

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

G. VODEV

P. STEFANOV

Distribution des résonances pour le système de l'élasticité

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1993-1994), exp. n° 10,
p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1993-1994___A11_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1993-1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Tél. 601.596 F

Séminaire 1993-1994

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DISTRIBUTION DES RESONANCES POUR LE SYSTEME DE L'ELASTICITE.

G. VODEV & P. STEFANOV

Distribution des résonances pour le système de l'élasticité

Georgi Vodev

(en collaboration avec Plamen Stefanov)

Département de Mathématiques

Université de Nantes

15 Février 1994

1 Introduction

Dans cet exposé, je vais présenter des résultats obtenus en collaboration avec P. Stefanov ([SV1],[SV2]). Nous nous intéressons à la distribution des résonances pour le système de l'élasticité à l'extérieur d'un obstacle strictement convexe avec des conditions de Neumann sur le bord. Soit \mathcal{O} un obstacle strictement convexe dans \mathbf{R}^3 à bord Γ de classe C^∞ et soit $\Omega = \mathbf{R}^3 \setminus \mathcal{O}$ son complémentaire. Je vais noter par Δ^* l'opérateur de l'élasticité qui est un opérateur de deuxième degré à valeurs matricielles de la forme suivante

$$\Delta^* v = \mu_0 \Delta v + (\lambda_0 + \mu_0) \nabla(\nabla \cdot v),$$

$v = {}^t(v_1, v_2, v_3)$, où λ_0, μ_0 sont des constantes appelées les constantes de Lamé qui vérifient les conditions suivantes

$$\mu_0 > 0, \quad 3\lambda_0 + 2\mu_0 > 0. \quad (1)$$

Les conditions de Neumann pour Δ^* sont de la forme

$$(Bv)_i = \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij}(v) \nu_j|_{\Gamma} = 0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (2)$$

où $\sigma_{ij}(v) = \lambda_0 \nabla \cdot v \delta_{ij} + \mu_0 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, ν est la normal à Γ . Il est bien connu que l'opérateur $-\Delta^*$ opérant sur les fonctions $v \in C_{\text{comp}}^\infty(\bar{\Omega}; \mathbf{C}^3)$ vérifiantes (2) admet une réalisation autoadjointe dans $L^2(\Omega; \mathbf{C}^3)$ que je vais noter par L . L'opérateur L est positive et n'a pas de spectre ponctuel. Donc, la résolvant tronquée $R_\chi(\lambda) = \chi(L - \lambda^2)^{-1} \chi$, $\chi \in C_0^\infty$ vaut 1 au voisinage de Γ , admet un prolongement méromorphe de $\Im \lambda < 0$ dans le plan complexe \mathbf{C} avec des pôles possibles dans $\Im \lambda > 0$ ([Va], [Vo]). Les pôles de $R_\chi(\lambda)$ sont appelés résonances (conus aussi comme pôles de la matrice de diffusion).

Pour l'opérateur de Laplace dans Ω avec des conditions de Dirichlet ou Neumann sur le bord la distribution des résonances est relativement bien connue. Si \mathcal{O} est noncaptive à bord C^∞ , on sait que $\forall C_1 > 0, \exists C_2 = C_2(C_1)$ telle que dans la région

$$\Lambda = \{\Im \lambda \leq C_1 \log |\lambda| - C_2\}$$

il n'y a pas de résonances. Ceci se déduit des résultats des Melrose et Sjöstrand [MS1], [MS2] sur la propagation des singularités soit par la méthode des Lax et Phillips [LP2] soit par la méthode de Vainberg ([Va]). Si \mathcal{O} est noncaptive à bord analytique il était démontré par Bardos, Lebeau et Rauch [BLR] que la région libre des résonances est de la forme

$$\Im \lambda \leq C_1 |\lambda|^{1/3} - C_2.$$

Ceci reste vrai (avec d'autres constantes) si l'obstacle est strictement convexe à bord C^∞ (voir [HL], [SZ]). Par contre, si \mathcal{O} est captive Lax et Phillips [LP1] ont fait la conjecture qu'il existe des résonances qui convergent vers l'axe réel. Mais en général ceci est faux comme le montre l'exemple de deux corps strictement convexe. Dans ce cas il y a un seul rayon captive et il était démontré par Ikawa [I1] qu'il existe une bande près de l'axe réel libre des résonances. D'autre part, au-dessus de cette bande dans Λ il existe une infinité des résonances dont une étude très précise est faite dans [G].

Dans le cas du système de l'élasticité les singularités se propagent dans Ω le long de deux rayons aux vitesses $c_1 = \sqrt{\mu_0}, c_2 = \sqrt{\lambda_0 + 2\mu_0}$ (voir [T2], [Y]). En particulier, les obstacles strictement convexe sont noncaptives pour le problème de Dirichlet et donc au niveau de distribution des résonances la situation est pareille comme dans le cas de l'opérateur de

Laplace. Dans le cas des conditions de Neumann sur le bord il était montré par Taylor [T2] qu'il existe en plus une troisième onde sur le bord qui porte des singularités et qui se propage à une vitesse $c_R < c_1$ appelée la vitesse de Rayleigh. Donc, tout obstacle est captivé pour le système de l'élasticité avec des conditions de Neumann sur le bord. Par conséquent, il était démontré par Kawashita [K] (voir aussi [IN]) que l'énergie locale n'admet pas de décroissance uniforme. Au niveau des résonances ce n'est pas raisonnable d'avoir un comportement pareil au celui dans le cas du problème de Dirichlet. En particulier, si l'obstacle est strictement convexe on ne peut pas avoir un tel domaine libre des résonances. Quand même, car la vitesse des ondes de Rayleigh est strictement inférieure aux autres deux vitesses, nous montrons qu'il existe un domaine assez grand libre des résonances. De plus, nous prouvons que l'existence des ondes de Rayleigh entraîne l'existence d'une suite infinie des résonances convergentes vers l'axe réel. Notre résultat principal est le théorème suivant [SV2].

Théorème 1.1

(a) *Pour tout $C_1 > 0$ il existe $C_2 > 0$ telle que pour tout $N > 0$ il n'y ait pas de résonances dans le domaine*

$$C_N |\lambda|^{-N} < \Im \lambda < C_1 \ln |\lambda|, \quad |\Re \lambda| > C_2.$$

(b) *Il existe deux suites infinies $\{\lambda_j\}$, $\{-\bar{\lambda}_j\}$ de résonances distinctes de L telle qu'on ait*

$$0 < \Im \lambda_j \leq C_N |\lambda_j|^{-N} \quad \forall N > 0.$$

Dans le cas où \mathcal{O} est une boule nous avons démontré [SV1] que la suite λ_j tend vers l'axe réel exponentiellement rapide et que le domaine libre des résonances est de la forme $Ce^{-\gamma|\lambda|} < \Im \lambda < C_1 |\lambda|^{1/3}$, $|\Re \lambda| > C_2$. Donc, on peut faire la conjecture qu'un tel domaine libre des résonances toujours existe sous l'hypothèse que le bord soit analytique.

2 Idée de preuve

On va profiter du résultat de Melrose [M] qui dit que les résonances du problème de Dirichlet sont les pôles de l'opérateur de Neumann $N(\lambda)$, alors que les résonances du problème de

Neumann sont les pôles de l'inverse $N(\lambda)^{-1}$. Je rappelle que l'opérateur de Neumann $N(\lambda) : L^2(\Gamma; \mathbf{C}^3) \rightarrow L^2(\Gamma; \mathbf{C}^3)$ pour le système de l'élasticité est défini par

$$N(\lambda)g = Bv$$

où $v = R_D(\lambda)g$ est la solution de l'équation

$$\begin{cases} (\Delta^* + \lambda^2)v = 0 & \text{dans } \Omega, \\ v = g & \text{sur } \Gamma, \\ v - \text{ sortante.} \end{cases} \quad (3)$$

Comme l'obstacle est strictement convexe, l'opérateur de Neumann $N(\lambda)$ est holomorphe dans Λ . De plus, c'est un opérateur pseudodifférentiel à grand paramètre λ dont la variété caractéristique est

$$\Sigma = \{(x, \xi) \in T^*\Gamma : |\xi|_x = c_R^{-1}\}.$$

Comme $c_R < c_1$, Σ est contenu dans la zone elliptique de problème (3). Soit $\lambda \in \Lambda$ résonance du problème de Neumann. Il est facile de voir qu'il existe une fonction $f, \|f\| = 1$, telle que $N(\lambda)f = 0$. On a le lemme suivant.

Lemme 2.1 $\tilde{W}Ff \subset \Sigma$.

Cela veut dire que $\forall \eta(x, \xi) \in C_0^\infty(T^*\Gamma), \eta = 1$ au voisinage de $\Sigma, \eta = 0$ en dehors d'un autre voisinage telle qu'on ait

$$f - (Op_\lambda \eta)f = O(|\lambda|^{-\infty}).$$

Posons $u = R_D(\lambda)f$. Il est clair que u vérifie l'équation

$$\begin{cases} (\Delta^* + \lambda^2)u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ Bu = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u - \text{ sortante.} \end{cases} \quad (4)$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3), \chi = 1$ au voisinage de Γ . On a

$$\begin{cases} (\Delta^* + \lambda^2)\chi u = |-\Delta^*, \chi|u & \text{dans } \Omega, \\ B(\chi u) = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ u - \text{ sortante,} \end{cases} \quad (5)$$

d'où

$$\Im \lambda^2 \|\chi u\|^2 = \Im([-\Delta^*, \chi]u, \chi u),$$

ce qui entraîne

$$|\Im \lambda^2| \leq \frac{\|[-\Delta^*, \chi]u\|}{\|\chi u\|}.$$

D'autre part, par le théorème de trace c'est facile de voir que

$$\|\chi u\| \geq C|\lambda|^{-2}\|f\| = C|\lambda|^{-2}.$$

Donc,

$$|\Im \lambda^2| \leq C|\lambda|^2 \|[-\Delta^*, \chi]R_D(\lambda)f\|.$$

Comme l'obstacle est strictement convexe, on peut construire une paramétrix de problème de Dirichlet (3) dans un voisinage assez petit de Γ , que je vais noter par $\tilde{R}_D(\lambda)$. Vu de Lemme 2.1 on obtient

$$|\Im \lambda^2| \leq C|\lambda|^2 \|[-\Delta^*, \chi]\tilde{R}_D(\lambda)(\text{Op}_\lambda \eta)f\| + O(|\lambda|^{-\infty}).$$

L'avantage de cette majoration est qu'elle ne consiste que de la paramétrix dans la zone elliptique. Donc, $\tilde{R}_D(\lambda)(\text{Op}_\lambda \eta)$ se représente comme une somme finie d'opérateurs de Fourier à phase complexe qui vérifie

$$\Im \psi(x) \sim c_0 \text{dist}(x, \Gamma), \quad c_0 > 0,$$

pour $\text{dist}(x, \Gamma)$ assez petite. Ceci entraîne

$$|\Im \lambda^2| \leq C|\lambda|^2 e^{-c|\lambda|} + O(|\lambda|^{-\infty}),$$

ce qui démontre la première partie du théorème.

Afin de démontrer la deuxième partie nous déduisons de l'existence de la paramétrix pour l'opérateur de Neumann l'estimation suivante.

Lemme 2.2 *Il existe $a, b > 0$ tels que, sur les courbes $l^\pm = \{\pm \Im \lambda = a \log |\lambda| - b\}$, on ait*

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{\log |\lambda|}. \quad (6)$$

Pour démontrer l'existence des résonances proches de l'axe réel on va raisonner par l'absurde. Supposons que $N(\lambda)^{-1}$ soit analytique dans $\Lambda_{a,b}$ (la région encadrée par les courbes l^\pm). Par conséquent, en utilisant les résultats dans [Vo], on obtient

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq C' e^{C'|\lambda|^4} \quad \text{dans } \Lambda_{a,b}. \quad (7)$$

Par le principe de Fragmén-Lindelöf on déduit des (6) et (7)

$$\|N(\lambda)^{-1}\| \leq \frac{C}{\log \lambda}, \quad \lambda > C > 0$$

sur $\Im \lambda = 0$. Ceci entraîne

$$\|N(\lambda)f\| \geq C_1 \log \lambda, \quad \lambda > C, \forall f, \|f\| = 1. \quad (8)$$

D'autre part, si on prend $\lambda = \lambda_j$ (les valeurs propres de $c_R \sqrt{-\Delta_\Gamma}$) on peut démontrer qu'il existe $f_j, \|f_j\| = 1$, telles que

$$\|N(\lambda_j)f_j\| \leq C_2$$

avec une constante C_2 indépendante de λ_j , ce qui est contradictoire à (8) (voir aussi [K]). Donc, $N(\lambda)^{-1}$ ne peut pas être analytique dans $\Lambda_{a,b}$, ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

References

- [A] J. D. ACHENBACH, *Wave Propagation in Elastic Solid*, North Holland, New York, 1973.
- [BLR] C. BARDOS, G. LEBEAU AND J. RAUCH, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities*, Invent. Math. **90**(1987), 77-114.
- [CP] F. CARDOSO AND G. POPOV, *Rayleigh quasimodes in linear elasticity*, Comm. P.D.E. **17**(1992), 1327-1367.
- [D] J. DUISTERMAAT, *Oscillatory integrals, Lagrange immersions and unfolding of singularities*, Comm. Pure Appl. Math. **27**(1974), 207-281.
- [G] C. GÉRARD, *Asymptotique des poles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes*, Bull. Soc. Math. France, Mémoire n. 31, **116**, 1988.
- [Gr] R. GREGORY, *The propagation of Rayleigh waves over curved surfaces at high frequency*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **70**(1971), 103-121.

- [Gu] J. C. GUILLOT, *Existence and uniqueness of a Rayleigh surface wave propagating along the free boundary of a transversely isotropic elastic half space*, Math. Meth. Appl. Sci. **8**(1986), 289–310.
- [HL] T. HARGÉ ET G. LEBEAU, *Diffraction par un convexe*, preprint, Univ. Paris-Sud, 1993.
- [I1] M. IKAWA, *On the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ. **23-1**(1983), 127–194.
- [I2] M. IKAWA, *Precise information on the poles of the scattering matrix for two strictly convex obstacles*, J. Math. Kyoto Univ. **27-1** (1987), 69–102.
- [I3] M. IKAWA, *Trapping obstacles with a sequence of poles of the scattering matrix converging to the real axis*, Osaka J. Math. **22**(1985), 657–689.
- [IN] M. IKEHATA AND G. NAKAMURA, *Decaying and nondecaying properties of the local energy of an elastic wave outside an obstacle*, Japan J. Appl. Math. **6**(1989), 83–95.
- [K] M. KAWASHITA, *On the local-energy decay property for the elastic wave equation with the Neumann boundary conditions*, Duke Math. J. **67**(1992), 333–351.
- [LP1] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *Scattering Theory*, New York, Academic Press, 1967.
- [LP2] P. D. LAX AND R. S. PHILLIPS, *A logarithmic bound on the location of the poles of the scattering matrix*, Arch. Rat. Mech. Anal. **40** (1971), 268–280.
- [M] R. B. MELROSE, *Polynomial bounds on the distribution of poles in scattering by an obstacle*, Journées Équations aux dérivées partielles, Saint-Jean de Monts, 1984.
- [MS1] R. B. MELROSE AND J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems, I*, Comm. Pure Appl. Math. **31**(1978), 593–617.
- [MS2] R. B. MELROSE AND J. SJÖSTRAND, *Singularities of boundary value problems, II*, Comm. Pure Appl. Math. **35**(1982), 129–168
- [R] LORD RAYLEIGH, *On waves propagated along plane surface of an elastic solid*, Proc. London Math. Soc. **17**(1885), 4–11.
- [S] M. A. SHUBIN, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1987.
- [SZ] J. SJÖSTRAND AND M. ZWORSKI, *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles*, preprint, Mittag-Leffler Inst., 1993.
- [SV1] P. STEFANOV AND G. VODEV, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity outside a ball*, Ann. Inst. H. Poincaré (Physique Théorique), to appear.

- [SV2] P. STEFANOV AND G. VODEV, *Distribution of resonances for the Neumann problem in linear elasticity in the exterior of a strictly convex body*, submitted.
- [T1] M. TAYLOR, *Rayleigh waves in linear elasticity as a propagation of singularities phenomenon*, in Proc. Conf. on P.D.E. and Geometry, Marcel Dekker, New York, 1979, 273–291.
- [T2] M. TAYLOR, *Pseudodifferential Operators*, Princeton University Press, Princeton, 1981.
- [Ti] E. C. TITCHMARSH, *The Theory of Functions*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1968.
- [Y] K. YAMAMOTO, *Singularities of solutions to the boundary value problems for elastic and Maxwell's equations*, Japan J. Math. **14**(1988), 119–163.
- [Va] B. R. VAINBERG, *Asymptotic Methods in Equations of Mathematical Physics*, Gordon and Breach sci. publ., New York, 1988.
- [Vo] G. VODEV, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian*, Comm. Math. Phys. **146** (1992), 205–216.

Université de Nantes
 Département de Mathématiques
 Chemin de la Houssinière
 44072 NANTES CEDEX