O. Gues

Couches limites pour des problèmes mixtes hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 17, p. 1-16

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A18_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

COUCHES LIMITES POUR DES PROBLEMES MIXTES HYPERBOLIQUES

O. GUES

Exposé n° XVII

26 Avril 1994

Dans cet exposé, on s'intéresse au problème de Dirichlet pour des problèmes d'évolution paraboliques qui sont de petites perturbations visqueuses de systèmes hyperboliques semilinéaires multidimensionnels. Les solutions considérées sont C^∞ *et locales en temps. Le but est de décrire le comportement de la solution lorsque le paramètre de viscosité (* $\varepsilon > 0$ *) tend vers zéro. Il s'agit d'un problème de perturbation singulière pour lequel une "couche limite" se forme au voisinage du bord.*

Nous donnons un développement asymptotique de la solution, basé sur une analyse à trois échelle qui permet de construire des correcteurs (L^∞*) à tous ordres. On obtient ainsi une description précise de la couche limite. On en déduit la convergence de la solution (* $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \to 0$ *) vers la solution d'un problème mixte hyperbolique limite.*

Dans le cas linéaire des résultats partiels avaient été obtenus par C. BARDOS, D. BRÉZIS, H. BRÉZIS, J.-L. LIONS *et* J. RAUCH *([BBB] 1973, [L] 1973, [BR] 1982), et notre travail présente une approche différente du problème qui permet de préciser ces résultats. Dans le cas d'une équation scalaire on dispose des résultats de* N. LEVINSON *[Lev] (1950),* M. I. VISHIK, L. A. LYUSTERNIK *[VL1], [VL2] (1957),* O. OLEINIK *[O] (1967),* C. BARDOS *[Ba] (1970), et* A. M. IL'IN *[I] (1992) où l'on trouvera des calculs détaillés d'asymptotiques et de correcteurs ([I], chap. IV).*

1 Présentation du problème

1.1 Position du problème

On note (t,x) la variable de $\mathbf{R}^{1+n}$ où $t \in \mathbf{R}$ et $x = (x_1,\cdots,x_n) \in \mathbf{R}^n$. Considérons dans $\mathbf{R}^{1+n}$ un opérateur hyperbolique symétrique de taille $N \times N$, à coefficients réels C^∞,

$$\mathscr{H} := A_0(t,x)\,\partial_t + \sum_1^n A_j(t,x)\,\partial_j + B(t,x)$$

et une application $F(t,x,u) \in C^\infty(\mathbf{R}^{1+n}\times\mathbf{R}^N;\mathbf{R}^N)$ qui servira de terme de source nonlinéaire. Les matrices $A_0,\ldots,A_n$ sont symétriques A_0 étant définie positive. On s'intéresse au problème de Dirichlet posé dans le demi-espace $\{x_n > 0\}$ pour de petites perturbations "visqueuses" de $\mathscr{H}$. Précisément on se donne un opérateur différentiel du second ordre en les variables d'espace

$$\mathscr{E} \equiv \sum_{1\leq i,j\leq n} \partial_i\, E_{i,j}(t,x)\,\partial_j,$$

où les matrices $E_{i,j}$ sont C^∞, de taille $N \times N$, réelles symétriques, vérifient pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n}$ la condition d'ellipticité uniforme

$$\sum_{i,j} \xi_i \, \xi_j \, E_{i,j} \ \geq \ Id_{\mathbf{R}^N}, \quad \forall \xi = (\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbf{R}^n, \ |\xi| = 1,$$

et l'on s'intéresse au comportement lorsque $\varepsilon > 0$ tend vers zéro, de la solution u^ε, C^∞, locale autour de $0 \in \mathbf{R}^{1+n}$ du problème mixte

$$\mathscr{H} u^\varepsilon = F(t,x,u^\varepsilon) + \varepsilon \mathscr{E} u^\varepsilon \quad dans \ x_n > 0 \tag{1}$$

$$u^\varepsilon_{|x_n=0} = 0, \quad u^\varepsilon_{|t=0} = 0.$$

Bien entendu, pour qu'il puisse exister de telles solutions régulières, on doit faire des hypothèses de compatibilité sur les données du problème. Pour simplifier nous supposerons que $F_{|t<0} \equiv 0$, de sorte que les conditions de compatibilités sont automatiquement vérifiées. Le problème (1.1) est alors celui de l'évolution dans le futur de la solution nulle dans le passé, perturbée par un terme de source qui "s'allume" à l'instant 0. De plus, afin d'énoncer des résultats globaux en espace, nous supposons que les matrices $A_0 \dots A_n$, B, $E_{i,j}, 1 \leq i,j \leq n$ sont constantes hors d'un compact de $\mathbf{R}^{1+n}$, que $F(t,x,0) \in H^\infty(\mathbf{R}^{1+n})$ et que $F(t,x,u)$ est indépendante de u lorsque u est hors d'un compact de $\mathbf{R}^N$.

Nous notons pour tout réel $T \in]0,+\infty]$, $\Omega_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid 0 < t < T, \ x_n > 0\}$ et $\Gamma_T = \{(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n} \mid 0 < t < T, \ x_n = 0\}$ et désignons par $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ le problème mixte :

$$\mathbf{PM}(\varepsilon,T) \qquad \begin{cases} -\varepsilon \mathscr{E} u^\varepsilon + \mathscr{H} u^\varepsilon = F(t,x,u^\varepsilon) \quad dans \quad \Omega_T, \\ \\ u^\varepsilon_{|\Gamma_T} = 0, \quad u^\varepsilon_{|t=0} = 0. \end{cases}$$

Dans ces conditions, la théorie des problèmes mixtes paraboliques ([LSU], [KL]) assure que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un unique $u^\varepsilon \in C^\infty(\Omega_{T^\varepsilon})$ pour un $T^\varepsilon \in]0,\infty]$ maximal, solution de de $\mathbf{PM}(\varepsilon, T^\varepsilon)$. On se pose alors les questions

Q1 : *existe-t-il un réel $T > 0$ tel que $T^\varepsilon \geq T$, $\forall \varepsilon \in]0,1]$?*

Q2 : *peut-on décrire le comportement de u^ε lorsque $\varepsilon \to 0$, $(\varepsilon > 0)$ au moins pour des temps petits ?*

1.2 Les résultats connus

Avant de rappeler les résultats connus sur le problème que nous venons de présenter, rappelons rapidement ce qui se passe dans le cas du problème sans bord, c'est à dire dans le cas du problème de Cauchy, car la comparaison est intéressante.

Les travaux de T. KATO [Ka], S. KLAINERMAN et A. MAJDA [KM], montrent que dans le cadre du problème de Cauchy, la réponse à la question analogue à **Q1** est "*oui* ". Pour la question analogue à **Q2** la réponse est que, si l'on introduit la solution u^o du problème de Cauchy hyperbolique $\mathscr{H} u^o = F(t,x,u^o)$ et $u^o_{|t=0} = 0$, alors il existe $T > 0$ tel que $u^\varepsilon \to u^o$ dans $H^s([0,T] \times \mathbf{R}^n)$ *pour tout réel* s. En outre ces résultats sont valables dans le cas plus général où le système hyperbolique $\mathscr{H}$ est quasilinéaire.

Revenons maintenant au cas du problème mixte $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$. La situation est très différente et jusqu'à présent les seuls résultats obtenus concernent le cas *linéaire*. Le premier problème qui se pose dans le cas du problème mixte, est d'identifier les conditions au bord pour le problème hyperbolique limite obtenu lorsque $\varepsilon = 0$. Dans le cas linéaire cette question a été résolue par C. BARDOS, D. BRÉZIS, et H. BRÉZIS ([BBB], 1973). Notons $R(t,x) = E^{1/2}_{n,n}(t,x)$ et introduisons les espaces spectraux associés à $\Lambda(t,x) := R^{-1} A_n R^{-1}$:

$$\mathbb{E}_+(t,x) = \sum_{\lambda>0} \ker\big(\Lambda(t,x) - \lambda Id\big)$$

$$\mathbb{E}_-(t,x) = \sum_{\lambda<0} \ker\big(\Lambda(t,x) - \lambda Id\big)$$

$$\mathbb{E}_0(t,x) = \ker \Lambda(t,x).$$

L'espace $\mathbf{R}^N$ est somme directe orthogonale de $\mathbb{E}_+(t,x)$, $\mathbb{E}_-(t,x)$, et $\mathbb{E}_0(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^{1+n}$. On désigne par $P_+(t,x)$, $P_-(t,x)$ et $P_0(t,x)$ les projecteurs orthogonaux de $\mathbf{R}^N$ sur $\mathbb{E}_+(t,x)$, $\mathbb{E}_-(t,x)$ et $\mathbb{E}_0(t,x)$, respectivement.

Nous faisons une hypothèse de multiplicité contante dans $\mathbf{R}^{1+n}$, permettant de simplifier l'exposé, mais qui peut être affaiblie en une hypothèse de multiplicité constante sur le bord ([G]) :

HYPOTHÈSE 1—$\mathbb{E}_+$, $\mathbb{E}_-$, $\mathbb{E}_0$ *sont des fibrés* C^∞ *sur* $\mathbf{R}^n$. *Nous noterons respectivement* d_+, d_-, d_0 *leurs dimensions, qui sont indépendantes de* $(t,x) \in \mathbf{R}^n$.

Lorsque $d_0 = 0$, le bord $x_n = 0$ est non caractéristique pour $\mathscr{H}$. Lorsque $d_0 \neq 0$ le bord est caractéristique de multiplicité constante pour $\mathscr{H}$, et il en est de même pour toutes les surfaces $x_n = cte$. Une observation de base est la suivante

LEMME 2.([BBB])—*Les conditions aux limites* $P_+ R\, u_{|x_n=0} = 0$ *sont maximales dissipatives pour l'opérateur* $\mathscr{H}$ *dans* $\{x_n > 0\}$.

Il en résulte que le problème mixte hyperbolique linéaire avec les conditions aux limites du Lemme 2 est bien posé :

THÉORÈME 3.([F], [LP], [R])—*Soit* $f \in H^\infty(\mathbf{R}^{1+n})$, $f_{|t<0} = 0$. *Pour tout* $T > 0$, *il existe* $u^o \in H^\infty(\Omega_T)$ *unique solution de* $\mathscr{H} u^o = f$ *dans* Ω_T, $P_+ R\, u^o_{|\Gamma_T} = 0$, $u^o_{|t=0} = 0$.

Les auteurs de [BBB] démontrent alors que la solution u^ε de $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ (où $F(t,x,u) \equiv f(t,x)$) converge faiblement dans $L^2(\Omega_T)$ vers u^0, donné par le Théorème 3 (voir également J.-L. LIONS [L], chap. V et l'exemple 2.2 page 366). Le problème mixte hyperbolique limite est donc identifié. Le second problème qui se pose est celui du mode de convergence de u^ε vers u^0. En 1982, C. BARDOS et J. RAUCH ([BR]) ont démontré qu'en fait u^ε converge vers u^0 au sens fort, mais qu'il apparait une limitation (à la différence du cas sans bord) :

THÉORÈME 4.([BR])—*Pour le problème linéaire, $F \equiv f(t,x)$, pour tout $T > 0$, $u^\varepsilon \to u^0$, lorsque $\varepsilon \to 0$ dans $H^s(\Omega_T)$, $\forall s < 1/2$. En géneral u^ε ne converge pas dans $H^{1/2}(\Omega_T)$.*

L'interprétation "pratique" de l'obstruction à la convergence dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ est qu'il se forme une couche limite au voisinage du bord lorsque $\varepsilon \to 0$, dans laquelle la différence $u^\varepsilon - u^0$ reste "importante" et empêche la convergence.

Le Théorème 4 appelle diverses questions. La première et la plus générale est :

— *quel est le comportement de u^ε au voisinage du bord, c'est à dire "dans la couche limite" ?*

On peut également poser des questions plus précises. Tout d'abord, la démonstration de BARDOS et RAUCH consiste à montrer que la suite u^ε est bornée dans $H^s(\Omega_T)$ lorsque $s < 1/2$, la convergence dans $H^{s'}(\Omega_T)$ pour $s' < s$ se déduisant alors par compacité du résultat de [BBB]. Signalons qu'un raisonnement identique est utilisé dans le travail de M. BÉZARD [Bé] pour la perturbation visqueuse $-\varepsilon(\Delta_x)^3$ du système de Maxwell linéaire. Cependant cette démarche ne donne pas d'estimations sur la convergence et l'on peut se demander :

— *existe-t-il des estimations sur la vitesse de convergence de u^ε vers u^0 ?*

La question suivante est déjà soulevée dans [BR] :

— *u^ε reste-t-elle bornée (indépendamment de ε) dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ lorsque $\varepsilon \to 0$?*

Une autre question naturelle, qui semble importante si l'on veut aborder le problème non linéaire et qui est indépendante de la précédente, est :

— *u^ε reste-t-elle bornée (indépendamment de ε) dans $L^\infty(\Omega_T)$ lorsque $\varepsilon \to 0$?*

Le but de cet exposé est de présenter une autre approche du problème qui permet de répondre avec précision à ces questions et de traiter le cas semilinéaire en répondant (*oui*) à **Q1** et en donnant une réponse à **Q2** sur un intervalle de temps assez petit, mais indépendant de ε.

COMMENTAIRE— En rappeleant les résultats connus, nous n'avons fait référence qu'aux travaux concernant *strictement* le problème considéré. Bien entendu, les travaux concernant des problèmes voisins de couches limites et de perturbations singulières sont très nombreux et nous renvoyons par exemple le lecteur aux travaux de N. LEVINSON [Lev] (1950), O. OLEINIK [O] (1967), M. I. VISHIK,

L. A. LYUSTERNIK [VL1], [VL2] (1957, 1960), C. BARDOS [B] (1970), J-L. LIONS [L] (1973), A. M. IL'IN [I], (1992), ainsi qu'aux bibliographies de ces ouvrages.

2 Exposé des résultats

2.1 Variables rapides, profils

Nous allons décrire le comportement de $u^\varepsilon(t,x)$ à l'aide d'un développement asymptotique à trois échelles : l'échelle "lente" des variables (t,x), une échelle "rapide" en x_n/ε et une échelle "intermédiaire" en $x_n/\sqrt{\varepsilon}$. Le développement fait intervenir des fonction (les profils) qui dépendent des variables t,x et de deux variables rapides notées $z \in [0,+\infty[$ et $\theta \in [0,+\infty[$ correspondant respectivement à x_n/ε et $x_n/\sqrt{\varepsilon}$.

Pour tout $T > 0$ désignons par $\mathcal{A}(T)$ l'espace des fonctions $\mathcal{U} : \Omega_T \times \mathbf{R}^+_z \times \mathbf{R}^+_\theta \to \mathbf{R}^N$, qui admettent une décomposition de la forme

$$\mathcal{U}(t,x;z;\theta) = a(t,x) + b(t,x;\theta) + c(t,x;z) + d(t,x;z;\theta) \tag{2}$$

où $a \in H^\infty(\Omega_T)$, $b \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta)$, $c \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}^+_z)$ et $d \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}^+_\theta \times \mathbf{R}^+_z)$. Une telle décomposition est alors unique et ses termes s'expriment en fonction des limites en z ou θ en $+\infty$ de $\mathcal{U}$: $a = \lim_{(z,\theta)\to(\infty,\infty)} \mathcal{U}$, $a + b = \lim_{z\to\infty} \mathcal{U}$, $a + c = \lim_{\theta\to\infty} \mathcal{U}$, $d = \mathcal{U} - a - b - c$. Nous noterons dans la suite

$$\underline{\mathcal{U}}(t,x) := \lim_{(z,\theta)\to(\infty,\infty)} \mathcal{U}(t,x)$$

au lieu de a. L'espace $\mathcal{A}(T)$ est une algèbre, stable pour la composition par des fonctions C^∞ nulles en zéro, et par dérivation.

Un calcul simple montre que pour $\mathcal{U} \in \mathcal{A}(T)$, la suite $\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}) =: v^\varepsilon$, $\varepsilon > 0$, converge vers $\underline{\mathcal{U}}(t,x)$ dans $L^2(\Omega_T)$, lorsque $\varepsilon \to 0$, et que :

$$\|\underline{\mathcal{U}}(t,x) - v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c\,\varepsilon^{1/4}\ , \quad (0 < \varepsilon \leq 1). \tag{3}$$

En outre, si $\mathcal{U}$ est tel que b et d sont nuls dans la décomposition (2), c'est à dire si $\mathcal{U}$ ne dépend pas de θ, on a :

$$\|\underline{\mathcal{U}}(t,x) - v^\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \leq c\,\varepsilon^{1/2}\ , \quad (0 < \varepsilon \leq 1). \tag{4}$$

2.2 Les résultats

Commençons par introduire la solution du problème mixte hyperbolique semilinéaire limite :

THÉORÈME 5.([G])—*Il existe* $T_0 > 0$ *et un unique* $u^0 \in H^\infty(\Omega_{T_0})$ *solution du problème mixte hyperbolique semilinéaire* $\mathscr{H} u^0 = F(t,x,u^0)$ *dans* Ω_{T_0}, $P_+ R\ u^0_{|\Gamma_{T_0}} = 0$, $u^0_{|t=0} = 0$.

Le résultat principal est le suivant :

THÉORÈME A—*Il existe* $T \in]0, T_0]$, $\varepsilon_0 > 0$ *ainsi qu'une suite* $\mathfrak{U}^j, j \in \mathbf{N}$, *d'éléments de* $\mathcal{A}(T)$ *tels que pour tout* $\varepsilon \in\ ]0, \varepsilon_0]$, *le problème mixte* $\mathbf{PM}(\varepsilon, T)$ *possède une unique solution* $u^\varepsilon \in H^\infty(\Omega_T)$, *et celle-ci admet le développement asymptotique suivant, pour tout entier k et en tout point (t,x) de* Ω_T *:*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=k} (\sqrt{\varepsilon}\ )^j\ \mathfrak{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) + (\sqrt{\varepsilon}\ )^{k+1} R_\varepsilon(t,x), \tag{5}$$

avec $\|R_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_T)} \le cte$, $\|R_\varepsilon\|_{H^m(\Omega_T)} \le c_m(1+\varepsilon^{-m+1/4})$, $\forall m \in \mathbf{N}$. *De plus, le premier profil* $\mathfrak{U}^0$ *vérifie* $\underline{\mathfrak{U}}^0(t,x) = u^0(t,x)$ *où* u^0 *est donnée par le Théorème 5.*

Lorsque le bord n'est pas caractéristique pour $\mathscr{H}$, on peut préciser le temps T du Théorème A et l'échelle rapide en $x_n/\sqrt{\varepsilon}$ disparait de l'analyse du problème :

THÉORÈME B—*Lorsque* $d_0 = 0$, *on peut prendre* $T = T_0$ *dans le théorème A. De plus, seule l'échelle rapide en* x_n/ε *intervient, c'est à dire que* $\mathfrak{U}^{2j+1} = 0$ *et* $\mathfrak{U}^{2j}$ *ne dépend pas de* θ *:*

$$u^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=k} \varepsilon^j\ \mathfrak{U}^{2j}(t,x;x_n/\varepsilon) + \varepsilon^{k+1} Q_\varepsilon(t,x), \tag{6}$$

avec $\|Q_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_T)} \le cte$, $\|Q_\varepsilon\|_{H^m(\Omega_T)} \le c_m(1+\varepsilon^{-m+1/2})$, $\forall m \in \mathbf{N}$.

On déduit en particulier des Théorèmes A et B les informations suivantes :

COROLLAIRE C—*La suite* u^ε *reste bornée uniformément dans* $L^\infty(\Omega_T)$ *et converge vers* u^0 *avec les estimations :* $\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \le c\ \varepsilon^{1/2}$ *si* $d_0 = 0$ *et* $\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_T)} \le c\ \varepsilon^{1/4}$ *si* $d_0 \ne 0$.

Preuve du Corollaire : le fait que u^ε soit bornée résulte directement du développement asymptotique du théorème A. L'estimation L^2 de $u^\varepsilon - u^0$ résulte d'une part du théorème A qui permet d'écrire $u^\varepsilon - u^o = \mathcal{U}^o(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) - \underline{\mathcal{U}}^o(t,x) + \sqrt{\varepsilon}R_\varepsilon$, et d'autre part des inégalités (3) ou (4).///

Pour savoir si la suite u^ε reste bornée dans $H^{1/2}(\Omega_T)$ il sufft d'estimer la norme $H^{1/2}(\Omega_T)$ du terme $\mathcal{U}^o(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ )$. Or sa norme L^2 est de l'ordre de $\varepsilon^{1/4}$ et sa norme H^1 de l'ordre de $\varepsilon^{-1}\varepsilon^{1/4} = \varepsilon^{-3/4}$. Par interpolation, sa norme $H^{1/2}$ est donc de l'ordre de $\varepsilon^{-1/4}$. Ce calcul indique que pour une fonction générale $\mathcal{U} \in \mathcal{A}(T)$, la suite $\mathcal{U}(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ )$ *n'est pas bornée* dans $H^{1/2}(\Omega_T)$. Cependant, l'étude des profils $\mathcal{U}^j$, dont la construction est détaillée au paragraphe suivant, montre que le premier profil $\mathcal{U}^o$ possède la particularité suivante, (ce qui n'est pas le cas autres profils $\mathcal{U}^j, j \geq 1$) :

LEMME D—*Le terme $d(t,x;z;\theta)$ de la décomposition (2) de $\mathcal{U}^o$ est nul.*

Ce Lemme entraine que $\mathcal{U}^o(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ )$ s'écrit en fait $u^o(t,x) + b(t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) + c(t,x;x_n/\varepsilon)$ et le même raisonnement par interpolation montre qu'il s'agit là d'une somme de termes bornés dans $H^{1/2}(\Omega_T)$. En définitive nous obtenons :

COROLLAIRE E—*La suite u^ε est bornée dans $H^{1/2}(\Omega_T)$.*

Structure de la couche limite.— D'après le Lemme D, en utilisant à l'avance des notations du paragraphe 3, $\mathcal{U}^o$ s'écrit $u^o + \mathcal{V}^o(t,x;z) + \mathcal{W}^o(t,x;\theta)$ et $u^\varepsilon(t,x) = u^o(t,x) + \mathcal{V}^o(t,x;x_n/\varepsilon) + \mathcal{W}^o(t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ) + O(\sqrt{\varepsilon}\ )$ dans L^∞. Les équations des profils montrent (formules (9) et (10)) que $\mathcal{V}^o$ et $\mathcal{W}^o$ sont polarisés au sens où $\mathcal{V}^o(t,x;z) \in \mathbb{E}_-(t,x)$ et $\mathcal{W}^o(t,x;\theta) \in \mathbb{E}_0(t,x)$ pour tous $(t,x;z;\theta)$. En outre les équations de $\mathcal{V}^o$ sont linéaires alors que celles de $\mathcal{W}^o$ sont non linéaires. Les fluctuations de $\mathcal{V}^o(t,x;x_n/\varepsilon)$ décrivent une couche limite *non caractéristique*, à comportement *linéaire* et d'épaisseur caractéristique ε. Les fluctuations de $\mathcal{W}^o(t,x;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ )$ d'écrivent une couche limite *caractéristique* dont l'évolution est *non linéaire* et dont l'épaisseur caractéristique est $\varepsilon^{1/2}$.

La démonstration du Théorème A comporte essentiellement deux étapes. La première consiste à construire la suite $\mathcal{U}^j$ de manière à ce que les sommes partielles

$$a^\varepsilon(t,x) = \sum_{j=0}^{j=l} (\sqrt{\varepsilon}\ )^j\ \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\ ),$$

définissent des solutions approchées de $\mathrm{PM}(\varepsilon,T)$. La deuxième étape consiste à montrer que la solution exacte est bien de la forme $a^\varepsilon + O(\varepsilon^{(k+1)/2})$, pour un certain k inférieur à l (on choisit un l suffisamment grand au départ). Les deux paragraphes qui suivent sont des présentations succintes de ces deux étapes. Nous avons surtout détaillé la construction des profils qui constitue la partie la plus intéressante.

3 La construction des profils

Nous supposons pour simplifier que $E_{n,n} = Id$ (ce à quoi on peut toujours se ramener en prenant Ru comme inconnue). Si l'on pemplace formellement u^ε par

$$\sum_0^\infty (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\ \mathfrak{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$$

dans l'expression $-\varepsilon\mathscr{E}u^\varepsilon + \mathscr{H}u^\varepsilon - F(t,x,u^\varepsilon)$, que l'on développe par la formule de Taylor et que l'on ordonne en puissances de $\sqrt{\varepsilon}$, on obtient une expression

$$\sum_{-2}^\infty (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\ \mathfrak{F}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,).$$

On cherche alors à déterminer la suite $\mathfrak{U}^j$ de sorte que soient vérifiées les relations

$$(7)_j \qquad \mathfrak{F}^j \equiv 0\ , \quad \mathfrak{U}^j_{|x_n=z=\theta=0} = 0\ , \quad \mathfrak{U}^j_{|t=0} = 0\ , \quad j \geq -2.$$

Lorsque $k \geq 1$ l'équation $\mathfrak{F}^k \equiv 0$ s'écrit :

$$(8)\quad \mathscr{H}\mathfrak{U}^k - \partial_\theta^2\mathfrak{U}^k - \sum_{i=1}^{i=n}(E_{i,n}+E_{n,i})\partial_i\partial_z\mathfrak{U}^k - \sum_{i=1}^{i=n}(\partial_i E_{i,n})\partial_z\mathfrak{U}^k - F'_u(t,x,0)\mathfrak{U}^k$$
$$+ A_n\partial_\theta\mathfrak{U}^{k+1} - 2\partial_\theta\partial_z\mathfrak{U}^{k+1} + A_n\partial_z\mathfrak{U}^{k+2} - \partial_z^2\mathfrak{U}^{k+2}$$
$$= f_k(t,x,\mathfrak{U}^\circ,\ldots,\mathfrak{U}^{k-1}).$$

où les fonctions f_k sont des fonctions C^∞ de leurs arguments. Les trois premières équations ont une forme particulière :

$$(\mathfrak{F}^{-2} \equiv 0) \qquad A_n\partial_z\mathfrak{U}^\circ - \partial_z^2\mathfrak{U}^\circ = 0,$$

$$(\mathfrak{F}^{-1} \equiv 0) \qquad A_n\partial_\theta\mathfrak{U}^\circ - 2\partial_\theta\partial_z\mathfrak{U}^\circ + A_n\partial_z\mathfrak{U}^1 - \partial_z^2\mathfrak{U}^1 = 0\ ,$$

$$(\mathfrak{F}^0 \equiv 0) \qquad \mathscr{H}\mathfrak{U}^\circ - \partial_\theta^2\mathfrak{U}^\circ - \sum_i(E_{i,n}+E_{n,i})\partial_i\partial_z\mathfrak{U}^\circ - \sum_i(\partial_i E_{i,n})\partial_z\mathfrak{U}^\circ$$
$$+ A_n\partial_\theta\mathfrak{U}^1 - 2\partial_\theta\partial_z\mathfrak{U}^1 + A_n\partial_z\mathfrak{U}^2 - \partial_z^2\mathfrak{U}^2 = F(t,x,\mathfrak{U}^\circ).$$

Introduisons l'opérateur différentiel $\mathbb{H}(t,x;\partial_t,\partial_1,\ldots,\partial_{n-1}) \equiv P_0\mathscr{H}P_0$ qui est un opérateur symétrique dans lequel ne figure pas de dérivation de ∂_n. Pour toute fonction $G(t,x,u)$ vérifiant les mêmes hypothèses que F, on démontre, par des méthodes d'énergies de systèmes hyperboliques-paraboliques, le résultat auxilliaire suivant :

THÉORÈME 6.—*Soit* $g \in H^\infty(\Omega_\infty), \partial_t^j g_{|t=0} = 0, \forall j \in \mathbf{N}$. *Il existe* $T > 0$ *et une unique solution* $W(t,x;\theta)$ *appartenant à* $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$ *du problème*

$$(P_0 - Id\,)\,W = 0,$$

$$(-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\,)\,W = P_0 G(t,x,W) \quad dans \quad \Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+,$$

$$W_{|\theta=0} = P_0 g.$$

Pour résoudre la cascade des équations des profils, il est commode d'adopter les notations suivantes pour $\mathcal{U} \in \mathcal{A}(T)$:

$$\mathcal{U}(t,x;z;\theta) = \underline{\mathcal{U}}(t,x) + \mathcal{V}(t,x;z;\theta) + \mathcal{W}(t,x;\theta),$$

ce qui revient à dire si l'on se reporte à la décomposition (2), que $\mathcal{V} := c + d$ et $\mathcal{W} := b$. On définit également les trois projecteurs $\mathcal{L}_0$, $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ de $\mathcal{A}(T)$ par

$$\mathcal{L}_0\mathcal{U} := \lim_z(\lim_\theta \mathcal{U} + P_0(Id - \lim_\theta)\mathcal{U}) = \underline{\mathcal{U}} + P_0\mathcal{W},$$

$$\mathcal{L}_1\mathcal{U} := \lim_z(Id - \lim_\theta)(Id - P_0)\mathcal{U} = (Id - P_0)\mathcal{W},$$

$$\mathcal{L}_2\mathcal{U} := (Id - \lim_z)\mathcal{U} = \mathcal{V},$$

qui vérifient $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 = Id$.

L'algorithme permettant de résoudre les équations de profils $\mathcal{E}_j, j \in \mathbf{N}$, consiste à itérer la résolution du problème $\mathcal{S}_j$ suivant

$$(\mathcal{S}_j) \qquad \begin{cases} \mathcal{L}_2\mathcal{F}^{j-2} \equiv 0, \quad \mathcal{L}_1\mathcal{F}^{j-1} \equiv 0, \quad \mathcal{L}_0\mathcal{F}^j \equiv 0, \\ \mathcal{U}^j_{|x_n=z=\theta=0} = 0, \quad \partial_t^\alpha \mathcal{U}^j_{|t=0} = 0, \ \forall \alpha \in \mathbf{N}. \end{cases}$$

Un fait crucial qu'il faut observer sur le système $(\mathcal{S}_j)$, est que les inconnues $\mathcal{U}^{j+1}$ et $\mathcal{U}^{j+2}$ n'y figurent pas : elles ont été "effacées" par l'application des opérateurs $\mathcal{L}_i$, $(i = 0,1,2)$. Autrement dit, si l'on suppose connues $\mathcal{U}^o, \ldots, \mathcal{U}^{j-1}$, la seule inconnue du système $(\mathcal{S}_j)$ est $\mathcal{U}^j$. Cette construction présente des analogies avec celle (à deux échelles) introduite par J.-L. JOLY et J. RAUCH [JR] pour résoudre la cascade des équations B.K.W de l'optique géométrique semilinéaire. Le Théorème 7 ci-dessous montre qu'il s'agit bien d'une récurrence et le lemme qui suit indique comment l'initialiser.

THÉORÈME 7.—*Soit* $k \geq 1$. *Supposons connues des fonctions* $\mathcal{U}^j \in \mathcal{A}(T)$, *vérifiant* $(\mathcal{S}_j)$ *pour* $j = o, \ldots, k-1$. *Alors il existe* $\mathcal{U}^k \in \mathcal{A}(T)$, *vérifiant* $(\mathcal{S}_k)$.

Pour initialiser la récurrence on définit $\mathcal{W}^o \in H^\infty(\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_\theta^+)$ comme l'unique solution, pour un certain $T_1 > 0$, dans $H^\infty(\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_\theta^+)$ du système (théorème 6) :

$$(9) \qquad \begin{cases} (P_0 - Id)\mathcal{W}^o = 0, \\ (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ )\ \mathcal{W}^o = P_0\big(F(t,x,u^o + \mathcal{W}^o) - F(t,x,u^o)\big), \\ \mathcal{W}^o_{|\theta=0} = -P_0 u^o, \quad \mathcal{W}^o_{|t=0} = 0,. \end{cases}$$

et $\mathcal{V}^o \in H^\infty(\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_\theta^+ \times \mathbf{R}_z^+)$ comme étant l'unique solution dans $\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_\theta^+ \times \mathbf{R}_z^+$ du système linéaire :

$$(10) \qquad \begin{cases} -\partial_z^2 \mathcal{V}^o + A_n \partial_z \mathcal{V}^o = 0, \\ (Id - P_-)\mathcal{V}^o = 0, \\ \mathcal{V}^o_{|z=0} = -P_- u^o, \quad \mathcal{V}^o_{|t=0} = 0,. \end{cases}$$

LEMME 8.—*La fonction $\mathcal{U}^o := u^o + \mathcal{V}^o + \mathcal{W}^o$, vérifie le système $(\mathscr{S}_0)$.*

REMARQUE 9.— On constate sur le système (10) que la solution $\mathcal{V}^o$ est indépendante de θ ce qui démontre le lemme D. De plus, $\underline{\mathcal{U}^o} = u^o$ ce qui est l'une des affirmations du Théorème A •

Le théorème 7 est l'argument central de la construction et sa preuve repose sur les faits suivants. Lorsque l'on veut résoudre le résoudre le système $(\mathscr{S}_k)$, connaissant $\mathcal{U}^0, \ldots, \mathcal{U}^{k-1}$, on est essentiellement confronté au problème de résoudre, pour des éléments Φ_0, Φ_1, Φ_2 de $\mathcal{A}(T)$ (vérifiant $\partial_t^\alpha \Phi_{i|t=0}, \forall \alpha \in \mathbf{N},\ i = 1,2,3$), le problème suivant où l'inconnue est $\mathcal{U}^k = \underline{\mathcal{U}}^k + \mathcal{V}^k + \mathcal{W}^k$ (on omet de noter l'exposant k) :

$$(11) \qquad \begin{cases} -\partial_z^2 \mathcal{V} + A_n \partial_z \mathcal{V} = \mathcal{L}_2 \Phi_2, & (1.1) \\ A_n \partial_\theta (Id - P_0)\mathcal{W} = \mathcal{L}_1 \Phi_1, & (11.2) \\ \mathscr{H}\underline{\mathcal{U}} + (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ )\mathcal{W} = \mathcal{L}_0 \Phi_0, & (11.3) \\ (\underline{\mathcal{U}} + \mathcal{V} + \mathcal{W})_{|x_n=z=\theta=0} = 0, \quad \mathcal{U}_{|t=0} = 0. & (11.4) \end{cases}$$

On a alors le résultat suivant dont nous détaillons la preuve :

PROPOSITION 10.—*Pour tout $T > 0$, le système (11) possède une solution $\mathcal{U} = \underline{\mathcal{U}} + \mathcal{V} + \mathcal{W}$ dans $\mathcal{A}(T)$, qui en outre vérifie $\partial_t^\alpha \mathcal{U}_{|t=0} = 0, \forall \alpha \in \mathbf{N}$.*

Démonstration. L'équation (11.2) détermine par intégration $(Id - P_0)\mathcal{W}$ dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$, car $\mathcal{L}_1\Phi_1$ est de la forme $(Id - P_0)\Psi_1 \in H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$. Par (11.1), $\mathcal{V}$ nest pas déterminé car les conditions aux limites nécessaires pour résoudre (11.1) dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+)$, c'est à dire la donnée de $P_-\mathcal{V}_{|z=0}$, sont inconnues puisqu'elles sont reliées à $\underline{\mathcal{U}}$ et à $\mathcal{W}$. Cependant $P_-\mathcal{V}$ et $P_0\mathcal{V}$ sont déterminés par (11.1). En effet $\mathcal{V}$ est connu modulo un élément de $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+)$ appartenant au noyau de $-\partial_z^2 + A_n\partial_z$. Or ce noyau est polarisé sur $\mathbb{E}_-$. C'est à dire que si $\Psi(t,x;z;\theta)$ vérifie $(-\partial_z^2 + A_n\partial_z)\Psi = 0$, alors $\Psi(t,x;z;\theta) \in \mathbb{E}_-(t,x)$ pour tout $(t,x;z;\theta)$ puisque Ψ s'annule lorsque $z \to \infty$. Par conséquent la projection de $\mathcal{V}$ sur $(\mathbb{E}_-)^\perp = \mathbb{E}_+ \oplus \mathbb{E}_0$ est déterminée : $P_+\mathcal{V}$ et $P_0\mathcal{V}$ sont déterminés. Ces deux fonctions sont les solutions des systèmes suivants (puisque P_+ et P_0 commuttent avec A_n) :

$$(-\partial_z^2 + A_n\partial_z)\ P_+\mathcal{V} = P_+\mathcal{L}_2\Phi_2, \quad P_-(P_+\mathcal{V})_{|z=0} = 0,$$

et

$$(-\partial_z^2 + A_n\partial_z)\ P_0\mathcal{V} = P_0\mathcal{L}_2\Phi_2, \quad P_-(P_0\mathcal{V})_{|z=0} = 0.$$

En appliquant P_+ à la condition aux limites (11.4) on obtient, en notant $\Sigma := \{x_n = \theta = z = 0\}$:

$$\big(P_+\underline{\mathcal{U}} + P_+\mathcal{V} + P_+(Id - P_0)\mathcal{W}\big)_{|\Sigma} = 0$$

donc $(P_+\underline{\mathcal{U}})_{|x_n=0}$ est connu et en prenant la limite de (11.3) quand $\theta \to \infty$ on trouve que $\underline{\mathcal{U}}$ est solution du problème mixte hyperbolique symétrique à conditions aux limites maximales dissipatives

$$\begin{cases} \mathscr{H}\underline{\mathcal{U}} = \underline{\mathcal{L}_0\Phi_0} \\ P_+\underline{\mathcal{U}}_{\ |x_n=0} = -P_+\mathcal{V}_{|\Sigma} - P_+(Id - P_0)\mathcal{W}_{|\Sigma}, \\ \underline{\mathcal{U}}_{\ |t=0} = 0 \end{cases}$$

et donc $\underline{\mathcal{U}}$ est déterminé. La condition (11.4) entraine alors que $(P_0\underline{\mathcal{U}} + P_0\mathcal{V} + P_0\mathcal{W})_{|\Sigma} = 0$, ce qui permet de résoudre la partie restante de (10.3) qui est une équation sur $P_0\mathcal{W}$:

$$\begin{cases} (-\partial_\theta^2 + \mathbb{H}\ )\ P_0\mathcal{W} = \mathcal{L}_0\Phi - \underline{\mathcal{L}_0\Phi_0} \\ P_0\mathcal{W}_{|\theta=0} = -P_0\underline{\mathcal{U}} - P_0\mathcal{V}_{|z=\theta=0}, \\ P_0\mathcal{W}_{\ |t=0} = 0, \end{cases}$$

qui possède une solution unique dans $H^\infty(\Omega_T \times \mathbf{R}_\theta^+)$ d'après le Théorème 6. On achève alors en déterminant $\mathcal{V}$ comme la solution du problème

$$\begin{cases} -\partial_z^2\mathcal{V} + A_n\partial_z\mathcal{V} = \mathcal{L}_2\Phi_2, \\ P_-\mathcal{V}_{|z=0} = -P_-\underline{\mathcal{U}} - P_-\mathcal{W}, \\ \mathcal{V}_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

nulle à l'infini en z.

La nullité des traces sur $t=0$ dérivées temporelles de $\mathcal{U}$ découle ensuite des équations, ce qui termine la preuve de la Proposition.///

REMARQUE 11.— Lorsque $d_0 = 0$, en reprenant les calculs qui précèdent on constate que les termes en $\mathcal{W}$ disparaissent ce qui conduit au Théorème B •

4 La solution exacte

Dans ce paragraphe nous donnons les arguments essentiels de la "deuxième étape" de la démonstration du Théorème A. De la même manière et grâce à la Remarque 11, on démontre le Théorème B. Observons qu'il suffit de démontrer que l'estimation (5) du Théorème A est vraie lorsque $k \geq k_0$ pour un certain k_0, pour qu'elle soit vraie pour tout les entiers k, ceci justement en raison de la forme du développement et des estimations (3).

Fixons un entier $p > (n+1)/2$. Pour tout entier $q \geq 3$ les profils $\mathcal{U}^j$ construits sur $\Omega_{T_1} \times \mathbf{R}_z \times \mathbf{R}_\theta^+$ assurent que

$$a^\varepsilon(t,x) = \sum_0^{2p+q} (\sqrt{\varepsilon}\,)^j\ \mathcal{U}^j(t,x;x_n/\varepsilon;x_n/\sqrt{\varepsilon}\,)$$

est une solution approchée du système $\mathbf{PM}(\varepsilon, T_1)$ au sens où

$$(12) \qquad -\varepsilon\mathscr{E}\,a^\varepsilon + \mathscr{H}a^\varepsilon = F(t,x,a^\varepsilon) + (\sqrt{\varepsilon})^{q-1}\ \varepsilon^p\ H_\varepsilon,$$

$$a^\varepsilon_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad a^\varepsilon_{|t=0} = 0,$$

et pour $q = k+4$, $k \in \mathbf{N}$ (où k est l'entier qui apparait dans l'énoncé du Théorème A), le membre de droite de (12) s'écrit $F(t,x,a^\varepsilon) + \varepsilon^{(k+1)/2}\ \varepsilon\ \varepsilon^p\ H_\varepsilon$. Nous supposons $k \geq 3$ pour la suite. On cherche alors une solution exacte du système sur Ω_{T_1} de la forme $a^\varepsilon + \varepsilon^{(k+1)/2} R_\varepsilon$, de sorte que R_ε doit être solution du système suivant, où l'on a noté $G(t,x,u,v)v := F(t,x,u+v) - F(t,x,u,v)$:

$$(13) \qquad \begin{cases} -\varepsilon\mathscr{E}\,R + \mathscr{H}R = G(t,x,a^\varepsilon,\varepsilon^{(k+1)/2}R).R + \varepsilon K_\varepsilon \quad dans \quad \Omega_{T_1}, \\[2ex] R_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad R_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

où $K_\varepsilon := \varepsilon^p\ H_\varepsilon$ est borné uniformément dans $H^p(\Omega_{T_1})$.

THÉORÈME 12.—*Il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que pour tout $\varepsilon \in]0,\varepsilon_0]$ le problème (13) admet une unique solution $R_\varepsilon \in H^\infty(\Omega_{T_1})$. Celle-ci vérifie les inégalités $\|R_\varepsilon\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})} \leq cte$, $\|R_\varepsilon\|_{H^p(\Omega_{T_1})} \leq c_p\ \varepsilon(1+\varepsilon^{-p/2})$.*

Pour démontrer ce Théorème on montre la convergence, pour $\varepsilon_o > 0$ assez petit, du schéma itératif

$$(14)\quad \begin{cases} -\varepsilon\mathscr{E}\, v^{\nu+1} + \mathscr{H} v^{\nu+1} = G(t,x,a^\varepsilon,\varepsilon^{(k+1)/2}v^\nu).v^{\nu+1} + \varepsilon K_\varepsilon \quad \textit{dans} \quad \Omega_{T_1}, \\ v^{\nu+1}_{|\Gamma_{T_1}} = 0, \quad v^{\nu+1}_{|t=0} = 0, \end{cases}$$

initialisé avec $v^0 = 0$. Pour cela on introduit les normes à poids $\lambda \geq 1$ qui mesurent la régularité tangente au feuilletage $\{x_n = 0\}$:

$$|\, u \,|_{0,\lambda} := \|e^{-\lambda t}u\|_{L^2(\Omega_{T_1})}$$

$$|\, u \,|_{m,\lambda} := \sum_{|\alpha|\leq m} \lambda^{m-|\alpha|}\, |\, Z^\alpha u \,|_{0,\lambda}$$

où $Z := (\partial_t, \partial_1, \ldots, \partial_{n-1})$ et $\alpha = (\alpha_0, \ldots, \alpha_{n-1})$. On note $\|u\|_\infty$ pour $\|u\|_{L^\infty(\Omega_{T_1})}$.

Lorsque $\varepsilon > 0$ est fixé, toutes les solutions v^ν du schéma itératif sont dans $H^\infty(\Omega_{T_1})$ et vérifient $\partial_t^j v^\nu_{|t=0} = 0, \forall j \in \mathbf{N}$.

PROPOSITION 13.—*Soit $\mu > 0$ fixé. Il existe $\lambda_1 > 0$ et $\rho : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$ tels que, si $\|v^\nu\|_{L^\infty} \leq \mu$:*

$$(i)\qquad \varepsilon\,|\,\nabla_x v^{\nu+1}\,|^2_{p,\lambda} + \lambda\,|\,v^{\nu+1}\,|^2_{p,\lambda} \leq \lambda_1\,\varepsilon^2\,\big(\,\lambda^{-1}\,|\,K\,|^2_{p,\lambda} + |\,v^\nu\,|_{p,\lambda}\,\|v^{\nu+1}\|_\infty\,|\,v^{\nu+1}\,|_{p,\lambda}\,\big), \quad si\ \lambda \geq \lambda_1,$$

$$(ii)\qquad \|v^{\nu+1}\|_\infty \leq \rho(\lambda)\,\big(\,|\,v^{\nu+1}\,|_{p,\lambda} + |\,\partial_n v^{\nu+1}\,|_{p,\lambda}\,\big).$$

Le point (ii) de ce cette Proposition est un plongement de type Sobolev qu'on obtient par exemple par prolongement à $\mathbf{R}^{n+1}$ puis transformation de Fourier, la présence de la fonction $\rho(\lambda)$ étant dûe à celle du poids $e^{-\lambda t}$ dans la norme $|\,.\,|_{p,\lambda}$. L'inégalité (i) résulte lorsque $p = 0$, de l'inégalité d'énergie qui s'écrit sous les hypothèses de la proposition :

$$\varepsilon\,|\,\nabla_x v^{\nu+1}\,|^2_{0,\lambda} + \lambda\,|\,v^{\nu+1}\,|^2_{0,\lambda} \leq c_o\,\varepsilon\,\langle K, v^{\nu+1}\rangle_{L^2_\lambda(\Omega_{T_1})},$$

où $\langle .,. \rangle_{L^2_\lambda(\Omega_{T_1})}$ désigne le produit scalaire dans $L^2_\lambda(\Omega_{T_1})$ muni de la mesure $e^{-\lambda t}dtdx$. Pour $p \geq 1$ on procède par récurrence sur p en dérivant le système et en contrôlant les commutateurs à l'aide en particulier d'intégration par parties et des propriétés d'algèbre de l'espace des distributions bornées-stratifiées ([RR]) : $\{u \in L^2(\Omega_{T_1})/Z^\alpha u \in L^2(\Omega_{T_1}), |\alpha| \leq p\} \bigcap L^\infty(\Omega_{T_1})$.

Fixons un réel $\mu > 0$ arbitraire, un $\lambda \geq \lambda_1$ (≥ 1) donné par la Proposition 12, notons $h := 2^{1/2} \sup_{0<\varepsilon\leq 1} \mid K \mid_{p,\lambda}$ puis choisissons $0 < \varepsilon_o < 1$ tel que $3h\lambda\rho(\lambda)\varepsilon_o < 1$ et $\varepsilon^{1/2}\rho(\lambda)2h \leq \mu$. Grâce à la Proposition 13 on montre par récurrence que :

LEMME 14.—*Les valeurs de $\lambda, \varepsilon_0, \mu, h$ étant ainsi choisies, la suite v^ν vérifie : $\|v^\nu\|_\infty \leq \mu$ et $\mid v^\nu \mid_{p,\lambda} \leq h$, pour tout entier ν et tout $\varepsilon \in]0, \varepsilon_o]$.*

Il résulte alors de ce Lemme et de l'inégalité (i) de la Proposition 13 que la suite v^ν est bornée dans $H^1(\Omega_{T_1})$. On peut donc en extraire une suite qui converge vers la solution cherchée R_ε du système (13), qui par passage à la limite vérifie les mêmes estimations (uniformes) que les v^ν du Lemme 14 et reste bornée dans $H^1(\Omega_{T_1})$ uniformément par rapport à ε. En particulier l'estimation (i) montre que $\mid R_\varepsilon \mid_{p,\lambda} = O(\varepsilon)$ et $\mid \partial_n R_\varepsilon \mid_{p,\lambda} = O(\varepsilon^{1/2})$. On estime ensuite les dérivées normales itérées par récurrence, grâce à l'équation.///

Références

[Ba]—C. BARDOS, *Problèmes aux limites pour les équations du premier ordre*, Ann. Sci. Ecol. Norm. Sup. 3, (1970), 185-233.

[BBB]—C.BARDOS, D. BRÉZIS, H. BRÉZIS, *Perturbations singulières et prolongements maximaux d'opérateurs positifs,* Arch. Rational Mech. Anal. 53, (1973), 69-100.

[BR]—C.BARDOS, J. RAUCH, *Maximal positive boundary value problems as limits of singular perturbation problems,* Trans. Amer. Math. Soc., 270, (1982), 377-408.

[Bé]—M. BÉZARD, *Problème aux limites pour le système de Vlasov-Maxwell,* exposé N.4, séminaire Equations aux Dérivées Partielles de l'Ecole Polytechnique, 1992-93, et preprint n.1029, Ecole Polytechnique, 1992.

[F]—K. O. FRIEDRICHS, *Symmetric positive systems of differential equations,* Comm. Pure Appl. Math.7, (1954), 345-392.

[G1]—O. GUÈS, *Article en préparation.*

[G2]—O. GUÈS, *Prolème mixte hyperbolique quasilinéaire caractéristique*, Comm. Part. Diff. Equa., 15 (5), (1990), 595-645.

[I]—A. M. IL'IN, *Matching of asymptotic expansions of solutions of boundary value problems*, Translations of Mathematical Monographs, vol 102, Amer. Math. Soc., Providence, R. I., 1992.

[JR]—J.-L. JOLY, J. RAUCH, *Justification of multidimensional single phase semilinear geometric optics*, Trans. Amer. Math. Soc. 330, (1992), 599-624.

[Ka]—T. KATO, *Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in* $\mathbf{R}^3$, J. Funct. Anal., 9, (1972),296-305.

[KL]—H-O.KREISS, J. LORENZ, *Initial boundary value problems and the Navier-Stokes equations*, Pure and Applied Mathematics, vol. 136, Academic Press, London, 1989.

[KM]—S. KLAINERMAN, A. MAJDA, *Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids*, Comm. Pure Appl. Math., 34 (1981), 481-524.

[Lev]—N. LEVINSON, *The first boundary value problem for* $\varepsilon\Delta u + A(x,y)u_x + B(x,y)u_y + C(x,y)u = D(x,y)$ *for small* ε, Ann. Math. 5, (1950), 428-445.

[L]—J-L. LIONS, *Perturbations singulières dans les problèmes aux limites et en contrôle optimal*, Lecture Notes in Math. , N. 323, Springer-Verlag, 1973.

[LP]—P. LAX, R. PHILIPS, *Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., 13, (1960), 427-455.

[LSU]—O. A. LADYZHENSKAYA, V. A. SOLONNIKOV, N. N. URAL'CEVA, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Moscou 1967, et Trans. Math. Monographs, vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1968.

[O]—O. OLEINIK, *Linear equations of second order*, Mat. Sb. 69, (1966), 111-140, et Amer. Math. Soc. Transl. Sries 2, 65, (1967), 167-200.

[R]—J. RAUCH, *Symmetric positive systems with boundary characteristic of constant multiplicity*, Trans. Amer. Math. Soc. 291, (1985), 167-185.

[RR]—J. RAUCH, M. REED, *Bounded, stratified, and striated solutions of hyperbolic systems*, Nonlinear Partial Differential Equations and their Applications, vol.9, Pitman Res. Notes in Math., 181, Longman Scientific and Technical, Harlow, (1988), 334-351.

[VL1]—M. I. VISHIK, L. A. LYUSTERNIK, *Asymptotic behavior of solutions of linear differential equations with large or quickly changing coefficients and boundary condition*, Russian Math. Surveys 4, (1960), 23-92.

[VL2]—M. I. VISHIK, L. A. LYUSTERNIK, *Regular degeneration and boundary layers for linear differential equations with small parameter*, Uspek. Math. Nauk. 12 (1957), 3-122, Amer. Math. Soc. Transl. (2) 20 (1962), 239-264.

GUÈS OLIVIER
IRMAR UA 305
Université de Rennes 1
35042 Rennes, cédex