Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

G. Lebeau

Équations des ondes amorties

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. nº 15, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994____A16_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

EQUATIONS DES ONDES AMORTIES

G. LEBEAU

Exposé n° XV

15 Février 1994

EQUATIONS DES ONDES AMORTIES

par

GILLES LEBEAU

Université de Paris-Sud

Département de Mathématiques, Bât. 425

91405 Orsay Cedex, FRANCE

1. – Introduction

On s'intéresse ici à un problème modèle de stabilisation pour l'équation des ondes. Soit (M, g) une variété C^∞ riemanienne compacte, connexe, à bord C^∞ ∂M, $\Delta = \Delta_g$ le laplacien sur M pour la métrique g, et $a(x) \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R}_+)$. Le problème d'évolution

$$(1) \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u = 0 & u|_{\mathbb{R}_t \times \partial M} \equiv 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H_0^1(M) & \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1 \in L^2(M) \end{cases}$$

possède une unique solution $u(t,x) \in C^0(\mathbb{R}_t, H_0^1) \cap C^1(\mathbb{R}_t, L^2)$, obtenue en appliquant par exemple le théorème de Hille-Yosida à l'opérateur non borné sur l'espace de Hilbert $H = H_0^1(M) \oplus L^2(M)$

$$(2) \qquad A_a = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \Delta & -2a \end{pmatrix} \qquad D(A_a) = (H_0^1 \cap H^2) \oplus H_0^1 .$$

On vérifie aisément que pour $\lambda \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\lambda \notin [-2||a||_{L^\infty}, 0]$, $(\lambda - A_a)$ est bijectif de $D(A_a)$ sur H. L'injection $D(A_a) \hookrightarrow H$ étant compacte, le spectre de A_a, noté $\operatorname{sp}(A_a)$ est constitué d'une suite λ_j de nombres complexes vérifiant $\operatorname{Re}\lambda_j \in [-2||a||_\infty, 0]$, $|\lambda_j| \to \infty$; la fonction a étant à valeurs réelles, le spectre $\operatorname{sp}(A_a)$ est invariant par conjugaison complexe. On notera E_{λ_j} le sous-espace caractéristique (de dimension finie) associé à la valeur spectrale λ_j.

Pour $u(t,x)$ solution de (1), l'énergie de u à l'instant t est définie par

$$(3) \qquad E(u,t) = \frac{1}{2}\int_M |u_t'|^2 + |\nabla_x u|^2$$

et vérifie

$$E(u,0) - E(u,t) = \int_0^t \int_M a(x) \left| \frac{\partial u}{\partial s}(s,x) \right|^2. \tag{4}$$

Rappelons alors qu'on a les résultats suivants.

Théorème 0. *On suppose $a(x)$ non identiquement nulle.*

i) Si $\partial M \neq \phi$, on a $\operatorname{Re} \lambda < 0$ pour $\lambda \in \operatorname{sp}(A_a)$; si $\partial M = \phi$, $\lambda = 0$ est la seule valeur spectrale à partie réelle nulle, associée aux solutions constantes de (1).

ii) Pour toutes données $(u_0, u_1) \in H_0^1 \oplus L^2$, la solution u de (1) vérifie $\lim_{t \to +\infty} E(u,t) = 0$.

iii) On suppose de plus que les géodésiques de $\overline{M}$ n'ont pas de contact d'ordre infini avec ∂M, et qu'il existe un temps $T_0 > 0$ tel que toute géodésique généralisée de M de longueur supérieure à T_0 rencontre l'ouvert $\{x, a(x) > 0\}$. Alors il existe $c_0, c_1 > 0$ tels que

$$\forall (u_0, u_1) \in H, \quad E(u,t) \leq c_0 e^{-c_1 t} E(u,0) \quad \forall t \geq 0. \tag{5}$$

(Les géodésiques généralisées sont les projections sur M des rayons C^∞ de Melrose-Sjöstrand, *voir [M-S].)*

Le point i) résulte du théorème d'unicité de Calderón pour les opérateurs réels elliptiques d'ordre deux. En effet, si $\lambda = i\omega \in \operatorname{sp}(A_a)$, ω réel il existe $f \not\equiv 0$ dans H_0^1 tel que $-\Delta f + 2a\lambda f + \lambda^2 f = 0$, donc $\omega \int a|f|^2 = 0$ et $\int |\nabla f|^2 - \omega^2 \int |f|^2 = 0$; si $\omega = 0$ on a donc $f = \mathrm{Cte}$; si $\omega \neq 0$, on a $\sqrt{a} f = 0$ dans $L^2(M)$, donc avec $U = \{a(x) > 0\}$ qui est ouvert et non vide, $f|_U \equiv 0$ et $-\Delta f + \lambda^2 f = 0$ d'où $f \equiv 0$, puisque M est supposé connexe.

Le point ii) résulte de i) très simplement car $\oplus E_{\lambda_j}$ est dense dans H, d'après [G-K].

Le point iii) a été prouvé d'abord dans le cas $\partial M = \phi$ par Rauch & Taylor [R-T], puis dans le cas général par Bardos, Lebeau, Rauch [B-L-R], la démonstration utilisant de façon essentielle le théorème de propagation de Melrose-Sjöstrand. De plus, il résulte de [B-L-R] que s'il existe une géodésique généralisée maximale de M qui ne rencontre jamais le support de a, alors on n'a pas décroissance exponentielle de l'énergie, i.e. (5) est faux.

Les résultats que nous décrivons ici apportent des précisions quantitatives au Théorème 0. Ils sont à paraître dans [L].

Pour ce qui concerne la possibilité pour le spectre de s'accumuler sur l'axe imaginaire, on a :

Théorème 1. *On suppose $a(x)$ non identiquement nulle.*

i) Il existe $C > 0$ telle que

$$\forall \lambda \in \mathrm{sp}(A_a) \setminus \{0\}, \qquad \operatorname{Re} \lambda < -\frac{1}{C} e^{-C|\operatorname{Im} \lambda|}. \tag{6}$$

Plus précisément, pour $\lambda = -\sigma + i\omega$, $\omega \in \mathbb{R}$, $|\omega| \geq 1$ et $0 \leq \sigma \leq \frac{1}{C} e^{-C|\omega|}$ on a

$$||(\lambda - A_a)^{-1}|| \leq C e^{C|\omega|} \tag{7}$$

(ici la norme de la résolvante est la norme d'opérateur borné sur H).

De plus, pour tout $k > 0$, il existe $C > 0$ tel que pour tout $(u_0, u_1) \in D(A^k)$ on ait

$$\forall t \geq 0, \qquad E(u,t)^{1/2} \leq C \frac{\log[3 + \log(3+t)]}{(\log[3+t])^k} ||(u_0, u_1)||_{D(A^k)}. \tag{8}$$

ii) Soit M la surface de révolution de $\mathbb{R}^3$ $M = \{(x,y,z), x = R(z)\cos\theta, y = R(z)\sin\theta, z \in [-1+1]\}$ où la fonction $[-1,1] \ni z \mapsto R(z) > 0$ vérifie $R(0) = 1$, $\dot{R}(0) = 0$, $\ddot{R}(0) < 0$, $\dot{R}(z) \neq 0$ pour $z \neq 0$; on munit M de la métrique induite par $\mathbb{R}^3$ et on suppose que la fonction $a \in C^\infty(\overline{M}; \mathbb{R}_+)$ ne dépend que de z et vérifie pour un $\alpha \in]0,1[$, $a(z) = 0$ pour $|z| \leq \alpha$, $a(z) > 0$ pour $|z| > \alpha$. Alors il existe une suite $\lambda_j = -\sigma_j + i\omega_j$ dans $\mathrm{sp}(A_a)$ avec $j \in \mathbb{N}$ assez grand telle que

$$\lim_{j \to +\infty} \frac{\omega_j}{j} = 1, \qquad \lim_{j \to \infty} \frac{\log \sigma_j}{j} = -2S_0 \tag{9}$$

avec $S_0 = \min(\delta(+\alpha), \delta(-\alpha))$, où δ est la distance d'Agmon définie par $\delta(0) = 0$, $\mathrm{sign}(\delta'(z)) = \mathrm{sign}(z)$, $(\delta')^2 = (1 + R'^2)(\frac{1}{R^2} - 1)$.

En particulier, le point ii) prouve que l'estimation (6) est optimale dans le cas général (donc a fortiori (7)). De même, ii) prouve que dans le cas général, pour des données appartenant au domaine de A^k, on ne peut espérer une décroissance de $E(u,t)^{1/2}$ meilleure que $[\log(3+t)]^{-k}$.

Le point i) est une conséquence de l'inégalité de Carleman comme dans le travail de ROBBIANO [R]; le point ii) s'obtient en écrivant le problème comme un problème spectral semi-classique où le petit paramètre h est l'inverse de la fréquence angulaire, et en analysant l'effet tunnel entre la géodésique périodique ($x = R(0)\cos\theta, y = R(0)\sin\theta, z = 0$) et le bord du support de a, dans l'esprit des travaux de HELFFER-SJÖSTRAND (voir [H-S] en particulier).

Le deuxième résultat que nous obtenons étend le résultat de COX-ZUAZUA (voir [C-Z]) sur le calcul du meilleur taux de décroissance exponentielle en dimension 1. Pour $R > 0$ soit

$$D(R) = \sup\left\{ \operatorname{Re}\lambda_j,\, \lambda_j \in \operatorname{sp}(A_a),\, |\lambda_j| \geq R \right\}. \tag{10}$$

C'est une fonction négative, décroissante de $R > 0$; on note $D(\infty) = \lim_{R\to\infty} D(R)$ et $D(0) = \lim_{R\to 0+} D(R)$. On suppose qu'il n'y a pas de contact d'ordre infini entre les géodésiques de $\overline{M}$ et le bord ∂M.

D'après les résultats de MELROSE-SJÖSTRAND (voir [M-S]) pour tout $\rho_0 = (x_0, u_0) \in T\overline{M}$, avec $|u_0| = 1$ (et u_0 appartenant au demi-espace fermé défini par $\overline{M}$ si $x_0 \in \partial M$) il existe une unique géodésique généralisée $s \mapsto x(s,\rho_0)$ de $\overline{M}$ issue de ρ_0, i.e. vérifiant $x(0,\rho_0) = x_0$, $\lim_{s\to 0+} \frac{x(s,\rho_0)-x_0}{s} = u_0$, parcourue à vitesse 1. Pour $t > 0$, on pose

$$C(t) = \inf_{\rho_0} \frac{1}{t}\int_0^t a(x(s,\rho_0))\, ds. \tag{11}$$

C'est une fonction positive de t, majorée par $||a||_{L^\infty}$, qui vérifie $tC(t) + sC(s) \leq (t+s)C(t+s)$. On note $C(\infty) = \lim_{t\to\infty} C(t)$ (qui existe, $tC(t)$ étant sous-additive). On a $C(t) \leq C(\infty)$ pour tout t.

Soit enfin α le meilleur taux de décroissance exponentielle défini par

$$\alpha = \sup\Big\{\beta \geq 0, \exists B, \forall u \in H, \forall t \geq 0, E(u,t) \leq B\, e^{-\beta t} E(u,0)\Big\}. \tag{12}$$

(Ici l'espace $H = H_0^1 \oplus L^2$ des données de Cauchy est identifié aux solutions de (1)). Alors on a le résultat suivant. (Dans le cas $\partial M = \phi$, le point i) a été prouvé par RAUCH & TAYLOR [R-T].)

Théorème 2.

i) $\alpha = 2\min\{-D(0), C(\infty)\}$.

ii) $C(\infty) \leq -D(\infty)$.

iii) Soit M la surface de révolution de $\mathbb{R}^3$, $M = \{(x,y,z); x = R(z)\cos\theta, y = R(z)\sin\theta, z \in [-3\pi, 3\pi]\}$ avec $R(z) = 2 - \cos z$. On suppose que la fonction $a \in C^\infty(\overline{M}; \mathbb{R}_+)$ ne dépend que de z et vérifie $a(z) = 0$ pour $|z| \leq \frac{\pi}{2}$, $a(z) > 0$ pour $|z| > \frac{\pi}{2}$. Alors on a $\alpha = 0$ et $D(0) < 0$.

Le point essentiel pour prouver i) et ii) est l'obtention d'une inégalité d'énergie à haute fréquence (voir paragraphe 3). Pour cela, nous avons choisi d'obtenir cette inégalité comme conséquence d'un théorème de propagation au bord pour les mesures de défauts (ou H-mesures) de P. GÉRARD ET L. TARTAR (voir paragraphe 2). L'exemple étudié dans le point iii) montre que le spectre du générateur infinitésimal A peut ne pas contrôler le taux de décroissance de l'énergie. Cet exemple utilise une trajectoire hyperbolique non contrôlée (le cercle $M \cap z = 0$), dont les variétés stables et instables sont connectées à des trajectoires hyperboliques contrôlées.

2. – Propagation au bord de la mesure de défaut

L'objet de ce paragraphe est de montrer comment on peut associer une mesure à une suite u^ε de solutions de

$$(1) \qquad (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u^\varepsilon = 0, \quad u^\varepsilon|_{\mathbb{R}_t \times \partial M} = 0, \quad (u^\varepsilon|_{t=0}, \partial_t u^\varepsilon|_{t=0}) \in H_0^1 \oplus L^2$$

convergeant faiblement vers zéro, et de prouver l'énoncé de propagation naturel de cette mesure.

On pourra consulter [G-L] pour une approche différente des mesures de défaut pour les problèmes aux limites de type Dirichlet. Nous renvoyons le lecteur aux articles originaux [G], [T] de P. GÉRARD et L. TARTAR pour une exposition de la théorie des $H-$mesures, ou mesures de défauts microlocales.

2.1. – Géométrie et construction de la mesure

Tout d'abord, près de ∂M, on choisit le système de coordonnées géodésique normal : $(x', x_n) \in \partial M \times [0, r_0] \longrightarrow x \in M$, $x_n = \operatorname{dist}(x, \partial M) = \operatorname{dist}(x, x')$ où $r_0 > 0$ est assez petit. Dans ce système, le symbole principal de $-\Delta$ est $\xi_n^2 + R(x_n, x', \xi')$, et $R_0(x', \xi') = R|_{x_n=0}$ est la forme métrique sur $T^*\partial M$.

On note $\mathcal{A}$ l'espace des opérateurs Q de la forme $Q = Q_i + Q_\partial$ où Q_i est un opérateur pseudo-différentiel classique sur $\mathbb{R}_t \times \overset{\circ}{M}$, à support compact dans $\mathbb{R}_t \times \overset{\circ}{M}$ (i.e. vérifiant

$Q_i = \varphi Q_i \varphi$ pour un $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_t \times \overset{\circ}{M}))$, et où Q_∂ est un opérateur pseudo-différentiel tangentiel à support compact près de $\mathbb{R}_t \times \partial M$ (i.e. $Q_\partial(f)(t, x', x_n) = Q_\partial(x_n)(f)(\cdot, x_n)$, où $Q_\partial(x_n)$ est une famille C^∞ en x_n d'opérateurs pseudo-différentiels sur $\mathbb{R}_t \times \partial M$ et $Q_\partial = \psi Q_\partial \psi$ pour un $\psi(t, x_n) \in C_0^\infty(\mathbb{R}\times]-r_0, +r_0[))$. On notera $\mathcal{A}^{(s)}$ les éléments de $\mathcal{A}$ qui sont des opérateurs de degré s, c'est-à-dire tels que Q_i et Q_∂ soient de degré s.

Soit $X = \mathbb{R}_t \times \overline{M}$, ${}^bTX$ le fibré de rang $\dim X$ dont les sections sont les champs de vecteurs tangents à $\mathbb{R}_t \times \partial M$, ${}^bT^*X$ son fibré dual (le fibré cotangent compressé de Melrose) et $j : T^*X \to^b T^*X$ l'application canonique. Près de ∂X, ${}^bTX$ est engendré par les champs ∂_t, ∂'_x, $x_n \partial_{x_n}$ et j est définie par

$$j(t, x', x_n; \tau, \xi', \xi_n) = (t, x', x_n; \tau, \xi', v = x_n \xi_n). \tag{2}$$

On note $P = \partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t$, $p = |\xi|^2 - \tau^2$ son symbole principal, $\operatorname{Car} P = p^{-1}(0)$ sa variété caractéristique. On pose

$$Z = j(\operatorname{Car} P), \quad \hat{Z} = Z \cup j(T^*X|_{x_n=0}). \tag{3}$$

On a $Z|_{x_n=0} = \{(t, x', 0; \tau, \xi', v = 0); |\xi'| \leq |\tau|\}$ et $\hat{Z}|_{x_n=0} = \{(t, x', 0; \tau, \xi', v = 0)\} = T^*(\mathbb{R}_t \times \partial M) = Z|_{x_n=0} \cup \mathcal{E}$ où $\mathcal{E}$ est la région elliptique du bord. Comme pour $x_n \in [0, r_0]$, on a $p = \xi_n^2 + R(x_n, x', \xi') - \tau^2$, $R \geq 0$, on a

$$(t, x', x_n; \tau, \xi', v) \in \hat{Z}, \quad x_n \in [0, r_0] \Longrightarrow |v| \leq x_n |\tau|. \tag{4}$$

Il en résulte que $\hat{Z}$ et Z sont fermés dans ${}^bT^*X$, coniques. On notera $S\hat{Z}$, SZ les espaces quotients sphériques

$$S\hat{Z} = (\hat{Z} \setminus X)/\mathbb{R}_+^*, \quad SZ = (Z \setminus X)/\mathbb{R}_+^* \tag{5}$$

qui sont des espaces métriques localement compacts.

Pour $Q \in \mathcal{A}^0$, soit $q = \sigma(Q)$ son symbole principal et

$$\begin{cases} \kappa(q) \in C^0(S\hat{Z}) \text{ définie par : pour } \rho \in \hat{Z} \setminus X \\ \kappa(q)(\rho) = q(j^{-1}(\rho)). \end{cases} \tag{6}$$

Alors $\kappa(q)$ est bien défini ; en effet $q(t, x, \tau, \xi)$ est homogène de degré zéro en (τ, ξ), et pour $\operatorname{dist}(x, \partial M) \leq \varepsilon$, pour un $\varepsilon > 0$ petit, est indépendante de ξ_n, donc pour x près de ∂M

$$\kappa(q)(t, x', x_n, \tau, \xi', v) = q\Big(t, x', x_n, \tau, \xi', \frac{v}{x_n}\Big) = q(t, x', x_n; \tau, \xi') \tag{7}$$

de sorte que $\kappa(q)$ est indépendant de v pour x près de ∂M. D'après (4) on a

$$\{\kappa(q),\, q = \sigma(A),\, A \in \mathcal{A}^0\} \text{ est localement dense dans } C^0(S\hat{Z}) \tag{8}$$

où $C^0(S\hat{Z})$ est munit de la topologie de la convergence uniforme sur tout compact.

Soit I un intervalle ouvert borné de $\mathbb{R}$ et $u(t,x) \in H^1(I \times M)$ solution de $Pu = 0$; près du bord, on a localement $u \in C^k(x_n \geq 0; H^{\frac{1}{2}-k}_{t,x'})$ pour tout entier k. Si $Q \in \mathcal{A}^0_I$ (i.e. vérifie $Q = \varphi(t)Q\varphi(t)$ pour un $\varphi \in C_0^\infty(I)$), Q est borné sur $L^2(I \times M)$, sur $H^1(I \times M)$ et les commutateurs $[\nabla_x, Q]$, $[\partial_t, Q]$ appartiennent à $\mathcal{A}^0_I$. On pose

$$\phi(Q,u) = (Qu|u)_{H^1} = (\nabla_x Qu, \nabla_x u)_{L^2} + (\partial_t Qu, \partial_t u)_{L^2} + (Qu|u)_{L^2}. \tag{9}$$

On a par intégration par parties

$$\phi(Q,u) = \int_{\mathbb{R}_t \times \partial M} Qu\, \partial_n \overline{u} + 2(\partial_t Qu, \partial_t u)_{L^2} - 2(Qu, a(x)\partial_t u)_{L^2} + (Qu|u)_{L^2}. \tag{10}$$

Soit à présent u^k une suite bornée dans $H^1(I \times M)$ de solutions de $Pu^k = 0$, convergeant faiblement vers zéro. Alors $u^k|_{x_n=0}$ (resp. $\partial_n u^k|_{x_n=0}$) est borné dans $H^{1/2}_{\mathrm{loc}}(I \times \partial M)$ (resp. $H^{-1/2}_{\mathrm{loc}}(I \times \partial M)$) de limite faible nulle. En particulier il résulte de (10) qu'on a

$$Q \in \mathcal{A}^{-1}_I \Longrightarrow \lim_{k\to\infty} \phi(Q, u^k) = 0. \tag{11}$$

Soit $\chi(x_n) \in C_0^\infty(|x_n| < \varepsilon)$, $0 \leq \chi \leq 1$, $\chi \equiv 1$ près de $x_n = 0$ et $E = E_i$ un o.p.d. intérieur de degré zéro, $0 \leq \sigma(E) \leq 1$ à support près de $\mathrm{Car}\, P$, égal à l'identité au voisinage de $\mathrm{Car}\, P \cap \mathrm{support}\,(1-\chi)$. D'après la théorie elliptique intérieure on a pour tout $\varphi(t) \in C_0^\infty(I)$

$$(1-\chi)(\mathrm{Id} - E)\varphi u^k \longrightarrow 0 \qquad H^1 \text{ fort}. \tag{12}$$

Si $Q = Q_i + Q_\partial \in \mathcal{A}^0_I$, en choisissant ε assez petit on aura $\chi Q_i \equiv 0$ et on écrira $Q = \chi Q + (1-\chi)Q = \chi Q_\partial + (1-\chi)QE + (1-\chi)Q(\mathrm{Id}-E)$; alors χQ_δ est un o.p.d. tangentiel, $(1-\chi)QE$ un o.p.d. intérieur et $(1-\chi)Q(\mathrm{Id}-E)\varphi u_k \to 0$ dans H^1 fort pour tout $\varphi \in C_0^\infty(I)$. En utilisant cette remarque on obtient pour $M \geq 0$

$$\forall Q \in \mathcal{A}^0_I, \quad \sigma(Q) \geq -M \Longrightarrow \liminf_{k\to\infty} \phi(Q,u^k) \geq -M \limsup_{k\to\infty} ||u^k||^2_{H^1}. \tag{13}$$

En effet, $\sigma(Q) \geq -M$ implique $\sigma(\chi Q_\partial) = \sigma(\chi Q) \geq -M$ et $\sigma((1-\chi)QE) = (1-\chi)\sigma(E)\sigma(Q) \geq -M$, et il suffit donc de traiter indépendamment les cas $Q = Q_i$, $Q = Q_\partial$. Par exemple dans le cas $Q = Q_\partial$, il existe $\varphi \in C_0^\infty(I)$ telle que $\alpha_k = (\nabla_x Q_\partial u^k | \nabla_x u^k)_{L^2} = (Q_\partial \nabla_x \varphi u_k | \nabla_x \varphi u_k)_{L^2} + \beta_k$, $\beta_k = ([\nabla_x, Q_\partial]u^k, \nabla_x u^k)_{L^2} \to 0$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe B_∂ de degré 0, C_∂ de degré -1, o.p.d. tangentiels tels que $Q_\partial + (M+\varepsilon)\mathrm{Id} = B_\partial^* B_\partial + C_\partial$; comme $C_\partial \nabla_x \varphi u_k \to 0$ dans L^2 fort, car φu_k est borné près du bord dans $C^1(x_n \geq 0, H_{t,x'}^{-1/2})$, on a $\liminf \alpha_k \geq -(M+\varepsilon)\limsup \|\nabla_x \varphi u_k\|_{L^2}^2$; le terme $(\partial_t Q_\partial u^k, \partial_t u^k)$ se traite de même, car $\limsup \|\partial_t \varphi u_k\|_{L^2}^2 \leq \limsup \|u_k\|_{H^1}^2$, d'où (13).

On a aussi

$$(14) \qquad Q \in \mathcal{A}_I^0, \quad \sigma(Q)|_{\mathrm{Car}\,P} = 0 \ \text{ et } \ \sigma(Q)|_{x_n \leq \varepsilon} = 0 (\varepsilon > 0) \Longrightarrow \lim_k \phi(Q, u^k) = 0.$$

En effet si $Q = Q_i + Q_\partial$, avec $\chi(x_n) \in C_0^\infty(|x_n| < \varepsilon)$ on aura $\sigma(\chi Q) = 0$ et (14) est conséquence de (12) puisque $\sigma((1-\chi)QE)|_{\mathrm{Car}\,P} = 0$ entraîne qu'il existe un o.p.d. intérieur B de degré -2, C de degré -1 tels que $(1-\chi)QE = BP + C$.

Soit $\sigma(\mathcal{A}^0) = \{q = \sigma(Q), Q \in \mathcal{A}^0\}$; c'est un sous-espace vectoriel de l'espace des fonctions C^0 homogènes de degré zéro sur $T^*X \setminus X$, munit de la norme L^∞, et $\sigma(\mathcal{A}^0)$ possède une partie dense dénombrable. D'après (13), quitte à extraire une sous-suite de la suite u^k, il existe une forme linéaire $\tilde{\phi}$ sur $\sigma(\mathcal{A}^0)$ telle que

$$(15) \qquad \forall Q \in \mathcal{A}_I^0, \qquad \lim_k \phi(Q, u^k) = \tilde{\phi}(\sigma(Q)$$

et par (13), on a $|\tilde{\phi}(q)| \leq |q|_{L^\infty} \limsup \|u^k\|_{H^1}^2$, et $\tilde{\phi}(q) = 0$ si $q = \sigma(Q)$ où Q vérifie (14), donc $\tilde{\phi}(q) = 0$ si $\kappa(q) \equiv 0$. D'après (8) et le théorème de représentation de Riesz, il existe une mesure de Radon μ sur $S\tilde{Z}$ telle que

$$(16) \qquad \forall Q \in \mathcal{A}_I^0, \qquad \lim_k \phi(Q, u^k) = \int \kappa(\sigma(Q))\, d\mu$$

et μ est positive d'après (13). De même il existe une mesure positive μ_{cin} sur $S\hat{Z}$, quitte à réextraire une sous-suite, telle que

$$(17) \qquad \forall Q \in \mathcal{A}_I^0, \qquad \lim_k (\partial_t Q u, \partial_t u)_{L^2} = \int \kappa(\sigma(Q))\, d\mu_{\mathrm{cin}}$$

et une mesure μ_∂ sur $S(T^*\partial X)$ telle que

$$(18) \qquad \forall Q \in \mathcal{A}_I^0, \qquad \lim_k \int_{\partial X} Q u^k \partial_n \overline{u}^k = \int \sigma(Q)|_{x_n=0}\, d\mu_\partial .$$

Ces mesures sont bien définies sur la restriction des espaces précédents à $t \in I$, et on a d'après (10)

$$\mu = \mu_\partial + 2\mu_{\mathrm{cin}} \tag{19}$$

où μ_∂ est considérée comme mesure sur $S\hat{Z}$ via l'injection $S(T^*\partial X) \hookrightarrow S\hat{Z}$.

Si la suite u^k vérifie de plus la condition de Dirichlet $u^k|_{\partial X} \equiv 0$ alors $\mu_\partial \equiv 0$ trivialement, et si $Q = Q_\partial \in \mathcal{A}_I^0$ est à support près de $x_n = 0$, $(t, x', \tau, \xi') \in \mathcal{E}$, on a Qu^k borné dans $C^\infty(\overline{X})$ donc $\lim \phi(Q, u^k) = 0$, de sorte que les mesures μ et μ_{cin} sont portées par SZ.

Remarque. La construction précédente dépend a priori du choix que nous avons fait d'une variable normale près du bord, qui permet de définir les opérateurs tangentiels. Une approche plus générale consiste à travailler avec les opérateurs totalement caractéristiques de Melrose. Nous n'aurons toutefois pas à utiliser le caractère intrinsèque des mesures précédentes.

2.2. – Le théorème de propagation au bord

On suppose qu'il n'y a pas de contact d'ordre infini entre les géodésiques de $\overline{M}$ et le bord ∂M.

L'espace SZ a deux composantes connexes, définies par $\pm\tau > 0$. Sans restreindre la généralité, on travaillera ici sur $SZ \cap (\tau > 0)$ qu'on identifie à $(Z \setminus X) \cap \left(\tau = -\frac{1}{2}\right)$, qu'on note $(SZ)^+$. On note $G(s)$ le flot bicaractéristique généralisé de Melrose-Sjöstrand restreint à $(Z \setminus X) \cap \left(\tau = -\frac{1}{2}\right)$ associé à P de symbole principal $|\xi|^2 - \tau^2$, de sorte que si $\rho \in (SZ)^+$, $t[G(s)(\rho)] = s + t(\rho)$ pour tout s. On note (t, x, ξ) les points de $(SZ)^+$; si $x \notin \partial M$, on a $(x, \xi) \in T^*M$, $|\xi| = \frac{1}{2}$ et si $x \in \partial M$, $(x, \xi) \in T^*\partial M$ et $|\xi| \leq \frac{1}{2}$. On notera alors par abus

$$G(s)(t, x, \xi) = (t + s, G(s)(x, \xi)) \tag{20}$$

ce qui permet de considérer $G(s)$ comme le flot géodésique généralisé sur $T^*\overline{M} \cap |\xi| = \frac{1}{2}$, parcouru à vitesse 1.

On peut considérer la fonction d'amortissement $a(x)$ comme fonction sur SZ via la projection $\pi : SZ \to \mathbb{R}_t \times M$. On travaille ici avec $a \in C^\infty(\overline{M}, \mathbb{R})$, c'est-à-dire sans condition de signe sur a.

Soit alors $u^k(t,x)$ une suite de solutions de

$$\text{(21)} \qquad \begin{cases} (\partial_t^2 - \Delta + 2a(x)\partial_t)u^k = 0\,, \quad u^k|_{\mathbb{R}_t\times\partial M} = 0 \\ \left(u^k|_{t=0}, \partial_t u^k|_{t=0}\right) \text{ borné dans } H_0^1 \oplus L^2 \end{cases}$$

de limite faible nulle, $\mu = 2\mu_{\text{cin}}$ les mesures associées sur (SZ), $\mu^+ = 2\mu^+_{\text{cin}}$ leurs restrictions à $(SZ)^+$.

Théorème. *Pour tout $s \in \mathbb{R}$ on a*

$$\text{(22)} \qquad G(s)^*(\mu^+) = \exp - \int_0^s 2a(G(\sigma)(\rho))\,d\sigma\,\mu^+\,.$$

En d'autres termes, pour tout borélien B de $(SZ)^+$, on a $\mu^+(G(s)(B)) = \int_B H(s,\rho)d\mu^+$ avec $H(s,\rho) = \exp - \int_0^s 2a(G(\sigma)\rho)\,d\sigma$.

3. – Preuve des points i) et ii) du théorème 2

Commençons d'abord par vérifier $\alpha \le 2\min\{-D(0), C(\infty)\}$. Pour tout $\lambda_j \in \mathrm{Sp}(A_a)\setminus\{0\}$, il existe $\underline{u} = (u_0,u_1) \in E_{\lambda_j}$ tel que $A_a\underline{u} = \lambda_j\underline{u}$ et $u(t,x) = e^{t\lambda_j}\,u_0(x)$ vérifie l'équation du paragraphe 1 (1), et $E(u,t) = e^{2t\,\mathrm{Re}\,\lambda_j}\,E(u,0)$. Comme $E(u,0) = \frac{1}{2}\int_M |\lambda_j|^2|u_0(x)|^2 + |\nabla_x u_0|^2$ est non nul, on a $\alpha \le -2\,\mathrm{Re}\,\lambda_j$, donc $\alpha \le -2D(0)$. Supposons qu'on ait $\alpha = 2C(\infty) + 4\eta$ pour un $\eta > 0$; il existe alors $B > 0$ tel que pour tout $u \in H$ et tout $t \ge 0$ on ait

$$\text{(1)} \qquad E(u,t) \le B\,e^{-(\alpha-\eta)\,t}\,E(u,0)\,.$$

Fixons t tel que $B\,e^{-(\alpha-\eta)\,t} < e^{-(\alpha-2\eta)\,t}$; on a $C(t) \le C(\infty) = \frac{\alpha}{2} - 2\eta$ et il existe donc un $\rho_0 \in T\overline{M}$ tel que $\frac{1}{t}\int_0^t a(x(s,\rho_0))ds < \frac{\alpha}{2} - \eta$. Quitte à perturber un peu ρ_0, on peut supposer que la géodésique généralisée γ isssue de ρ_0 n'a que des points d'intersection transverses ave ∂M sur l'intervalle de temps $[-2t, +2t]$. Par une construction d'optique géométrique standard près de γ, on peut alors construire u solution du paragraphe 1 (1) telle que $E(u,0) = 1$ et $E(u,t) > e^{-(\alpha-2\eta)\,t}$ ce qui contredit (1), donc on a $\alpha \le 2C(\infty)$.

Pour vérifier $\alpha \ge 2\min\{-D(0), C(\infty)\}$, on commence par prouver le :

Lemme 1. *Pour tout $T > 0$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $C(\varepsilon, T)$ tel que pour toute solution de l'équation d'évolution du paragraphe 1 (1) on ait*

$$\text{(2)} \qquad E(u,T) \le (1+\varepsilon)\,e^{-2TC(T)}\,E(u,0) + C(\varepsilon,T)||u_0,u_1||^2_{L^2\oplus H^{-1}}\,.$$

PREUVE. C'est une conséquence du théorème sur la propagation de la mesure de défaut au bord. En effet, si (2) est faux, pour tout $k \geq 1$, il existe u^k vérifiant

$$(3) \quad E(u^k,T) \geq (1+\varepsilon)e^{-2TC(T)}E(u^k,0) + k\|u_0^k, u_1^k\|^2_{L^2\oplus H^{-1}} \quad \text{et} \quad E(u^k,0)=1 .$$

Alors u^k est bornée dans $H^1(I\times M)$, $I=[-2T,+2T]$, et converge faiblement vers zéro car $\|u_0^k, u_1^k\|^2_{L^2\oplus H^{-1}} \leq \frac{1}{k}E(u^k,T) \leq \frac{1}{k}E(u^k,0) = \frac{1}{k}$. Soit μ la mesure positive sur SZ associée à une suite extraite de la suite u^k. Soit $\eta \in]0,T[$. Comme l'énergie est une fonction décroissante du temps, pour tout $\varphi \in C_0^\infty(]0,\eta[)$, on a par (3)

$$(4) \qquad \int_{T-\eta}^{T} \varphi(T-t)E(u^k,t)\,dt \geq (1+\varepsilon)e^{-2TC(T)} \int_0^\eta \varphi(t)E(u^k,t)\,dt$$

d'où

$$(5) \qquad \mu\big((SZ)\cap t\in]T-\eta,T[\big) \geq (1+\varepsilon)e^{-2TC(T)}\mu\big((SZ)\cap t\in]0,\eta[\big).$$

Or d'après le théorème de propagation de la mesure de défaut on a

$$(6) \qquad \mu\big((SZ)\cap t\in]T-\eta,T[\big) \leq e^{-2(T-\eta)C(T-\eta)}\mu\big((SZ)\cap t\in]0,\eta[\big).$$

Or $\mu((SZ)\cap t\in]0,\eta[) > 0$ (sinon $u^k \to 0$ dans $H^1(]0,\eta[\times M)$ donc $u^k \to 0$ dans $H^1(J\times M)$ pour tout J ce qui contredit $E(u^k,0)=1$). Comme $C(t)$, définie au paragraphe 1 (10) comme infimum sur un compact d'une fonction continue est continue en $t>0$, (6) contredit (5) pour η petit, d'où le lemme.

$\diamondsuit$

Soit A_a^* l'adjoint de A_a ; on a $-A_a^* = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{Id} \\ \Delta & +2a \end{pmatrix}$ et le spectre de A_a^* est le conjugué du spectre de A_a. On note $E^*_{\overline{\lambda_j}}$ le sous-espace caractéristique de A_a^* associé à la valeur spectrale $\overline{\lambda_j}$. Soit $H = H_0^1 \oplus L^2$ et pour $N \geq 1$

$$(7) \qquad H_N = \Big\{x\in H,\, (x|y)_H = 0,\ \forall y \in \bigoplus_{|\lambda_j|\leq N} E^*_{\overline{\lambda_j}}\Big\}.$$

Alors H_N est invariant par e^{tA_a} $\Big($si $x\in H_N$, $\{y_\ell\}$ une base de l'espace vectoriel de dimension finie $\underset{|\lambda_j|\leq N}{\oplus} E^*_{\overline{\lambda_j}} \subset D(A_a^*)$ on a $\frac{d}{dt}(e^{tA}x|y_\ell) = (e^{tA}x|A_a^* y_\ell) = \sum c_{\ell,k}(e^{tA}x|y_k)$ donc $(e^{tA}x|y_\ell)\equiv 0\Big)$. Soit $H' = L^2\oplus H^{-1}$ et θ_N la norme de l'injection de H_N dans H'. On a $\lim_{N\to+\infty}\theta_N = 0$. $\Big($Sinon il existe une suite $u_N \in H_N$, $\|u_N\|_H = 1$ et $\|u_N\|_{H'} \geq \theta > 0$.

On peut supposer que u_N converge faiblement vers u dans H, et fortement vers u dans H'; On a $||u||_{H'} \geq \theta > 0$ et $(u|y)_H = 0, \forall y \in E^*_{\lambda_j}, \forall j$. Or ceci contredit le fait que la famille des $E^*_{\lambda_j}$ est totale dans H, puisque $-A^*_a$ est une perturbation compacte de l'opérateur anti-adjoint A_0 (voir [G-K])$\Big)$.

On peut supposer $2\min\{-D(0), C(\infty)\} > 0$, sinon il n'y a rien a démontrer. Soit $\eta > 0$ petit et β défini par $\beta + \eta = 2\min\{-D(0), C(\infty)\}$. Choisissons T tel que $4|C(\infty) - C(T)| < \eta$, $2\log 3 < \eta T$ puis N tel que $C(1,T)\theta_N^2 \leq e^{-2TC(T)}$. D'après le lemme 1, on a, en identifiant $u \in H$ à la solution du paragraphe 1 (1) de données u à $t = 0$

$$(8) \qquad \forall u \in H_N\,, \qquad E(u,T) \leq 3\,e^{-2T\,C(T)}\,E(u,0)$$

donc H_N étant stable par l'évolution

$$(9) \qquad \forall u \in H_N\,, \quad \forall k \quad E(u,kT) \leq e^{-kT\left[2C(T) - \frac{\log 3}{T}\right]}\,E(u,0) \leq e^{-kT\cdot\beta}\,E(u,0)$$

donc puisque l'énergie décroît

$$(10) \qquad \forall u \in H_N\,, \quad \forall t \geq 0\,, \quad E(u,t) \leq B\,e^{-\beta t}\,E(u,0)\,, \quad B = e^{T\beta}\,.$$

Soit γ un contour entourant $\{\lambda_j; |\lambda_j| \leq N\}$ dans le sens direct et $\Pi = \frac{1}{2i\pi}\int_\gamma \frac{d\lambda}{\lambda - A_a}$ le projecteur spectral sur $\bigoplus_{|\lambda_j| \leq N} E_{\lambda_j} = W_N$; alors Π^* est le projecteur spectral de A^*_a sur $\bigoplus_{|\lambda_j| \leq N} E^*_{\lambda_j}$ donc pour tout $u \in H$, on a

$$(11) \qquad u = v + w\,, \quad v = \Pi u \in W_N\,, \quad w = (1 - \Pi)u \in H_N\,.$$

Comme W_N est de dimension finie, et $\beta \leq -2D(0)$, on a

$$(12) \qquad \exists C\,, \quad \forall u \in W_N\,, \quad \forall t \geq 0\,, \quad E(u,t) \leq C\,e^{-\beta t}\,E(u,0)\,.$$

Enfin la décomposition (11) étant continue, il existe C_0 tel que $E(v,0) + E(w,0) \leq C_0\,E(u,0)$ et par suite (10), (11) et (12) impliquent $\alpha \geq \beta$, ce qui achève de prouver le point i). Le point ii) résulte de $E_{\lambda_j} \subset H_N$ dès que $|\lambda_j| > N$ (puisque le projecteur Π précédent s'annule alors sur E_{λ_j}), d'où d'après (10), si $C(\infty) > 0$ et $\beta < 2C(\infty)$, pour N grand

$$|\lambda_j| > N \Rightarrow 2\,\mathrm{Re}\,\lambda_j \leq -\beta \tag{13}$$

donc $D(\infty) \leq -C(\infty)$ d'où le point ii) (puisque $D(\infty) \leq 0$ traite le cas $C(\infty) = 0$).

Bibliographie

[B-L-R] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control and Optimization, vol. 30, n° 5, (1992), p. 1024-1065.

[C-Z] S. COX, E. ZUAZUA : *The rate at which the energy decays in a dumped string,* à paraître à C.P.D.E., et *Estimations sur le taux de décroissance exponentielle de l'énergie dans des équations d'ondes,* Note C.R.A.S., Paris, **317** (1993), p. 249-254.

[G] P. GÉRARD : *Microlocal defect measures,* C.P.D.E. **16** (1991), p. 1761-1794.

[G-L] P. GÉRARD, E. LEICHTNAM : *Ergodic properties of eigenfunctions for the Dirichlet problem,* Duke Math. Journal, vol. 71, (1993), p. 559-607.

[G-K] I.C. GOHBERG, M.G. KREIN : *Introduction to the Theory of Linear non Self adjoint Operators,* Translations of Mathematical Monograph, vol. 18, Amer. Math. Soc. 1969.

[H-S] B. HELFFER, J. SJÖSTRAND : *Multiple wells in the semi classical limit I,* C.P.D.E. **9** (4) (1984), p. 337-408.

[L] G. LEBEAU : *Equation des ondes amorties,* à paraître dans les actes de l'école "Geometric Methods in Mathematical Physics", Math. Physics Studies Book Series, (Kluwers).

[M-S] R. MELROSE, J. SJÖSTRAND : *Singularities of boundary value problems I,* CPAM **31** (1978), p. 593-617, *II,* CPAM **35** (1982), p. 129-168.

[R] L. ROBBIANO : *Fonctions de coût et contrôle des solutions des équations hyperboliques,* à paraître dans Asymptotic Analysis.

[R-T] J. RAUCH, M. TAYLOR : *Decay of Solutions to Nondissipative Hyperbolic Systems on Compact Manifolds,* CPAM **28** (1975), p. 501-523.

[T] L. TARTAR : *H−measures : a new approach for studying homogenization, oscillations and concentration effects in partial differential equations,* Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A **115** (1993), p. 193-230.