L = \Sigma F^{ij} \nabla_j \nabla_i. \end{cases}$$

En dérivant deux fois l'équation (2.8) et en utilisant les formules de Ricci on obtient (en utilisant la convention de sommation d'Einstein)

$$(2.12) \quad \begin{aligned} Lw = e^{\frac{\lambda}{2} |\nabla\rho|^2} [L\Delta\rho + 2\lambda F^{ij}(\Delta\rho)_{ij} g^{K\ell} \rho_{kj} \rho_\ell + \Delta\rho[\lambda g^{K\ell} f_{k\ell} \\ + \lambda g^{k\ell} F^{ij} R_{kij}^m \rho_m \rho_\ell + \lambda F^{ij} g^{k\ell} \rho_{ki} \rho_{\ell j} + \lambda^2 F^{ij} g^{k\ell} g^{pq} \rho_{ki} \rho_\ell \rho_{pj} \rho_q]] \end{aligned}$$

avec

$$(2.13) \quad L\Delta\rho = \Delta f - g^{k\ell} F^{ijpq} \rho_{ijk} \rho_{pq\ell} - g^{k\ell} \psi_{k\ell}$$

où les $\psi_{k\ell}$ sont des restes.

Dans ce qui précède on a enlevé l'indice ε gardant en mémoire que toutes les estimations doivent être indépendantes de ε . On notera donc $0(1)$ une quantité bornée indépendamment de ε .

On montre facilement en le calculant et en utilisant les estimations C^1 que

$$(2.14) \quad \Delta f = -2KGg^{ij}(\Delta\rho)_i\rho_j - 2KG(\Delta\rho)^2 + 0(1) + 0(1)\Delta\rho$$

Soit p un point où w atteint son maximum sur S^2 . Si avec les notations de (2.6) on a

$$(2.15) \quad K(p)C_0^2 \geq \frac{1}{16}$$

on utilise une estimation "elliptique due à Heinz [He2] qui montre que les dérivées d'ordre deux de X sont uniformément bornées au voisinage de p et donc que $\sup_{S^2} w$ est uniformément borné ce qui donne une borne uniforme sur S^2 de $\Delta\rho$. On peut donc supposer que

$$(2.16) \quad K(p)C_0^2 < \frac{1}{16}.$$

On utilise un système de coordonnées normales centrées en p . On a donc

$$(2.17) \quad g_{ij}(p) = \delta_{ij}, \quad G(p) = 1, \quad \Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

Ensuite comme l'équation (2.8) est invariante par rotation on peut supposer que

$$(2.18) \quad \rho_{12}(p) = 0$$

ce qui entraîne que

$$(2.19) \quad F^{12} = 0 \quad \text{au point } p.$$

D'autre part puisqu'en p w est maximum on a en p :

$$(2.20) \quad (\Delta\rho)_i = -\lambda\rho_i\rho_{ii}\Delta\rho, \quad i = 1, 2.$$

Il est alors facile de voir que le second terme du membre de droite de (2.13) peut s'écrire

$$(2.21) \quad -g^{k\ell} F^{ijpq} \rho_{ijk} \rho_{pq\ell} = 2 \sum_{K=1}^2 (\rho_{12k}^2 - \rho_{11k}\rho_{22k})$$

et par conséquent

$$(2.22) \quad e^{-\frac{1}{2}\lambda|\nabla\rho|^2}Lw = 2 \sum_{k=1}^2 (\rho_{12k}^2 - \rho_{11k}\rho_{22k}) - 2Kg^{ii}(\Delta\rho)_i\rho_i \\ - 2K(\Delta\rho)^2 - g^{kk} \psi_{kk} + 2\lambda F^{ii}(\Delta\rho)_i\rho_{ii}\rho_i + \lambda g^{ii}f_i\rho_i \Delta\rho + \lambda F^{ii}\rho_{ii}^2 \Delta\rho \\ + \lambda^2 F^{ii}\rho_{ii}^2 \rho_i^2 \Delta\rho + 0(1) + 0(1)\Delta\rho .$$

On montre que

$$(2.23) \quad \begin{cases} 4) = 2K(\Delta\rho)^2 + 0(1) + 0(1)\Delta\rho \\ 2) + 6) = 0(1)\lambda\Delta\rho \\ 5) + 8) \geq -\lambda^2(1+f)|\nabla\rho|^2(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda^2\Delta\rho \\ 7) = \lambda(1+f)(\Delta\rho)^2 + \lambda 0(1)\Delta\rho \end{cases}$$

Il ne reste que le terme 1). On observe que si en p on a

$$(2.24) \quad \Delta\rho + 2 \leq \max(1, \sqrt{8f})$$

on a terminé car le membre de droite est uniformément borné. On peut donc supposer qu'en p on a :

$$(2.25) \quad \Delta\rho + 2 \geq \max(1, \sqrt{8f})$$

ceci entraîne

$$(2.28) \quad (\rho_{11} - \rho_{22})^2 = (\Delta\rho)^2 - 4\rho_{11}\rho_{22} = (\Delta\rho + 2)^2 - 4f \geq \frac{1}{2}(\Delta\rho + 2)^2 \geq \frac{1}{2}$$

On dérive l'équation (2.8) par rapport à ∇_k ce qui donne en p ,

$$(2.29) \quad \begin{cases} F^{11}\rho_{11k} + F^{22}\rho_{22k} = f_k \\ \rho_{11k} + \rho_{22k} = (\Delta\rho)_k \end{cases}$$

d'où l'on tire

$$(2.30) \quad \begin{cases} \rho_{11k} = \frac{f_k - F^{22}(\Delta\rho)_k}{\rho_{22} - \rho_{11}} \\ \rho_{22k} = \frac{f_k - F^{11}(\Delta\rho)_k}{\rho_{11} - \rho_{22}} \end{cases}$$

Ces formules permettent alors de traiter le terme 1) et de montrer :

$$(2.31) \quad 1) \geq -8\lambda K|\nabla\rho|^2(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda\Delta\rho + 0(1)\lambda$$

Utilisant (2.22), (2.23) et (2.31) on obtient

$$(2.32) \quad \exp(\dots)Lw \geq \lambda(\Delta\rho)^2[(1 - \lambda|\nabla\rho|^2)(1 + f) - 8K|\nabla\rho|^2] + 0(1)\lambda\Delta\rho$$

Comme $|\nabla\rho|^2 \leq -2\rho = \|X\|^2 \leq C_0^2$ il résulte des choix faits en (2.10) et (2.16) que

$$(2.34) \quad \exp(\dots)Lw \geq \frac{1}{4}\lambda(\Delta\rho)^2 + 0(1)\lambda\Delta\rho$$

Mais L étant elliptique, au point p où w est maximum, on a $Lw \leq 0$ ce qui termine la preuve de l'uniforme majoration de $\Delta\rho_\varepsilon$ sur S^2 . Il est facile d'en déduire la majoration des dérivées secondes de X_ε . En effet on sait que

$$\Delta\rho_\varepsilon + 2 = 2H_\varepsilon \sqrt{-2\rho_\varepsilon - |\nabla\rho_\varepsilon|^2} \geq 2H_\varepsilon r_0$$

ce qui donne une borne uniforme de la courbure moyenne. D'autre part

$$\langle \Delta X_\varepsilon, \Delta X_\varepsilon \rangle = 4H_\varepsilon^2$$

d'où $\|\Delta X_\varepsilon\|_{\mathbf{R}^3} \leq M_0$. On en déduit facilement une borne uniforme de la norme C^2 de X_ε . CQFD.

La régularité d'ordre supérieure de X_ε vient du fait que grâce à (2.8) l'équation est elliptique en dehors de $K^{-1}(0)$.

Références :

- [A] A.D. Alexandroff : *Intrinsic geometry of convex surfaces*, OGIZ Moscow, 1948.
- [CY] S.S. Cheng, S.T. Yau : *On the regularity of the n -dimensional Minkowski problem*, Comm. Pure Appl. Math. 29 (1976), 495-516.
- [GL] P. Guan, Y.Y. Li : *On Weyl problem with non negative Gauss curvature*. (preprint).
- [GW] R.E. Greene, H. Wu : *C^∞ convex functions and manifolds of positive curvature*, Acta Math. 137 (1976), 209-245.
- [He1] E. Heinz : *Neue a-priori-Abschätzungen...*, Math. Zeitsch. 74 (1960), 129-157.
- [He2] E. Heinz : *On Weyl's embedding problem*, J. Math. Mech., 11 (1962), 421-454.
- [Ho] J. Hong : *Dirichlet problems for general Monge-Ampère equations*, Math. Zeitsch. 209 (1992), 289-308.
- [I] J. Iaiia : *Isometric embeddings of surfaces with non negative curvature in \mathbf{R}^3* , Duke Math. Journ. 67 (2), (1992), 423-459.

- [N] L. Nirenberg : *The Weyl and Minkowski problems in differential geometry in the large*, Comm. Pure Appl. Math. 6 (1953), 337-394.
- [P] A.V. Pogorelov : *Extrinsic geometry of convex surfaces*, Transl. Math. Monogr., Vol 35, Providence, RI : Am. Math. Soc. 1973.
- [S] R. Sacksteder : *The rigidity of hypersurfaces*, J. Math. Mech. 11 (1962), 929-939.
- [Sa] Sabitov : *Regularity of convex surfaces with a metric that is regular in Hölder classes*. Sib. Mat. J., 17 (1977), 681-687.
- [W] H. Weyl : *Über die Bestimmung einer geschlossen convex...*, Vierteljahrsschrift Naturforsch. Gesell, (Zürich), 61 (1916), 40-72.

C. Zuily
Université Paris XI
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 Orsay Cedex