G. D. Raikov

Asymptotiques spectrales pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 19, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ASYMPTOTIQUES SPECTRALES POUR L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER AVEC UN POTENTIEL ELECTROMAGNETIQUE

G. D. RAIKOV

Exposé n° XIX

26 Avril 1994

Asymptotiques spectrales pour l'opérateur de Schrödinger avec un potentiel électromagnétique

GEORGE D. RAIKOV
Institut de Mathématiques, Académie Bulgare des Sciences,
B.P. 373
1090 Sofia, Bulgarie

1 Introduction

Dans cet exposé on va étudier le comportement asymptotique du spectre discret de l'opérateur de Schrödinger perturbé lorsque la constante du couplage de la perturbation tend vers l'infini.

D'abord on introduit l'opérateur non perturbé H_0 agissant dans $L^2(\mathbf{R}^m)$, $m \geq 2$. Cet opérateur s'écrit formellement sous la forme

$$H_0 := -\Delta_A + F, -\Delta_A := (i\nabla + A)^2,$$

où $A : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}^m$ est le potentiel magnétique, et $F : \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$ est le potentiel électrique. A l'égard du potentiel A on suppose $A \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^m))^m$, tandis que par rapport au potentiel F on suppose que pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque $u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m)$ on a

$$\int |F|\,|u|^2\,dX \leq \varepsilon \int |\nabla u|^2\,dX + c(\varepsilon) \int |u|^2\,dX$$

(les intégrales sans indication du domaine d'intégration doivent être comprises comme étendues à $\mathbf{R}^m$). Autrement dit, la multiplication par F est relativement bornée au sens des formes quadratiques par rapport à l'opérateur $-\Delta$ avec une borne relative nulle. D'après [Re.Sim 1] cette propriété s'écrit en bref $F << -\Delta$. En vertu de l'inégalité de Kato–Simon, $F << -\Delta$ entraîne $F << -\Delta_A$ pour tout $A \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^m))^m$ (cf. [Av.Her.Sim]).

On considère la forme quadratique

$$\chi[u] := \int \left\{ |i\nabla u + Au|^2 + F|u|^2 \right\}\,dX,\ u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^m),$$

qui est bornée inférieurement et qui admet une fermeture dans $L^2(\mathbf{R}^m)$. On définit l'opérateur non perturbé H_0 comme l'opérateur auto-adjoint engendré par la fermeture de la forme χ dans $L^2(\mathbf{R}^m)$.

Ensuite, on introduit la perturbation V, c'est-à-dire la multiplication par une fonction non négative V telle que l'opérateur $(-\Delta+1)^{-1/2}W$ avec $W := V^{1/2}$ soit compact. Alors, l'inégalité de Kato–Simon implique que l'opérateur $(H_0+E)^{-1/2}W$ avec E assez grand est compact (cf. [Av.Her.Sim]). On introduit deux opérateurs perturbés

$$H_g^{\pm} := H_0 \mp gV$$

où $g \geq 0$ est la constante du couplage de la perturbation V, et la somme doit être comprise au sens des formes quadratiques. Puisque l'opérateur $(H_0+E)^{-1/2}W$ est compact, le spectre essentiel de $H_g^{\pm}$ ne dépend pas de g, c'est-à-dire on a

$$\sigma_{\text{ess}}(H_g^{\pm}) = \sigma_{\text{ess}}(H_0), \ \forall g \geq 0.$$

On fixe le paramètre spectral $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(H_0)$ où $\sigma(H_0)$ dèsigne le spectre de H_0. On note $\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda)$ le nombre des valeurs propres de l'opérateur $H_t^{\pm}$ qui traversent λ lorsque la constante de couplage t croît de zéro à $g > 0$. Il convient de relier $\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda)$ aux fonctions de comptage habituelles qui sont définies ci-dessous.
Soit T un opérateur linéaire auto-adjoint. Si $\lambda < \inf\, \sigma_{\text{ess}}(T)$, on note $N(\lambda; T)$ le nombre des valeurs propres de T inférieures à λ. Soit $T = T^*$ un opérateur compact. On note $n_{\pm}(s;T)$, $s > 0$, le nombre des valeurs propres de l'opérateur $\pm T$ supérieures à s.

Lemme 1 [Al.De.Hem, Théorème 1.3], ou [Bir 1, Proposition 1.6] *Si* $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(H_0)$, *alors sous les hypothèses précédentes on a*

$$\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda) = n_{\pm}(g^{-1}; W(H_0-\lambda)^{-1}W), g > 0. \tag{1}$$

De plus, si $\lambda < \inf\, \sigma(H_0)$ *on a*

$$\mathcal{N}_g^{+}(\lambda) = N(\lambda; H_g^{+}), \ g \geq 0. \tag{2}$$

Le but de cet exposé est de présenter quelques résultats concernant le comportement asymptotique de $\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda)$ lorsque $g \to \infty$, le paramètre $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(H_0)$ étant fixé.
Le comportement de $\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda)$ a été considéré initialement dans le cas particulier unidimensionel où A est nul et F est une fonction périodique (cf. [De.Hem]). Depuis, une littérature importante concernant des problèmes plus généraux a apparu (cf. [Al.De.Hem], [Bir 1,2], [Bir.Rai], [Boy.Lev], [Hem], [Lev 1,2], [Rai 1,3], [Sob]).

2 Asymptotiques weyliennes

Théorème 1 *Soit* $m \geq 3$, $0 \leq V \in L^{m/2}(\mathbf{R}^m)$, $A \in (L^m_{\text{loc}}(\mathbf{R}^m))^m$, $F << -\Delta$, $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(H_0)$. *Alors on a*

$$\mathcal{N}_g^{+}(\lambda) \sim \frac{\int V(X)^{m/2}\, dX}{(4\pi)^{m/2}\Gamma(1+m/2)}\, g^{m/2}, g \to \infty, \tag{3}$$

$$\mathcal{N}_g^{-}(\lambda) = o(g^{m/2}), g \to \infty. \tag{4}$$

On note que le second membre de (3) est égal à

$$(2\pi)^{-m}\mathrm{vol}\left\{(X,\Xi)\in T^*\mathbf{R}^m \mid |\Xi|^2 < gV(X)\right\}$$

et, évidemment, ne dépend pas de λ, A et F.
Théorème 1 a été démontré dans [Bir.Rai]. Auparavant, les relations asymptotiques (3) ou (4) avaient été démontrées dans [Hem], [Rai 1] et [Bir 1] sous les hypothèses essentiellement plus restrictives que celles du théorème 1.
D'autre part, dans le cas où A est nul, F est pèriodique et $0 \leq V \in L^{m/2}(\mathbf{R}^m)$, $m \geq 3$, on a démontré dans [Bir 2] que l'asymptotique (3) reste valable même si λ est une extremité du $\sigma_{\mathrm{ess}}(H_0)$.

Esquisse de la démonstration du théorème 1. D'abord on suppose que $F \equiv 0$. Alors, l'opérateur non perturbé coïncide avec $-\Delta_A$. De plus, on prend le paramètre spectral λ égal à -1. Puisque $-1 < \inf \sigma(-\Delta_A)$, en vertu de (2) on a

$$\mathcal{N}_g^+(-1) = N(-1; -\Delta_A - gV),\ H_0 = -\Delta_A. \tag{5}$$

Le terme principal de l'asymptotique de $N(-1; -\Delta_A - gV)$ quand $g \to \infty$ peut être trouvé en utilisant des méthodes variationelles et le lemme suivant:

Lemme 2 [Av.Her.Sim, Théorème 2.15] *Si* $m \geq 3$, $0 \leq V \in L^{m/2}(\mathbf{R}^m)$, $A \in (L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m))^m$, *on a*

$$N(0; -\Delta_A - V) \leq c_m \int V(X)^{m/2}\, dX$$

où la constante c_m *ne dépend que de la dimension* m.

Ainsi, on obtient l'asymptotique

$$N(-1; -\Delta_A - gV) \sim \frac{\int V(X)^{m/2}\, dX}{(4\pi)^{m/2}\Gamma(1+m/2)}\, g^{m/2}, g \to \infty. \tag{6}$$

Pour démontrer (3) dans le cas général, on écrit l'identité de Hilbert avec poids W:

$$W(-\Delta_A + 1)^{-1}W = W(H_0 - \lambda)^{-1}W + W(-\Delta_A + 1)^{-1}(F - \lambda - 1)(H_0 - \lambda)^{-1}W.$$

On démontre que sous les hypothèses du théorème 1 on a

$$n_\pm(s; W(-\Delta_A + 1)^{-1}(F - \lambda - 1)(H_0 - \lambda)^{-1}W) = o(s^{-m/2}), s \downarrow 0. \tag{7}$$

En utilisant (1), (5), (6), (7), on obtient (3).
L'estimation (4) est vérifiée d'une façon analogue, si on note que $n_-(s; W(-\Delta_A + 1)^{-1}W) = 0$ pour tout $s > 0$.

3 Asymptotiques non weyliennes

Soit $A \in (C^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^m))^m$. On introduit le champ magnétique

$$B := \mathrm{rot}\ A \equiv \{B_{jk}\}_{j,k=1}^m ,$$

$$B_{jk} := \frac{\partial A_k}{\partial X_j} - \frac{\partial A_j}{\partial X_k},\ j,k\ =\ 1,\ldots,m.$$

Dans la suite on suppose que B est constant par rapport à $X \in \mathbf{R}^m$, mais non nul. Soient $b_1 \geq \ldots \geq b_d > 0$ des nombres pour lesquels les valeurs propres non nulles de la matrice antisymétrique B coïncident avec les nombres imaginaires $-ib_j$ et ib_j, $j = 1,\ldots,d$. Alors on a rang $B = 2d$ et $0 < 2d \leq m$. On pose $k = m - 2d :=$ dim Ker B. On note que $k = 0$ implique que m est pair. D'autre part, $m = 3$ entraîne $k = 1$, $d = 1$, alors que $m = 2$ entraîne $k = 0$, $d = 1$.
Soit

$$h_0 := \sum_{j=1}^d b_j \left\{ -\frac{\partial^2}{\partial x_j^2} + x_j^2 \right\}$$

l'opérateur auto-adjoint dans $L^2(\mathbf{R}^d)$ qui est essentiellememt auto-adjoint sur $C_0^\infty(\mathbf{R}^d)$. Le spectre de h_0 est purement discret. On désigne par $\{\Lambda_q\}_{q=1}^\infty$ la suite non décroissante des valeurs propres de h_0. Les nombres Λ_q, $q \geq 1$, appelés dans la littérature physique des niveaux de Landau, s'écrivent sous la forme

$$\Lambda_q = \sum_{j=1}^d b_j(2n_j - 1)$$

oú n_j, $j = 1,\ldots,d$, sont entiers positifs.
Il est bien connu que dans le cas où B est constant, le spectre de l'opérateur $-\Delta_A$ est purement essentiel et il admet une description explicite. Plus précisement, on a

$$\sigma(-\Delta_A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A) = [\Lambda_1, \infty[, \quad \text{si} \quad k \geq 1,$$

$$\sigma(-\Delta_A) = \sigma_{\mathrm{ess}}(-\Delta_A) = \bigcup_{q=1}^\infty \{\Lambda_q\}, \quad \text{si} \quad k = 0.$$

Dans la suite on va considérer le comportement asymptotique de $\mathcal{N}_g^\pm(\lambda)$ dans le cas où $B =$ rot A est constant et $F \equiv 0$.
Afin de formuler les résultats correspondants nous avons besoin des notations suivantes. Soit $k \in \mathbf{N}$ et $t \in \mathbf{R}$. Si $k \geq 1$ on pose $\theta_k(t) := t_+^{k/2}$ et si $k = 0$, on pose

$$\theta_0(t) := \begin{cases} 0, & t \leq 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

Si $t \in \mathbf{R}$ et B est un champ magnétique constant, on pose

$$\Theta(t; B) := \frac{b_1 \dots b_d}{(2\pi)^d} \sum_{q=1}^{\infty} \frac{\theta_k(t - \Lambda_q)}{(4\pi)^{k/2}\Gamma(1 + k/2)}$$

où $k = \dim \operatorname{Ker} B$ et $2d = m - k$.
Puis, on définit certaines classes de fonctions décroissantes à l'infini.
Soit $f = \bar{f} \in C^l(\mathbf{R}^m)$, $l \in \{1, \dots, \infty\}$. On dit que f appartient à la classe $\mathcal{D}_{\alpha,l}$, $\alpha > 0$, si et seulement si f satisfait aux estimations

$$|D^\beta f| \leq c_\beta < X >^{-\alpha-|\beta|}, < X > := (1 + |X|^2)^{1/2}, \forall X \in \mathbf{R}^m,$$

pour tout $\beta \in \mathbf{N}^m$ tel que $|\beta| \leq l$, avec constantes positives c_β.
Ensuite, on dit que f appartient à la classe $\mathcal{D}^+_{\alpha,l}$ si et seulement si $f \in \mathcal{D}_{\alpha,l}$ et, de plus, on a

$$C < X >^{-\alpha} \leq f(X), \ |X| > R,$$

avec constantes positives C et R.
Enfin, on dit que f appartient à la classe $\mathcal{D}^{++}_{\alpha,l}$ si et seulement si $f \in \mathcal{D}^+_{\alpha,l}$, et, de plus, on a

$$C < X >^{-\alpha} \leq |X.\nabla V(X)|, \ |X| > R,$$

avec constantes positives $C > 0$ et $R > 0$.
Si la valeur de l'indice l n'a pas d'importance, cet indice sera omis dans les notations $\mathcal{D}_{\alpha,l}$, $\mathcal{D}^+_{\alpha,l}$ ou $\mathcal{D}^{++}_{\alpha,l}$.
Pour $V \in \mathcal{D}_\alpha$, $\alpha > 0$, $\lambda < \Lambda_1$ et B constant on pose

$$\nu_g(\lambda) := \int \Theta(gV(X) + \lambda; B) \, dX.$$

Notons que si $V \in \mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 2$ (donc, $V \in L^{m/2}(\mathbf{R}^m)$) on a

$$\nu_g(\lambda) \sim \frac{\int V(X)^{m/2} \, dX}{(4\pi)^{m/2}\Gamma(1 + m/2)} g^{m/2}, g \to \infty. \tag{8}$$

tandis que si V vérifie l'asymptotique

$$V(X) \sim v(X/|X|)|X|^{-\alpha}, |X| \to \infty, \alpha \in]0, 2], \tag{9}$$

où $v \in C(\mathbf{S}^{m-1})$ est une fonction positive, on a

$$\lim_{g \to \infty} g^{-m/\alpha} \nu_g(\lambda) = \frac{b_1 \dots b_d}{(2\pi)^d} \frac{\Gamma(m/\alpha - k/2)}{\alpha(4\pi)^{k/2}\Gamma(1 + m/\alpha)}$$

$$\sum_{q=1}^{\infty} (\Lambda_q - \lambda)^{k/2-m/\alpha} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} v(\omega)^{m/\alpha} \, dS(\omega), \ \alpha \in (0, 2),$$

$$\lim_{g\to\infty}(g^{m/2}\ln g)^{-1}\nu_g(\lambda)=\int_{\mathbf{S}^{m-1}} v(\omega)^{m/2}\,dS(\omega)/2(4\pi)^{m/2}\Gamma(1+m/2),\ \alpha=2. \qquad (10)$$

De telle façon, la fonction $\nu_g(\lambda)$ liée aux potentiels généraux $V\in\mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha\in]0,2]$ satisfait aux estimations asymptotiques suivantes:

$$\nu_g(\lambda)\asymp g^{m/\alpha},\ g\to\infty,\ \alpha\in]0,2[,$$

$$\nu_g(\lambda)\asymp g^{m/2}\ln g,\ g\to\infty,\ \alpha=2.$$

Théorème 2 *Soit $m\geq 2$, $F\equiv 0$, B constant, $k=\dim\operatorname{Ker} B\geq 0$. Supposons que $V\in\mathcal{D}^+_{\alpha,1}$, $\alpha\in]0,2]$; si $k=0$ et $\alpha\in]0,2[$, supposons de plus que $V\in\mathcal{D}^{++}_{\alpha,1}$. Si $\lambda<\Lambda_1$, alors on a*

$$\mathcal{N}_g^+(\lambda)\sim\nu_g(\lambda), g\to\infty. \qquad (11)$$

On note que dans le cas $\lambda<\Lambda_1$ la quantité $\mathcal{N}_g^-(\lambda)$ est nulle pour tout $g\geq 0$.
Le théorème 2 a été démontré dans [Rai 1].

Esquisse de la démonstration du théorème 2. La démonstration s'appuie sur le lemme suivant:

Lemme 3 [CdV, Théorème 3.1] *Soit $Q_R\subset\mathbf{R}^m$, $m\geq 2$, un cube quelconque de coté R. Soit $\mathbf{H}_{B,R}$ l'opérateur auto-adjoint engendré dans $L^2(Q_R)$ par la fermeture de la forme quadratique*

$$\int_{Q_R}|i\nabla u+Au|^2\,dX, u\in C_0^\infty(Q_R),$$

$B=\operatorname{rot} A$ étant constant. Alors on a

$$N(\lambda;\mathbf{H}_{B,R})\leq\Theta(\lambda;B),$$

$$N(\lambda;\mathbf{H}_{B,R})\geq(R-R_0)^m\Theta(\lambda-CR_0^{-2};B),$$

pour tout $\lambda\in\mathbf{R}$, $R_0\in]0,R/2[$, C étant une constante qui ne dépend que de la dimension m.

En utilisant une partition convenable de $\mathbf{R}^m$ en cubes non égaux, et en appliquant le lemme 3 combiné avec des méthodes variationelles, on obtient (11).

Si $B=\operatorname{rot} A$ est constant et $k=\dim\operatorname{Ker} B\geq 1$, alors la condition $\lambda=\bar\lambda\notin\sigma(-\Delta_A)$ implique $\lambda<\Lambda_1$, et ce cas a été examiné dans le théorème 2. Cependant, si $k=0$ le point $\lambda=\bar\lambda\notin\sigma(-\Delta_A)$ pourrait être situé entre deux niveaux de Landau distincts consécutifs, c'est-à-dire, on peut avoir $\Lambda_q<\lambda<\Lambda_{q+1}$ pour quelque $q\geq 1$. Le théorème suivant concerne ce cas.
Pour $t\in\mathbf{R}$ on pose

$$k(t):=\frac{b_1\dots b_d}{(2\pi)^d}\,N(t;h_0),$$

et pour $s > 0$ on pose

$$\Phi_V(s) := \text{vol}\,\{X \in \mathbf{R}^m |\ V(X) > s\}.$$

Pour $g > 0$ et $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(-\Delta_A)$ on introduit les fonctions

$$\nu_g^+(\lambda) := \int_\lambda^{+\infty} \Phi_V((t-\lambda)/g)\, dk(t), \tag{12}$$

$$\nu_g^-(\lambda) := \int_{-\infty}^{\lambda} \Phi_V((\lambda - t)/g)\, dk(t). \tag{13}$$

On note que si $\lambda < \Lambda_1$, on a $\nu_g^+(\lambda) = \nu_g(\lambda)$ et $\nu_g^-(\lambda) \equiv 0$.
De plus, si $V \in \mathcal{D}_\alpha$ avec $\alpha > 2$ (respectivement, si V satisfait à l'asymptotique (9) avec $\alpha = 2$), alors la relation (8) (respectivement, la relation (10)) reste valable si on y remplace $\nu_g(\lambda)$ par $\nu_g^+(\lambda)$. D'autre part, si V vérifie l'asymptotique (9) avec $\alpha \in]0,2[$, on a

$$\lim_{g\to\infty} g^{-m/\alpha}\nu_g^+(\lambda) =$$

$$\frac{b_1 \ldots b_d}{m(2\pi)^{m/2}} \sum_{q\geq 1:\Lambda_q>\lambda} (\Lambda_q - \lambda)^{-m/\alpha} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} v(\omega)^{m/\alpha}\, dS(\omega),\ \alpha \in (0,2).$$

Si, enfin, V satisfait à l'asymptotique (9) avec $\alpha > 0$ quelconque, et $\lambda > \Lambda_1$ on a

$$\lim_{g\to\infty} g^{-m/\alpha}\nu_g^+(\lambda) = \frac{b_1 \ldots b_d}{m(2\pi)^{m/2}} \sum_{q\geq 1:\Lambda_q<\lambda} (\lambda - \Lambda_q)^{-m/\alpha} \int_{\mathbf{S}^{m-1}} v(\omega)^{m/\alpha}\, dS(\omega),\ \alpha > 0.$$

Par conséquent, les fonctions $\nu_g^\pm(\lambda)$ liées aux potentiels généraux $V \in \mathcal{D}_\alpha$ satisfont aux estimations suivantes:

$$\nu_g^+(\lambda) \asymp g^{m/\alpha},\ \alpha \in]0,2[,\ \lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(-\Delta_A),$$

$$\nu_g^+(\lambda) \asymp g^{m/2}\ln g,\ \alpha = 2,\ \lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(-\Delta_A),$$

$$\nu_g^-(\lambda) \asymp g^{m/\alpha},\ \alpha > 0,\ \lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(-\Delta_A),\ \lambda > \Lambda_1,$$

toutes valables lorsque $g \to \infty$.

Théorème 3 .- *Soit* $m \geq 2$, $F \equiv 0$, B *constant,* $k = \dim \operatorname{Ker} B = 0$. *Supposons que* $V \in \mathcal{D}_{\alpha,\infty}^{++}$, $\alpha > 0$, *et* $\lambda = \bar{\lambda} \notin \sigma(-\Delta_A)$.
(i) Si $\alpha \in]0,2]$, *on a*

$$\mathcal{N}_g^+(\lambda) \sim \nu_g^+(\lambda),\ g \to \infty. \tag{14}$$

(ii) Pour tout $\alpha > 0$, *on a*

$$\mathcal{N}_g^-(\lambda) \sim \nu_g^-(\lambda),\ g \to \infty. \tag{15}$$

Le théorème 3 a été démontré dans [Rai 3]. Récemment, les asymptotiques (14)–(15) ont été précisées dans [Boy.Lev] où, sous des hypothèses supplémentaires, on a estimé le reste, et dans certains cas on a même calculé le second terme de ces asymptotiques.

Esquisse de la démonstration du théorème 3. Dans $\mathbf{R}^{2d} \equiv \mathbf{R}^m$ il existe des coordonnées cartésiennes (x, y) avec $x \in \mathbf{R}^d$, $y \in \mathbf{R}^d$, telles que l'opérateur H_0 s'écrive sous la forme

$$H_0 = \sum_{j=1}^{d} \left\{ \left(-i\frac{\partial}{\partial x_j} - \frac{b_j y_j}{2} \right)^2 + \left(-i\frac{\partial}{\partial y_j} + \frac{b_j x_j}{2} \right)^2 \right\}.$$

Ecrivons $L^2(\mathbf{R}^{2d}_{x,y})$ comme une intégrale directe

$$L^2(\mathbf{R}^{2d}_{x,y}) = \int_{\mathbf{R}^d_y} \oplus L^2(\mathbf{R}^d_x)\, dy,$$

et posons

$$\mathcal{H}_0 = \int_{\mathbf{R}^d_y} \oplus\, h_0\, dy.$$

Il est bien connu que les opérateurs H_0 et $\mathcal{H}_0$ sont unitairement équivalents, c'est-à-dire il existe un opérateur unitaire $U : L^2(\mathbf{R}^{2d}) \to L^2(\mathbf{R}^{2d})$ tel que

$$U^* H_0 U = \mathcal{H}_0.$$

De plus, on a

$$U^* V U = \mathcal{V}.$$

où $\mathcal{V}$ est l'opérateur pseudodifférentiel (l'o.p.d.) ayant pour symbole de Weyl la fonction

$$V_b(x - \eta, y - \xi),\ (x, y; \xi, \eta) \in T^*\mathbf{R}^{2d},$$

avec

$$V_b(x, y) := V(b_1^{-1/2} x_1, \ldots, b_d^{-1/2} x_d, b_1^{-1/2} y_1, \ldots, b_d^{-1/2} y_d).$$

On pose

$$\mathcal{W} := \mathcal{V}^{1/2}.$$

Alors (1) implique

$$\mathcal{N}_g^{\pm}(\lambda) = n_{\pm}(s; W(H_0 - \lambda)^{-1} W) = n_{\pm}(s; \mathcal{W}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{W}), s \equiv 1/g > 0. \tag{16}$$

Dans la suite on va considérer la fonction $\mathcal{N}_g^-(\lambda)$; la fonction $\mathcal{N}_g^+(\lambda)$ peut être traitée d'une manière semblable.
D'abord on démontre l'estimation asymptotique

$$n_-(s; \mathcal{W}(\mathcal{H}_0 - \lambda)^{-1} \mathcal{W}) \sim n_+(s; |\mathcal{H}_0 - \lambda|^{-1/2} P \mathcal{V} P |\mathcal{H}_0 - \lambda|^{-1/2}), s \downarrow 0, \tag{17}$$

où P est la projection spectrale de $\mathcal{H}_0$ correspondant à l'intervalle $[\Lambda_1, \lambda]$.
Ensuite, on pose
$$N := N(\lambda; h_0)$$
et on introduit l'o.p.d. $\tilde{\mathcal{V}} \equiv \tilde{\mathcal{V}}(\lambda)$ agissant dans $\left(L^2(\mathbf{R}^d_y)\right)^N$ et ayant pour symbole de Weyl la matrice
$$s(y,\eta) := \{s_{rs}(y,\eta)\}_{r,s=1}^N, (y,\eta) \in T^*\mathbf{R}^d,$$
où
$$s_{rs}(y,\eta) := \frac{\int_{\mathbf{R}^{3d}} V_b(\frac{x_1+x_2}{2} - \eta, y - \xi) e^{i\xi\cdot(x_1-x_2)} f_r(x_1) f_s(x_2)\, dx_1\, dx_2\, d\xi}{(2\pi)^d ||\Lambda_r - \lambda|^{1/2}|\Lambda_s - \lambda|^{1/2}}, r, s = 1, \ldots, N,$$
et f_q est la fonction propre (réelle et normée) de l'opérateur h_0 correspondant à la valeur propre Λ_q, $q = 1, \ldots, N$. Evidemment, on a
$$n_+(s; |\mathcal{H}_0 - \lambda|^{-1/2} P \mathcal{V} P |\mathcal{H}_0 - \lambda|^{-1/2}) = n_+(s; \tilde{\mathcal{V}}(\lambda)), \ \forall s > 0. \tag{18}$$
Finalement, on introduit l'o.p.d. $\mathbf{v}$ agissant dans $L^2(\mathbf{R}^d_y)$ et ayant pour symbole de Weyl la fonction
$$V_b(-\eta, y), \ (y,\eta) \in T^*\mathbf{R}^d.$$
On démontre l'estimation asymptotique
$$n_+(s; \tilde{\mathcal{V}}(\lambda)) \sim \sum_{q \geq 1 : \Lambda_q < \lambda} n_+(s|\Lambda_q - \lambda|; \mathbf{v}), s \downarrow 0. \tag{19}$$
L'opérateur $\mathbf{v}$ est un o.p.d. elliptique d'ordre $-\alpha$. En appliquant les résultats de [Dau.Rob], on obtient l'asymptotique
$$n_+(s|\Lambda_q - \lambda|; \mathbf{v}) \sim \frac{1}{(2\pi)^d} \mathrm{vol}\left\{(y,\eta) \in T^*\mathbf{R}^d |\ V_b(-\eta, y) > s|\Lambda_q - \lambda|\right\} \equiv$$
$$\frac{b_1 \ldots b_d}{(2\pi)^d} \Phi_V(s|\Lambda_q - \lambda|), \ s \downarrow 0, \ q = 1, \ldots, N. \tag{20}$$
Maintenant, les relations (16)–(20) entraînent (15) car on a:
$$\nu_g^-(\lambda) = \frac{b_1 \ldots b_d}{(2\pi)^d} \sum_{q=1}^N \Phi(|\Lambda_q - \lambda|/g), g > 0.$$

4 Résultats concernant des problèmes reliés

Dans [Al.De.Hem] on considère les opérateurs $H_g^\pm = H_0 \mp gV$ où $H_0 = -\Delta + F$, F étant une fonction périodique et V vérifiant des hypothèses semblables à celles du théorème 3. On a obtenu des asymptotiques analogues à (14)–(15):
$$\mathcal{N}_g^\pm(\lambda) \sim \tilde{\nu}_g^\pm(\lambda), g \to \infty,$$

où les fonctions $\tilde{\nu}_g(\lambda)$ sont définies en remplaçant dans (12)–(13) la fonction $k(t)$ par la densité des états $\tilde{k}(t)$ liée à l'opérateur H_0 (cf. [Shu] ou [Re.Sim 2]). Les asymptotiques obtenues dans [Al.De.Hem] ont été précisées récemment dans [Lev 1] où on a utilisé certaines idées de l'article [Rai 3].
D'ailleurs, dans une prépublication très récente [Lev 2] on a annoncé des asymptotiques spectrales pour les opérateurs $H_g^{\pm} = H_0 \mp gV$ où $H_0 = -\Delta_A + F$, $B = \text{rot } A$ étant constant et F étant périodique avec un réseau de périodes Γ. On suppose que pour tout $\gamma_j \in \Gamma$, $j = 1, 2$, on a $< B, \gamma_1 \wedge \gamma_2 > \in 2\pi\mathbf{Q}$ où $\gamma_1 \wedge \gamma_2$ est le produit tensoriel antisymétrique de γ_1 et γ_2, et $< .,. >$ désigne le produit scalaire dans l'espace des opérateurs linéaires agissant dans $\mathbf{R}^m$. Il est bien connu que sous ces hypothéses l'opérateur H_0 admet une densité des états. Si V satisfait aux hypothèses proches de celles du théorème 3, alors les termes principaux des asymptotiques annoncées dans [Lev 2] s'écrivent de nouveau sous la forme (14)–(15), la fonction $k(t)$ dans (12)–(13) étant remplacée par la densité des états correspondante.

Bibliographie

[Al.De.Hem] S.Alama, P.A.Deift, R.Hempel, *Eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$*, Commun.Math.Phys. **121** (1989) 291–321.

[Av.Her.Sim] J.Avron, I.Herbst, B.Simon, *Schrödinger operators with magnetic fields. I. General interactions*, Duke Math.J. **45** (1978) 847–883.

[Bir 1] M.Š.Birman, *Discrete spectrum in the gaps of a continuous one for perturbations with large coupling constant*, A: Estimates and asymptotics for discrete spectra of integral and differential equations. Adv.Sov.Math. **7** (1991), 57–74, AMS, Providence, RI.

[Bir 2] M.Š.Birman, *On the discrete spectrum in the gaps for a perturbed periodic second-order operator*, Funct.Anal.Appl. **25**, no.4 (1991) 158–161.

[Bir.Rai] M.Š.Birman, G.D.Raikov, *Discrete spectrum in the gaps for perturbations of the magnetic Schrödinger operator*, A: Estimates and asymptotics for discrete spectra of integral and differential equations, Adv.Sov.Math. **7** (1991), 75–84, AMS, Providence, RI.

[Boy.Lev] S.I.Boyarchenko, S.Z.Levendorskii, *Precise spectral asymptotics for perturbed magnetic Schrödinger operator*, Prépublication, 1994.

[CdV] Y.Colin de Verdière, *L'asymptotique de Weyl pour les bouteilles magnétiques*, Commun.Math.Phys. **105** (1986) 327–335.

[Dau.Rob] M.Dauge, D.Robert, *Weyl's formula for a class of pseudodifferential operators with negative order on $L^2(\mathbf{R}^n)$*, A: Proceedings of the Conference on Pseudodifferential Operators, Oberwolfach 1986, Lect.Notes Math. **1256** (1987), 91–122, Springer, Berlin–Heidelberg–New York.

[De.Hem] P.A.Deift, R.Hempel, *On the existence of eigenvalues of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of $\sigma(H)$*, Commun.Math.Phys. **103** (1986) 461–490.

[Hem] R.Hempel, *On the asymptotic distribution of the eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H \pm \lambda W$ in a spectral gap of H*, J.Reine Angew.Math. **399** (1989) 38–59.

[Lev 1] S.Z.Levendorskii, *Asymptotic formulae with remainder estimates for eigenvalue branches of the Schrödinger operator $H - \lambda W$ in a gap of H*, Prépublication, 1993.

[Lev 2] S.Z.Levendorskii, *Two-term asymptotics for Schrödinger operators with perturbed periodic and uniform magnetic potentials*, Prépublication, 1994.

[Rai 1] G.D.Raikov, *Strong electric field eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with electromagnetic potential*, Lett.Math.Phys. **21** (1991) 41–49.

[Rai 2] G.D.Raikov, *Eigenvalue asymptotics for the Schrödinger operator with perturbed periodic potential*, Inventiones math. **110** (1992) 75–93.

[Rai 3] G.D.Raikov, *Strong-electric-field eigenvalue asymptotics for the perturbed magnetic Schrödinger operator*, Commun.Math.Phys. **155** (1993) 415–428.

[Re Sim 1] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. II. Fourier Analysis. Selfadjointness*, Academic Press, New York, 1978.

[Re Sim 2] M.Reed, B.Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. IV. Analysis of Operators*, Academic Press, New York, 1978.

[Shu] M.A.Šubin, *Spectral theory and the index of elliptic operators with almost periodic coefficients*, Soviet Math.Surveys **34** (1979) 95–135.

[Sob] A.V.Sobolev, *Weyl asymptotics for the discrete spectrum of the perturbed Hill operator*, A: Estimates and asymptotics for discrete spectra of integral and differential equations. Adv.Sov.Math **7** (1991), 159–178, AMS, Providence, RI.