C. Bolley
B. Helffer

Sur les asymptotiques des champs critiques pour l'équation de Ginzburg-Landau

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n^o 4, p. 1-20
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A4_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SUR LES ASYMPTOTIQUES DES CHAMPS CRITIQUES POUR L'EQUATION DE GINZBURG-LANDAU

C. BOLLEY et B. HELFFER

Exposé n° IV

23 Novembre1993

SUR LES ASYMPTOTIQUES DES CHAMPS CRITIQUES POUR L'ÉQUATION DE GINZBURG-LANDAU

Catherine Bolley
Ecole Centrale de Nantes
1, rue de la Noé
F44072 Nantes Cédex 03
et
Bernard Helffer
DMI-Ecole Normale Supérieure
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cédex
(exposé oral fait par B.Helffer)

Résumé. *On se propose dans cet exposé de décrire certains résultats obtenus en collaboration [8], [9] sur le champ de retard à la condensation et le champ de surchauffe. En particulier on se concentrera sur les propriétés asymptotiques du champ de surchauffe dans la limite κ faible. Après analyse de différents travaux de physiciens et présentation des calculs numériques réalisés nous présenterons les premiers résultats rigoureux mathématiquement dans cette direction. D'autres résultats présentés ici seront détaillés dans différents articles en préparation [10] [11].*

1 Introduction

On considère un film supraconducteur V d'épaisseur $\tilde{d}$ (i.e $V =]-\tilde{d}/2, \tilde{d}/2[\times\Omega)$ où Ω est un ouvert (au départ borné) de $\mathbb{R}^2$ soumis à un champ magnétique extérieur constant $\vec{H}_e$. La théorie de Ginzburg-Landau se propose de donner une description des changements de phase dans ces matériaux et introduit pour cela une fonctionnelle ΔG définie pour $(\Psi, \vec{A}) \in H^1(V) \times H^1(V; I\!R^3)$ par:

$$\begin{aligned}\Delta G(\Psi, \vec{A}) &= \mathrm{Vol}V^{-1} \textstyle\int_V [\alpha|\Psi(x)|^2 + \beta|\Psi(x)|^4] \\ &\quad +\mathrm{Vol}V^{-1} \textstyle\int_V \left[(1/\tilde{\kappa}^2)|(-i\nabla - \vec{A})\Psi|^2 + |\vec{H}(x) - \vec{H}_e|^2\right] dx \,.\end{aligned} \tag{1.1}$$

α et β sont des constantes dépendant en particulier de la température. Le cas qui nous intéressera correspond à $\beta > 0$ et $\alpha < 0$. La fonction Ψ est une fonction d'onde complexe dont le carré du module représente une densité de présence et $\vec{A}$ est un potentiel magnétique. Cette fonctionnelle est clairement invariante par changement de Jauge et normalisée de telle sorte qu'elle s'annule pour les solutions dites normales $\Psi, \vec{A}$ correspondant par définition à:

$$\Psi = 0, \vec{\mathrm{rot}}(A) = \vec{H}_e \,.$$

On considère ici le cas où $\vec{H}_e$ est parallèle à la surface du film. Le problème ici est de déterminer si les solutions réalisant des minimas globaux ou locaux de la fonctionnelle sont réalisés par des états normaux ou bien par des états dits supraconducteurs c'est à dire des couples $\Psi, \vec{A}$ avec $\Psi \not\equiv 0$. Pour déterminer ces minimas locaux ou globaux (appelés aussi solutions stables ou métastables), on modélise le problème du film V en supposant Ω très grand et par des Ansatz heuristiques les physiciens réduisent le problème (mais ceci correspond à l'hypothèse que les minima de la fonctionnelle sont réalisés par des couples invariants et élimine d'entrée de jeu la recherche de tourbillons) à l'étude d'un problème à une dimension en introduisant la fonctionnelle suivante définie par:

$$\epsilon_d(f, A; h) = \int_{-d/2}^{d/2} \left[\frac{1}{2}(f^2 - 1)^2 - \frac{1}{2} + \kappa^{-2} f'^2 + f^2 A^2 + (A' - h)^2\right] dx \,, \tag{1.2}$$

pour $(f, A) \in \mathcal{H} = H^1(] - d/2, d/2[; I\!R)^2$.

Cette réduction fait intervenir un changement d'échelle, un changement de fonctions d'onde et une renormalisation multiplicative de la fonctionnelle et est bien sûr reliée à la recherche de fonctions $(x, y, z) \to \Psi(x, y, z)$ définies sur $] - d/2, d/2[\times I\!R^2$ de la forme $\exp(ik_2.y).\exp(ik_3.z)f(x)$ avec f réel et à des $\vec{A}$ de la forme: $\vec{A} = (0, A(x), 0)$ qui donnent $\vec{\mathrm{rot}} A = (0, 0, H(x))$. On observe que notre problème n'est pas modifié en prenant $k_3 = 0$ et le paramètre k_2 est absorbé dans $A(x)$. On observe que cette réduction n'est pas anodine et qu'elle conduit à éliminer des phénomènes de tourbillon qui ne sont peut-être pas à exclure (cf par exemple [1] [2] ou [3] pour l'étude de phénomènes de ce type). Notre fonctionnelle dépend finalement de trois paramètres d, h, κ. d est proportionnel à l'épaisseur du film, h is proportionnel à l'intensité du champ extérieur $\vec{H}_e$ (mais dépend aussi de l'inverse de l'écart de la température T avec la température critique T^c, ce qui expliquera certains noms comme surchauffe ou retard à la condensation) et κ est une caractéristique du milieu qui joue un rôle important dans de nombreux problèmes de supraconductivité. En particulier $\kappa = 1/\sqrt{2}$ est une valeur critique qui classifie en général les supraconducteurs en deux catégories: Type I et type II. Les paires (f, A) caractérisant les différents états du materiau supraconducteur sont maintenant les minima locaux ou globaux de la fonctionnelle ϵ_d. En particulier ce sont des solutions des équations de Ginzburg-Landau sur un intervalle borné $]-d/2,\ d/2[$:

$$- \kappa^{-2} f'' + [-1 + f^2 + A^2]\, f = 0 \quad \text{dans }]-d/2,\ d/2[\tag{1.3}$$

$$- A'' + f^2 A = 0 \quad \text{in }]-d/2,\ d/2[\tag{1.4}$$

où nous recherchons des couples f et A dans $H^2(]-d/2,\ d/2[)$ satisfaisant les conditions aux limites suivantes :

$$f'(\pm d/2) = 0; \quad \text{et} \quad A'(\pm d/2) = h > 0 \quad . \tag{1.5}$$

On remarque alors que les paires $(f, A) = (0, h(x+e))$ avec $e \in I\!R$ sont des solutions que nous appellerons les **solutions normales**.
Comme ci-dessus les **solutions supraconductrices** seront des solutions correspondant à $f \not\equiv 0$.
Nous sommes maintenant en mesure de définir différents champs critiques dont nous esquisserons l'étude dans cet exposé. La première question naturelle est de savoir si les solutions normales $(0, h(x+e))$ sont des minima globaux (resp.locaux) de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. On observe que si $(0, h_0(x+e_0))$ est un minimum global (resp. local) de cette fonctionnelle alors c'est encore le cas pour $h \geq h_0$. Ceci conduit à l'introduction de

deux champs critiques **le champ de retard à la condensation** (resp. **le champ thermodynamique critique**). Plus précisément, pour tout $d > 0$, on peut définir $\mathcal{H}^{sc}(d, \kappa)$ comme le sous-ensemble des $h \in I\!R^+$ tels que toute solution normale ($e \in I\!R$) est un minimum local. On montre que c'est un intervalle et on pose la:

Définition 1.1 *:*
On appelle champ de retard à la condensation et on note $h^{sc}(d, \kappa)$ la borne inférieure de $\mathcal{H}^{sc}(d, \kappa)$ de sorte que:

$$\mathcal{H}^{sc}(d, \kappa) = (h^{sc}(d, \kappa), +\infty\ [.$$

Le comportement asymptotique du champ de retard à la condensation quand d tend vers 0 ou l'infini a été réalisé dans [5] [6] [7] et [8] justifiant rigoureusement les résultats annoncés entre les années 50 et les années 70 par les physiciens [19] [18] [17] et [22]. Les techniques mises en jeu sont ici la théorie des perturbations, des théorèmes de bifurcation (cf [21]) et de la théorie spectrale fine pour des équations différentielles où l'analyse semi-classique fait parfois son apparition. On donne aussi des résultats sur le comportement à d fixé mais lorsque κ tend vers 0 nous reviendrons sur ce point dans la section 3. De manière analogue, on introduit la définition suivante.

Définition 1.2 *:*
On appelle champ thermodynamique critique $h^{ct}(d, \kappa)$ la borne inférieure de l' intervalle $\mathcal{H}^{ct}(d, \kappa)$ défini comme le sous-ensemble des $h \in I\!R^+$ tels que toute solution normale est un minimum global.

L'étude de ces deux champs critiques a été menée dans [8] et [9] et nous ne reviendrons pas trop sur ces questions dans cet exposé. On s'intéresse maintenant à un troisième champ critique $h^{sh}(d, \kappa)$ appelé **champ de surchauffe**. On se demande pour quelle valeur maximale du champ extérieur d'intensité h on peut trouver des solutions supraconductrices réalisant des minimas locaux pour la fonctionnelle. Ce problème est plus délicat dans la mesure où ces solutions ne sont pas explicitement connues. Il n'est plus clair que cette valeur maximale existe. On ne sait pas si c'est un intervalle de la forme $]-\infty, h^{sh}(d, \kappa))$. Bien entendu, on s'intéresse surtout à l'étude de ce qui se passe dans la région $h \geq h^{ct}(d, \kappa)]$.
Lorsque $h = 0$, on a des solutions supraconductrices évidentes correspondant

à $(f = \pm 1, A = 0)$ et ceci donne immédiatement l'information suivante sur le champ thermodynamique critique:

$$h^{ct}(d,\kappa) \geq 1/\sqrt{2} \tag{1.6}$$

En cherchant plus généralement le minimum de la fonctionnelle sur des solutions de la forme $(f = \text{const}, A)$ on donne dans [9] la condition :

$$h^{ct}(d,\kappa) \geq \sqrt{12}/d \tag{1.7}$$

qui nous semble être une amélioration d'un résultat de [25].
L'objet principal de cet exposé est de présenter l'ensemble des résultats rigoureux connus concernant le champ de surchauffe lorsque κ tend vers 0.
Deux situations vont être décrites.
La première est bien comprise et consiste à regarder à d fixé la limite quand κ tend vers 0. Les résultats, dont l'aspect formel remonte à Ginzburg-Landau [19] et [18], seront présentés dans la section 3.
La deuxième situation est de considérer un modèle adapté à la situation $\kappa \to 0$ mais avec κd grand. Dans ce cas le modèle qui s'impose est le modèle renormalisé suivant. On renormalise d'abord notre fonctionnelle précédente sur $[-d/2, d/2]$ en ajoutant le terme $-(h^2 - 1/2)d$. On observe alors que:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_d(f,A;h) - (h^2-1/2)d \\ &= \int_{-d/2}^{d/2} \left[\tfrac{1}{2}(f^2-1)^2 + \kappa^{-2}f'^2 + f^2A^2 + A'^2 - 2hA'\right] dx \ , \end{aligned} \tag{1.8}$$

Pour cerner les questions (mais il faudrait mener le cas plus général) on se limite à la recherche des solutions où f est paire et A est impair. On considère donc la fonctionnelle ci-dessus sur $[0, d/2]$:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_d(f,A;h) - (h^2-1/2)d \\ &= \int_{0}^{d/2} \left[\tfrac{1}{2}(f^2-1)^2 + \kappa^{-2}f'^2 + f^2A^2 + A'^2 - 2hA'\right] dx \\ &= \int_{0}^{d/2} \left[\tfrac{1}{2}(f^2-1)^2 + \kappa^{-2}f'^2 + f^2A^2 + A'^2\right] dx + 2hA(d/2) \ . \end{aligned} \tag{1.9}$$

puis on échange 0 et $d/2$ et on regarde enfin la fonctionnelle obtenue cette fois-ci en faisant tendre d vers l'infini. Le problème est alors d'étudier les minima locaux ou globaux de:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_\infty(f,A;h) \\ &= \int_{0}^{+\infty} \left[\tfrac{1}{2}(f^2-1)^2 + \kappa^{-2}f'^2 + f^2A^2 + A'^2\right] dx + 2hA(0) \ , \end{aligned} \tag{1.10}$$

On remarque que si $h > 1/\sqrt{2}$, l'énergie (pour ϵ_d) des solutions normales tend vers $-\infty$, lorque d tend vers $+\infty$. L'espace sur lequel est défini la fonctionnelle est maintenant celui des couples de fonctions (f, A) telles que $(1-f) \in H^1(I\!R^+), A \in H^1(I\!R)$. On a privilégié des solutions positives puisqu'on impose $f \to 1$ lorsque $x \to \infty$ et on a aussi éliminé les solutions normales. L'équation de Ginzburg-Landau correspondante est alors:

$$- \kappa^{-2} f'' - f + f^3 + A^2 f = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\tag{1.11}$$

$$- A'' + f^2 A = 0 \quad \text{sur }]0, +\infty[\tag{1.12}$$

$$f'(0) = 0 \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} f(x) = 1, \tag{1.13}$$

$$A'(0) = h \quad ; \quad \lim_{x \to +\infty} A(x) = 0, \tag{1.14}$$

avec $A \in H^2(]0, +\infty[)$, $(1-f) \in H^2(]0, +\infty[)$.
Bien sûr, les conditions à l'infini sont la conséquence de notre choix des espaces de Sobolev et sont juste écrites par commodité.
Le plan de cet exposé est le suivant.
Dans la section 2, on énoncera des propriétés des solutions des équations de Ginzburg-Landau. Dans la section 3, on traitera assez complètement le cas de l'intervalle borné dans la limite κ faible. La section 4 sera consacrée à la présentation de la littérature physique et une discussion heuristique "rigoureuse" des différents moyens d'arriver à une formule pour le comportement asymptotique du champ de surchauffe. En particulier nous présenterons les résultats numériques récents obtenus dans [11]. Enfin à la section 5, quelques résultats mathématiquement rigoureux sont présentés.

2 Quelques propriétés des équations de Ginzburg-Landau

On notera en abrégé $(GL)_d$ le système introduit en (1.3)-(1.5) et par $(GL)_\infty$ le système introduit en (1.11)-(1.14) . Voici les propriétés principales des solutions de ces deux systèmes.

Proposition 2.1 :
Soit (f, A) une solution de $(GL)_d$; alors on a :
(a)
$$|f(x)| \leq 1 \ , \ \forall x \in [-d/2, d/2] \tag{2.1}$$
(b) Si $f \not\equiv 0$, la fonction A admet un unique zéro dans $]-d/2, d/2[$ et est strictement croissante sur l'intervalle. De plus on a l'inégalité:
$$0 \leq A'(x) \leq h \ , \ \forall x \in [-d/2, d/2] \tag{2.2}$$

(c) Si f est paire, positive et non identiquement nulle, alors elle est décroissante sur $[0, d/2]$.

Les démonstrations sont simples et basées sur le principe du maximum en alternant entre les deux équations différentielles de $(GL)_d$. On trouvera ces démonstrations dans nos travaux [9] ou [10]. (a) est très classique. Les résultats (b) et (c) sont aussi démontrés dans l'article de Wang et Yang [24] sous l'hypothèse additionnelle que le couple (f, A) est un minimum global de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau. Nous donnons à titre d'exemple l'argument donnant (c) qui simplifie considérablement celui donné par [24]. On restreint le système à $[0, d/2]$ en observant qu'on a $f'(0) = 0$ et $A(0) = 0$. Si $g = f'$, considérons les points où g est maximum. Si ce maximum est 0, on a fini.
Supposons donc que ce maximum est strictement positif.
Observant que $g(0) = g(d/2) = 0$, on en déduit qu'il existe $0 < x_0 < d/2$ tel que
$$g(x_0) = \inf_{x \in [0, +d/2[} g(x) \ > 0 \ .$$
En ce point nous avons:
$$g'(x_0) = 0 \ ; \ f(x_0) > 0 \ . \tag{2.3}$$
On a utilisé ici qu'une solution positive f non identiquement nulle de la première équation de $(GL)_d$ est strictement positive. Utilisant l'équation de Ginzburg-Landau pour f, nous obtenons aussi:
$$-1 + f(x_0)^2 + A(x_0)^2 = 0. \tag{2.4}$$

On considère maintenant l'équation satisfaite par g en dérivant la première équation de $(GL)_d$:

$$-\kappa^{-2}g" + (3f^2 - 1 + A^2)g = -AA'f \ .$$

Au point x_0, on a, compte-tenu des deux premiers points de la proposition,

$$g"(x_0) \leq 0 \ ; \ -A(x_0)A'(x_0)f(x_0) \leq 0 \ ; \ g(x_0) > 0$$

et

$$(3f^2 - 1 + A^2)(x_0) = 2f(x_0)^2 > 0 \ .$$

Ceci est absurde et le lemme est démontré. Dans le cas du domaine semi-infini, on obtient de même la:

Proposition 2.2 *:*
Soit (f, A) une solution de $(GL)_\infty$; alors on a :
(a)

$$|f(x)| \leq 1 \ , \ \forall x \in [0, = \infty[\tag{2.5}$$

(b) La fonction A est strictement croissante sur l'intervalle. De plus, on a l'inégalité:

$$0 \leq A'(x) \leq h \ , \tag{2.6}$$

(c) Si f est positive, alors f est strictement croissante sur $[0, +\infty]$.
(d) Si $f \geq \rho > 0$, alors on a les contrôles suivants de A:

$$h \exp -x \leq -A(x) \leq \rho^{-1} h \exp -\rho x \ , \tag{2.7}$$

et de A':

$$h \exp -x \leq A'(x) \leq h\rho^{-1} \exp -\rho x \ . \tag{2.8}$$

(e) Si $f > 0$ et $h < 1/\sqrt{2}$ alors:

$$f(x) \geq \sqrt{1 - 2h^2} \ . \tag{2.9}$$

Les techniques de démonstration sont voisines de la proposition précédente. On utilise aussi le fait que le système GL est associé naturellement à un hamiltonien. On en déduit une loi de conservation de l'énergie parfois utile :

$$\kappa^{-2} f'(x)^2 + A'(x)^2 = f(x)^2 A(x)^2 + \frac{1}{2}(1 - f(x)^2)^2 \ . \tag{2.10}$$

Comme exemple d'information tirée immédiatement d'une telle identité, on remarque que si $h = 0$, alors $f = 1$, $A = 0$ est l'unique solution de $(GL)_\infty$.

3 Le cas d'un intervalle borné dans la limite κ faible

Considérons donc l'étude du champ de surchauffe dans le cas d'un intervalle borné. On va adapter ici les arguments donné dans [9] et indiquer comment on peut se ramener à l'étude d'un modèle simplifié pouvant être calculé pour l'essentiel explicitement. Le passage à κ faible se fera en utilisant la théorie des bifurcations et la méthode de Liapounov-Schmidt que dans d'autres contextes nous appellerions "introduction d'un problème de Grushin".

Le modèle limite f constant

Ce modèle remonte au moins à Ginzburg-Landau [19]. Il est obtenu par restriction de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau à des couples (f, A) dans $H^1 \times H^1$ avec f constant et a comme ambition de décrire correctement les situations où κ est petit à d fixé ou bien d est petit à κ fixé.

$$\begin{aligned} &I\!\!R \times H^1(]-d/2,+d/2[) \ni (f, A) \to \\ &\quad \to \mathcal{E}_0(f, A) = (f^4/2) - f^2 + (1/d) \textstyle\int_{-d/2}^{+d/2} (A^2 f^2 + (A' - h)^2) dx \end{aligned} \tag{3.1}$$

Les équations d'Euler correspondantes sont:

$$\begin{array}{ll} (a) & f^3 - f + \frac{f}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} A^2 dx = 0 \\ (b) & -A" + Af^2 = 0; \\ (c) & A'(\pm d/2) = h \end{array} \tag{3.2}$$

et, divisant par f (ce qui élimine la solution triviale $f = 0$), on obtient:

$$f^2 - 1 + \frac{1}{d} \int_{-d/2}^{+d/2} A^2 dx = 0 \tag{3.3}$$

Bien entendu, on peut résoudre explicitement par:

$$A(x) = \frac{h}{f} \frac{\sinh(fx)}{\cosh(fd/2)} \tag{3.4}$$

et

$$s(f, h; d) = f^2 - 1 + [(h^2/(f^2 d. \cosh(fd/2)^2))[\sinh(fd)/2f - (d/2)]] = 0. \tag{3.5}$$

Cette dernière équation détermine une courbe dans $I\!R^2_{f,h}$ notée $\mathcal{S}_d$ et qu'on peut paramétrer, en exprimant h comme fonction de f, par $f \to h_0(f,d)$ avec:

$$h_0(f,d) = f\sqrt{2}(\cosh(fd/2))(1-f^2)^{1/2}(\frac{\sinh(fd)}{fd} - 1)^{-1/2}\,. \tag{3.6}$$

Le développement de Taylor en $f = 0$ se calcule immédiatement:

$$h_0(f,d) == (\sqrt{12}/d)(1 + (f^2/10)(d^2-5)) + \mathcal{O}(f^4)). \tag{3.7}$$

On montre alors que pour d assez grand la fonction $h_0(f,d)$ a un maximum $h_0^{sh}(d)$ obtenu pour un unique $f_0^{sh}(d)$:

$$h_0^{sh}(d) = \sup_{0<f<1} h_0(f,d) = h_0(f_0^{sh}(d),d). \tag{3.8}$$

On peut aussi analyser son comportement quand d tend vers l'infini:

$$\lim_{d\to+\infty} f_0^{sh}(d) = \sqrt{3/5} \tag{3.9}$$

et

$$\lim_{d\to+\infty} d^{-1/2}h_0^{sh}(d) = (2/5)^{1/2}(3/5)^{3/4}. \tag{3.10}$$

Utilisant la théorie des bifurcations on obtient alors le

Théorème 3.1 :
Pour $d > d_0$ (avec d_0 assez grand) et (f_0, h_0) dans un voisinage assez petit de $(f_0^{sh}(d), h_0^{sh}(d))$ dans $\mathcal{S}_d$, alors, avec A_0 défini par

$$A_0(x) = (h_0/f_0)\sinh(f_0x)/\cosh(f_0d/2), \tag{3.11}$$

il existe κ_0 t.q, pour tout $0 < \kappa \le \kappa_0$,il existe un triplet $(f(\kappa), A(\kappa), h(\kappa))$ tel que $(f(\kappa), A(\kappa))$ soit une solution de $(GL)_d$ correspondant à $h = h(\kappa)$ t.q :

$$\begin{array}{lll} (a) & h(\kappa) & = h_0 + \kappa^2\hat{h}^1(\kappa) \\ (b) & f(\kappa) & = f_0 + \kappa^2\hat{f}_1(\kappa), \quad \int_{-d/2}^{d/2}\hat{f}_1(\kappa)(t)dt = 0 \\ (c) & A(\kappa) & = A_0 + \kappa^2\hat{A}_1(\kappa) \end{array} \tag{3.12}$$

avec $\hat{f}_1(\kappa)$ et $\hat{A}_1(\kappa)$ bornés dans $H^2(]-d/2,d/2[)$. De plus il existe $\tilde{\kappa}_0$ et α_0 telle que cette solution $(f(\kappa),A(\kappa),h(\kappa))$ soit pour $0<\kappa\leq\tilde{\kappa}_0$, l'unique solution (f,A,h) in $H^2(]-d/2,d/2[)\times H^2(]-d/2,d/2[)\times I\!R^+$ de $(GL)_d$:

$$\begin{array}{ll} i) & \|f(\kappa)-f_0\|_{H^2}\leq\alpha_0, \\ ii) & \|A(\kappa)-A_0\|_{H^2}\leq\alpha_0, \\ iii) & |h(\kappa)-h_0|\leq\alpha_0 \\ iv) & \frac{1}{d}\int_{-d/2}^{d/2}f(\kappa)(t)dt=f_0 \\ v) & A'(\kappa)(-d/2)=A'(\kappa)(d/2)=h(\kappa)\ . \end{array} \tag{3.13}$$

Ce théorème admet comme corollaire:

Corollaire 3.2 *:*
Pour tout $d\geq d_0$, il existe $\tilde{\kappa}_0(d)$ et une fonction C^∞ $[0,\tilde{\kappa}_0(d)]\ni\kappa\to h^{sh}(\kappa,d)$ telle que $\sup_{h\in\mathcal{H}}h\geq h^{sh}(\kappa,d)$ où
$\mathcal{H}=\{h\geq0\ ;\ t.q.\ \exists(f,A,h)$ solution de $(GL)_d$ avec $f\not\equiv0\}$

Nous conjecturons qu'on a sans doute l'égalité. A vrai dire, la première question beaucoup plus élémentaire est de savoir si le champ de surchauffe est fini. C'est en effet le cas et nous allons en esquisser la démonstration qui présente des aspects intéressants. Un résultat plus faible de "finitude du champ thermodynamique critique" était établi dans notre article [8] et des résultats plus faibles, mais qui nous ont motivés pour la démonstration générale, ont éte obtenus par Yang [25].

Proposition 3.3 *:*
Pour h assez grand, les seules solutions de $(GL)_d$ sont les solutions normales.

Un lemme important est le suivant:

Lemme 3.4 *:*
$f_h\to0$ uniformément sur $[-d/2,d/2]$ lorsque $h\to+\infty$.

Preuve:
Sinon il existe une suite f_{h_j} et $\epsilon_0>0$ telle que

$$h_j\to+\infty\quad\text{quand}\quad j\to+\infty\qquad\text{et}\quad\|f_{h_j}\|_{C^0([-d/2,d/2])}\geq\epsilon_0\ . \tag{3.14}$$

On remarque maintenant, en multipliant par f_h la première équation de Ginzburg-Landau et en intégrant sur $[-d/2, d/2]$, que

$$\kappa^{-2} \int_{-d/2}^{d/2} (f_h')^2 dx + \int_{-d/2}^{d/2} f_h^2 A_h^2 dx = \int_{-d/2}^{d/2} f_h^2 (1 - f_h^2) dx \leq d \ , \tag{3.15}$$

On en déduit immédiatement que f_{h_j} est borné dans H^1 et après extraction éventuelle d'une sous-suite on peut supposer l'existence de ψ dans H^1 telle que

$$f_{h_j} \text{ converge faiblement vers } \psi \text{ in } H^1 \ , \tag{3.16}$$

et

$$f_{h_j} \text{ converge fortement vers } \psi \text{ in } C^0([-d/2, d/2]) \ . \tag{3.17}$$

De (3.14) et (3.17) on déduit alors que

$$||\psi||_{C^0([-d/2,d/2])} \geq \epsilon_0 \ . \tag{3.18}$$

Posant maintenant $B_h = A_h/h$, on déduit de (3.15) et de l'équation:

$$B'(x) - 1 = \int_{-d/2}^{x} f(t)^2 B(t) dt \tag{3.19}$$

$$|B'_{h_j} - 1| \leq (d/h_j) \ , \tag{3.20}$$

et finalement

$$\lim_{j \to +\infty} \int (x + B_{h_j}(0))^2 f_{h_j}^2 dx = 0. \tag{3.21}$$

On rappelle (point (b) dans la proposition 2.1) l' existence d'un unique a_j dans $[-d/2, d/2]$ tel que $B_{h_j}(a_j) = 0$; on peut alors supposer avec de nouveau extraction d'une sous-suite que a_j converge vers a_∞ dans $[-d/2, d/2]$ et donc

$$B_{h_j}(0) \to -a_\infty \ . \tag{3.22}$$

Si on revient maintenant à (3.21), on a:

$$\int (x - a_\infty)^2 \psi^2 dx = 0 \ , \tag{3.23}$$

qui implique $\psi \equiv 0$ en contradiction avec (3.18). Terminons maintenant l'esquisse de la démonstration de la proposition. On a déjà démontré la convergence uniforme de f_{h_j} et (après extraction d'une sous suite) de B_{h_j}.

On a donc démontré pour l'instant que (après extraction d'une sous-suite) les solutions de $(GL)_d$ tendent lorsque $h \to \infty$ vers les solutions normales. Pour montrer qu'alors elles deviennent nécessairement égales à des solutions normales, on se ramène, comme dans l'étude des bifurcations à partir des solutions normales abordée dans les travaux d'Odeh [21], de C.Bolley [6] [7] ou B.Helffer et C.Bolley [9], à l'étude des valeurs propres d'une famille de problèmes de Neumann pour l'oscillateur harmonique avec contrôle par rapport à des paramètres. De la même manière qu'il était montré que les solutions normales ne pouvaient pas bifurquer vers des solutions supraconductrices pour h grand, on obtient qu'il ne peut pas y avoir de solutions supra tendant vers les normales quand $h \to \infty$.

Remarque 3.5 *:*
Le cas de la demi-droite nous semble ouvert.

4 Promenade dans la littérature physique et présentation de quelques calculs numériques

La situation dans le cas de l'intervalle $[0, +\infty[$ est plus délicate et il est intéressant d'analyser comment l'imagination des physiciens a fonctionné avec succès sur ce problème. Dans l'article initial de Ginzburg-Landau [19], on observe tout d'abord que si $h = 0$, (GL_∞) admet comme solution: $f = 1$, $A = 0$. On essaye donc un développement à partir de cette solution. Plus concrètement, on suppose que $f_0 = 1$. On résout la deuxième équation (avec $f = f_0$) qui nous donne : $A_0 = -h \exp -x$ puis on résout la première équation avec $A = A_0$ qui donne:

$$f_1(x) = 1 + \frac{\kappa h^2}{\sqrt{2}(2 - \kappa^2)} \left[\frac{\kappa}{\sqrt{2}} \exp -2x - \exp -\sqrt{2}\kappa x \right]$$

et on trouve aussi une nouvelle valeur approchée A_1 pour A en utilisant f_1 dans la deuxième équation. Au mieux cette solution n'est raisonnablement approchée que pour $\kappa h^2 = o(1)$ lorsque κ tend vers 0. Elle semble donc inadaptée à la recherche du champ de surchauffe qui concerne les valeurs maximales de h pour lesquelles nous avons des solutions.
Le deuxième résultat annoncé (nous ne pouvons prétendre à exhaustivité)

dans un survey de Ginzburg [18] indique en 1958 que pour des raisons d'homogénéité (qui restent pour nous mystérieuses) le champ de surchauffe doit être asymptotiquement de la forme :

$$h^{sh}(\kappa) \approx C\kappa^{-1/2} \ ,$$

la constante C est alors calculée via un calcul numérique pour une valeur de κ.

Les premiers à proposer une valeur de cette constante semblent être De Gennes et le groupe d'Orsay [17] [22] en 1966 (cf aussi [20]). Ces auteurs proposent $C = 2^{-3/4}$ et cette valeur est basée sur une heuristique difficile à suivre de bout en bout mais dont nous allons présenter une variante largement inspirée de la leur mais peut-être plus accessible à la compréhension de mathématiciens.

On cherche ici un modèle simplifié qui jouera le rôle du modèle constant dans le cas de l'intervalle borné. Pour cela, on restreint la fonctionnelle de Ginzburg-Landau à un sous-espace des (f, A) tels que $(1-f) \in H^1(I\!R^+), A \in H^1(I\!R^+)$ définis par les conditions:

$f = f_0 =$ const sur un intervalle $[0, D]$,

A est solution de $-A" + f_0^2 A = 0$; $A'(0) = h$; $A(D) = 0$ sur $[0, D]$,

$f = \tanh(\frac{\kappa}{\sqrt{2}}x + x_{h,\kappa})$ pour une valeur convenable de $x_{h,\kappa}$ sur $[D, \infty[$,

$A = 0$ sur $[D, \infty[$.

Ceci correspond à l'idée que A décroit très vite et peut être supposé nul pour D assez grand. Notre famille dépend de deux paramètres f_0 et D. On minimise alors la fonctionnelle ϵ_∞ réduite à cet espace et obtenons ainsi que le minimum de la fonctionnelle est réalisé pour des couples f_0, D tels que:

$$h^2 = f_0^2(1 - f_0^2)(\frac{\sqrt{2}}{\kappa} + 2Df_0)/[\tanh(f_0D) - Df_0(1 - \tanh^2(f_0D))] \ , \quad (4.1)$$

et

$$h^2 = \frac{1}{2}(1 - f_0^2)^2 \cosh^2(f_0D) \ . \quad (4.2)$$

L'élimination de D entre ces deux équations donne une courbe dans l'espace des (h, f_0) du même style que dans le cas du modèle constant. En particulier, le champ de surchauffe de ce modèle est obtenu en cherchant $\sup_h$ pour les h tels que (h, f_0) est un point de la courbe. On montre que ce point est pour

κ assez petit unique et correspond à:

$$\begin{aligned}
D \quad &= -\tfrac{1}{\sqrt{2}} \ln \kappa + \mathcal{O}(1) \\
f_0 \quad &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \mathcal{O}(\kappa(-\ln \kappa))\right] \\
\sqrt{\kappa} h \quad &= 2^{-3/4} \left[1 + \mathcal{O}(\kappa(-\ln \kappa))\right] \ .
\end{aligned}$$

C'est bien la formule que De Gennes et le groupe d'Orsay déduisent de l'étude de la courbe approchée :

$$h^2 \approx \frac{\sqrt{2}}{\kappa} f_0^2 (1 - f_0^2) \ , \tag{4.3}$$

qu'on réobtient ici à partir de (4.1) en négligeant $f_0 D$ devant $\sqrt{2}/\kappa$ et en supposant que $\tanh f_0 D \approx 1$. Notons que cette formule n'est pas correcte lorsque $f_0 \to 0$. Depuis, cette formule fait autorité sans avoir été démontrée mathématiquement. Certains physiciens ont ensuite proposée différentes formules à deux (voir trois) termes. Nous retiendrons celle donnée par H.Parr [23] (confer aussi antérieurement Galaiko [16]) qui propose:

$$\begin{aligned}
f_0 \quad &= \tfrac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \tfrac{7\sqrt{2}}{32} \kappa + o(\kappa)\right] \\
\sqrt{\kappa} h \quad &= 2^{-3/4} \left[1 + \tfrac{15\sqrt{2}}{32} \kappa + o(\kappa)\right] \ .
\end{aligned}$$

De nouveau il est difficile de trouver un fil conducteur aux calculs proposés par l'auteur pour arriver à cette formule. Il semble que l'auteur utilise une approximation quadratique de la solution pour x petit mais son prolongement pour les x grands n'est pas explicité. De plus tous les résultats numériques présentés à l'époque ne semblent pas justifier ces formules à deux termes dans la région κ très petit où justement elles devraient devenir plus précises.
On aurait donc pu avoir l'impression qu'il s'agissait d'une formule fantaisiste mais les nouveaux calculs que nous avons menés récemment dans [10] confirment au contraire la validité de cette formule . L'explication des divergences relatives des calculs numériques précédant les nôtres est sans doute le caractère "mal conditionné" du problème. Afin de contrôler les conditions aux limites à l'infini, nous avons utilisé une méthode de tir sur le problème à valeurs initiales associé. La conservation de l'énergie mentionnée en (2.10) nous donne pour les conditions initiales la relation:

$$f(0)^2 A(0)^2 + \frac{1}{2}(1 - f(0)^2)^2 = h^2 \ . \tag{4.4}$$

Les équations traitées sont très sensibles à des perturbations sur les données initiales de sorte que les méthodes de calcul utilisées doivent être adaptées aux problèmes "raides". De plus les tests numériques utilisés doivent permettre de décider avec un maximum de précision si, pour un h donné, il existe ou non une solution à notre problème.

5 Vers la démonstration de la formule de De Gennes:

Contrairement au cas borné la fonctionnelle de Ginzburg-Landau n'est pas semi-bornée au moins dans le cas où $h > 1/\sqrt{2}$. Il semble d'ailleurs raisonnable de conjecturer qu'elle est semibornée lorsque $h < 1/\sqrt{2}$. On peut cependant démontrer par des estimations a priori le contrôle suivant sur les solutions de $(GL)_\infty$.

Proposition 5.1 *:*
Pour tout $\rho > 0$, il existe des constantes C_ρ et κ_0 telle que les h pour lesquels il existe une solution (f_h, A_h) de $(GL)_\infty$ avec $f_h \geq \rho$ satisfont l'inégalité:

$$h^2 \leq C_\rho \kappa^{-1} , \tag{5.1}$$

pour $\kappa \leq \kappa_0$.

De nouveau on constate que les solutions qui pourraient poser problème sont celles telle que (f_h, A_h) tende vers une solution normale mais ces solutions normales n'appartiennent plus à l'espace des solutions. Le théorème que nous avons démontré tout récemment donne juste une minoration du champ de surchauffe.

Théorème 5.2

$$\liminf_{\kappa \to 0} (\kappa^{1/2} h^{sh}(\kappa)) \geq 2^{-3/4} \tag{5.2}$$

A vrai dire, la premier point était de montrer l'existence de $h \geq 1/\sqrt{2}$ tel que le système de Ginzburg-Landau a une solution. On obtient d'abord (par une technique de sous-solution et en observant que $f = 1$ est une sursolution (en un sens défini ci-dessous) que l'ensemble des h pour lesquels il existe une solution (f_h, A_h) de $(GL)_\infty$ avec $f_h \geq 0$ est un intervalle de la forme

$[0, h^{crit})$. On est donc conduit à chercher (au moins pour commencer), plutôt que des solutions approchées, des sous-solutions pour des h les plus grands possible. Un certain nombre de tâtonnements successifs basés sur l'étude des différents calculs approchés rappelés dans la section précédente nous ont finalement conduit à la démonstration du:

Lemme 5.3 *:*
Pour tout $\epsilon > 0$, il existe C_1, κ_0 tels que pour tout $\kappa \leq \kappa_0$ et pour tout h tel que

$$\kappa^{1/2} h \leq 2^{-3/4} - \epsilon \,, \tag{5.3}$$

la fonction

$$f_{h,\kappa}(x) = \kappa^2.h^2.2^{-1/2}(1 + C_1\kappa) \exp -\sqrt{2}x + \tanh\left[\frac{\kappa}{\sqrt{2}}x + x_{h,\kappa}\right] \,, \tag{5.4}$$

où $x_{h,\kappa}$ est déterminé par

$$f'_{h,\kappa}(0) = 0 \,, \tag{5.5}$$

est une sous-solution en ce sens qu'elle vérifie (5.5) et:

$$\begin{aligned} &-(f_{h,\kappa})\text{"} + f_{h,\kappa}(-1 + f_{h,\kappa}^2 + h^2 B_{h,\kappa}^2) \leq 0 \,, \\ &(1 - f_{h,\kappa}) \in H^2(]0, \infty[) \end{aligned} \tag{5.6}$$

avec $B_{h,\kappa}$ solution dans $H^2(]0, \infty[)$ de:

$$\begin{aligned} &-(B_{h,\kappa}^2)\text{"} + f_{h,\kappa}^2 B_{h,\kappa} = 0 \,, \\ &(B_{h,\kappa})'(0) = 1 \,. \end{aligned} \tag{5.7}$$

La preuve de ce lemme est basée sur des estimations fines utilisant des résultats du type de ceux rappelés en Section 2.

Bibliographie

[1] F.Bethuel, H.Brézis, F.Helein: Asymptotics for the minimization of a Ginzburg-Landau functional. Calculus of variations and PDE, I, 123-148 (1993)

[2] F.Bethuel, H.Brézis, F.Helein: Ginzburg-Landau vortices. Preprint (Décembre 1992) et Birkhäuser (1993).

[3] F.Bethuel, T.Rivière: Vortices for a variational problem related to superconductivity, Preprint n^0 9334, ENS Cachan.

[4] C.Bolley: Solutions numériques de problèmes de bifurcation. Rairo Analyse numérique, Vol 14, $n^O 2$, p.127-147, (1980)

[5] C.Bolley: Bifurcation dans les équations de Ginzburg-Landau des matériaux supraconducteurs soumis à un champ magnétique extérieur. Publication de l'ENSM -Nantes, (1988).

[6] C.Bolley: Familles de branches de bifurcations dans les équations de Ginzburg-Landau, M^2AN, Vol. 25, $n^O 3$. p.307-335, (1991).

[7] C.Bolley: Modélisation du champ de retard à la condensation d'un supraconducteur par un problème de bifurcation, M^2AN, Vol.26, $n^o 2$, p.235-287, (1992)

[8] C.Bolley, B.Helffer: An application of semi-classical analysis to the asymptotic study of the supercooling field of a superconducting material Annales de l'institut Henri-Poincaré (Section Physique Théorique), (1993), Vol 58, $n^0 2$, p.189-233.

[9] C.Bolley, B.Helffer: Rigorous results on the Ginzburg-Landau equation Preprint de l'Ecole Centrale de Nantes, (1993).

[10] C.Bolley, B.Helffer: Remarks on the superheating field for the Ginzburg-Landau equation Compte-rendus du colloque de Seattle, Juillet 1993.

[11] C.Bolley, B.Helffer: En préparation (1993).

[12] R.W.Carroll, A.J.Glick: On the Ginzburg-Landau equations Arch. Rational Mech. Anal. 16, p.373 (1964)

[13] S.J.Chapman: Nucleation of superconductivity in decreasing fields. Preprint (1993).

[14] S.J.Chapman, S.D.Howison, J.B.McLeod and J.R.Ockendon: Normal-superconducting transitions in Ginzburg-Landau theory. Proc. Roy. Soc. Edin. 119A, p.117-124 (1991).

[15] B.Dugnoille: Etude théorique et expérimentale des propriétés magnétiques des couches minces supraconductrices de type 1 et de κ faible, Thèse, Mons (1978)

[16] V.P.Galaiko: Superheating critical field for superconductors of the first kind, Soviet Physics JETP, Vol. 27, n^O1, July 1968.

[17] P.G. de Gennes: Superconductivity: selected topics in solid state physics and theoretical Physics, Proc. of 8th Latin american school of physics, Caracas (1966).

[18] V.L.Ginzburg: On the destruction and the onset of superconductivity in a magnetic field, Soviet Physics JETP 7, 78 (1958).

[19] V.L.Ginzburg, L.D. Landau: On the theory of superconductivity Zh. Eksperim. i teor. Fiz. 20 1950, pp.1064-1082
English translation Men of Physics: L.D.Landau, I, Ed. by D.Ter Haar, Pergamon oxford, 1965, 138-167.

[20] J.Matricon, D.Saint James: Superheating fields in superconductors, Physics Letters, Vol. 24A, n^O5, Fév 1967, p.241-242.

[21] F.Odeh: Existence and bifurcation theorems for the Ginzburg-Landau equations, Journal of mathematical physics, Volume 8, n^O12, December 1967.

[22] The Orsay group: in Quantum fluids (ed. D.F. Brewer), p.26, Amsterdam, North Holland (1966).

[23] H.Parr: Superconductive superheating field for finite κ, Z.Physik B25, p.359-361 (1976).

[24] S.Wang, Y.Yang: Symmetric states in films, SIAM J. Appl. Math. vol.52 (1992), p 614.

[25] Y.Yang: Ginzburg-Landau eq. for films and the Meissner effect, J. Math. Phys. vol.31 (1990), p.1284.

Catherine BOLLEY
Ecole Centrale de Nantes
1, rue de la Noé
F 44072 Nantes cédex 03

et

Bernard HELFFER
DMI - Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
F 75230 Paris cédex