Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

G. LEBEAU

Propagation des ondes dans les dièdres

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 9, p. 1-7
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A9_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PROPAGATION DES ONDES DANS LES DIEDRES

G. LEBEAU

Exposé n° IX

15 Décembre 1992

1. Introduction

Soient $h_1(x), h_2(x)$ deux fonctions analytiques réelles définies près de $x_0 \in \mathbf{R}^d$ vérifiants $h_1(x_0) = h_2(x_0) = 0$. $dh_1(x_0)$ et $dh_2(x_0)$ linéairement indépendants. Soient Δ_1, Δ_2 les demi-hypersurfaces ouvertes

$$(1) \qquad \begin{cases} \Delta_1 = \{x; h_2(x) = 0 \ , \ h_1(x) > 0\} \\ \Delta_2 = \{x, h_1(x) = 0 \ , \ h_2(x) > 0\} \end{cases}$$

et L l'arête

$$(2) \qquad L = \{x; h_1(x) = h_2(x) = 0\}$$

Soit Ω^i (resp. Ω^e) l'ouvert intérieur (resp. extérieur)

$$(3) \qquad \begin{cases} \Omega^i = \{x; h_1(x) > 0 \text{ et } h_2(x) > 0\} \\ \Omega^e = \{x; h_1(x) < 0 \text{ ou } h_2(x) < 0\} \end{cases}$$

On a $\partial\Omega^i = \partial\Omega^e = \Delta$, où Δ est le dièdre

$$(4) \qquad \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup L$$

On s'intéresse à décrire les singularités, et leur propagation, pour les solutions de l'équation des ondes dans $X = \mathbf{R}_t \times \Omega, \Omega = \Omega^i$ ou Ω^e, d'énergie finie, et vérifiants la condition de Dirichlet

$$(5) \qquad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Sigma_j \partial_{x_j}^2 u = 0 \quad \text{dans} \quad X \\ u_{|\partial X} = 0 \quad \text{et} \quad u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\bar{X}) \end{cases}$$

Lorsque les équations h_i des faces du dièdre sont linéaires, le calcul de la fonction de Green du problème (5) a été effectué par Garnir [G]. Le cas plus général d'ouverts Ω à singularités coniques a été traité dans la catégorie C^∞ par Cheeger-Taylor [CT], et dans la catégorie analytique par Rouleux [R]. Dans le cas des dièdres à faces linéaires, le problème (5) avec des conditions aux limites plus générales a été étudié par Eskin [E]. Dans le cas des dièdres à faces "courbes", et pour le problème extérieur $\Omega = \Omega^e$, Uchida [U] a obtenu des estimations a-priori sur les singularités analytiques, et Gérard-Lebeau [G-L], dans le cas $d = 2$, ont traité le problème de l'asymptotique sur le cône diffracté de la solution de (5) associée à une onde conormale entrante. Les résultats décrits ici sont obtenus en généralisant la méthode de [GL].

2. Géométrie

On choisit d'abord un système de coordonnées $x = (x', x''), x' = (x_1, x_2), x'' = (x_3, \cdots, x_n)$ ($n = d+1$, de sorte que x'' contient la variable temporelle) qui redresse le dièdre, de sorte que $h_1 = x_1, h_2 = x_2$. On appelle x' les variables normales et x'' les variables tangentielles.

L'équation des ondes devient alors un opérateur

$$P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'') \tag{6}$$

de symbole principal $p = p_1 + \ell + q$ à coefficients analytique, et vérifiant

$$\begin{cases} p \quad \text{réel} \quad ; p(x,\xi) = 0 \quad \text{et} \quad \xi \neq 0 \Longrightarrow \partial_\xi p \neq 0 \\ p_1(x, \xi') \geq c_0 |\xi'|^2 \quad c_0 > 0 \end{cases} \tag{7}$$

et on a donc Car $p \cap T^*_\Delta \subset \{\xi = 0\}$, avec $T^*_\Delta = T^*_{\Delta_1} \cup T^*_{\Delta_2} \cup T^*_L$. On note $M^i = \{x_1 > 0$ et $x_2 > 0\}$ l'ouvert intérieur, $M^e = \{x_1 < 0$ ou $x_2 < 0\}$ l'ouvert extérieur.

On note π la projection canonique de $\dot{T}^*\overline{M} \backslash \dot{T}^*_\Delta$ sur $\dot{T}^*_b M = \dot{T}^* M \cup \dot{T}^* \Delta_1 \cup \dot{T}^* \Delta_2 \cup \dot{T}^* L$, qu'on munit de la topologie quotient, ${}^b\dot{T}^*\mathbf{R}^n$ le fibré cotangent de Melrose (dual du fibré des champs de vecteurs tangents à $x_1 x_2 = 0$) et $\tilde{\pi}$ l'application canonique de $\dot{T}^*\overline{M} \backslash \dot{T}^*_\Delta$ dans ${}^b\dot{T}^*\overline{M}$ définie en coordonnées par

$$(x', x'', \xi', \xi'') \mapsto (x', x'', \xi''; v_1 = x_1 \xi_1, v_2 = x_2 \xi_2) \tag{8}$$

On a donc le diagramme

$$\begin{tikzcd} \dot{T}^*\overline{M} \backslash \dot{T}^*_\Delta \arrow[r, "\tilde{\pi}"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Im}(\tilde{\pi}) \subset {}^b\dot{T}^*\overline{M} \\ \dot{T}^*_b M \arrow[ur, "i"'] & \end{tikzcd} \tag{9}$$

la flèche d'identification i étant bijective continue (ce n'est pas un homéomorphisme ; π n'est ni ouverte, ni fermé et $\dot{T}^*_b M$ n'est pas métrisable, alors que ${}^b\dot{T}^*\mathbf{R}^n \simeq \mathbf{R}^{2n}$ est une variété différentiable). On note aussi

$$\Sigma_b = \pi\ (\text{Car } p)\ ,\ Z = \tilde{\pi}(\text{Car } p) \tag{10}$$

Alors $i : \Sigma_b \to Z$ est un homéomorphisme, ce qui nous permettra d'identifier Σ_b et Z ; Σ_b est la variété caractéristique du problème aux limites dans le dièdre.

Définition 1.— *La région elliptique $\mathcal{E}$ de $\dot{T}_b^* M$ est*

$$\mathcal{E} = \dot{T}_b^* M \backslash \Sigma_b = \{\rho \; ; \; \pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{Car}\; p = \phi\}. \tag{11}$$

On notera Z_L (resp. Z_Δ) les points de Z au-dessus de l'arête L (resp. au-dessus du dièdre Δ), et on stratifie Z par

$$Z = S^0 \cup S^1 \cup S^2 \; ; \; S^0 = Z \backslash Z_\Delta, S^1 = Z_\Delta \backslash Z_L, S^2 = Z_L \tag{12}$$

Définition 2.— *On définit la région glissante g de Z par*

$$g = \{\rho \; ; \; \sharp\{\pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{Car}(p)\} = 1\} \tag{13}$$

et la région transverse $\mathcal{T}$ de Z par

$$\mathcal{T} = Z \backslash g \quad . \tag{14}$$

On notera que $g \cap S^0 = S^0$, $g \cap S^1$ est la région glancing usuelle sur les faces du dièdre, et $g \cap S^2$ correspond aux bicaractéristiques de p tangentes à l'arête L ; g n'est pas fermé.

Dans le système de coordonnées choisi on a

$$p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu) A_x (\xi' - \nu) - R(x, \xi'') \tag{15}$$

où A_x est une matrice 2×2 symétrique définie positive, $\nu = \nu(x, \xi'')$ est linéaire en ξ''. Avec $R_0 = R_{|x'=0}$ on a

$$S^2 = \{R_0 \geq 0\}, S^2 \cap g = \{R_0 = 0\} \; , S^2 \cap \mathcal{T} = \{R_0 > 0\} \tag{16}$$

On posera $S_g^i = S^i \cap g$, $S_t^i = S^i \cap \mathcal{T}$.

Définition 3.— *Soit $\rho \in \Sigma_b$; on définit les vecteurs entrants (resp sortants) $\mathcal{V}_\rho^-$ (resp $\mathcal{V}_\rho^+$), comme le sous-ensemble de $\mp T_\rho Z$*

$$\mathcal{V}_\rho^\mp = \{d\tilde{\pi}(H_p(q)) \; ; \; \pi(q) = \rho, \; q \in \mathrm{Car}(p), \mp H_p(q) \in T\overline{M}\}. \tag{17}$$

Pour $\rho \in g$, on a $\mathcal{V}_\rho^- = \mathcal{V}_p^+ = \{d\tilde{\pi}(H_p(q))\}$ où $q = \pi^{-1}(\rho) \cap \mathrm{Car}(p)$, et on notera $H_\rho = d\tilde{\pi}(H_p(q))$. Pour $\rho \in S^i$, on a $H_\rho \in T_\rho S_g^i$, et donc les strates S_g^i de g sont feuilletées par les courbes intégrales du champs (hamiltonien) H_ρ.

Pour $\rho \in S_t^i$, on a $\mathcal{V}_\rho^\mp \cap T_\rho S^i = \phi$.

Définition 4.— *Un rayon est une application continue γ de I (intervalle de $\mathbf{R}$) dans $\Sigma_b \simeq Z \subset \mathbf{R}^{2n}$ vérifiant*

(18) Si $\gamma(t_0) \in g$, γ est dérivable en t_0 et $\dot\gamma(t_0) = H_{\gamma(t_0)}$.

(19) Si $\gamma(t_0) \in S^i_t$ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \notin S^i$ pour $0 < |t - t_0| < \varepsilon$.

Les rayons sont (localement uniformément sur $\overline{M}$) Lipschitz, dérivables à gauche et à droite en tout point et $\dot\gamma_{g,d}(t) \in \mathcal{V}^{\mp}_{\gamma(t)}$. L'ensemble des rayons est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, et par chaque point, il passe au moins un rayon maximal.

3. Front d'onde

On va définir $SS_b(u)$ comme sous-ensemble de $\dot T^*_b M$. En coordonnées polaires $x_, = \rho\cos\theta, x_2 = \rho\sin\theta$ soit $E = \{f(x_1, x_2); f, \partial_\rho f, \frac{1}{\rho}\partial_\theta f \in C^0(\overline{I}; L^2_\rho)\}$ où $I =]0, \pi/2[$ (cas intérieur) ou $I =]-\frac{3\pi}{2}, 0[$ (cas extérieur). Soit aussi F le sous espace de $\mathcal{D}'(\mathbf{R}^n)$ formé des $u(x', x'')$ qui vérifient

$$(20) \qquad \begin{cases} \forall\theta_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2), \forall K \text{ compact de } \mathbf{R}^{n-2} \exists C, m \\ \forall\theta_1 \in C_0^\infty(K) \|\theta_0(x') \int u(x', x'')\theta_1(x'')dx''\|_E \le C \sup\limits_{|a| \le m} |\partial^\alpha\theta_1|_\infty \end{cases}$$

c'est à dire $F = \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n_{x''}; E_{\mathrm{loc}})$

En suivant l'étude faite par Kondrat'ev [K] sur les problèmes elliptiques dans les coins, on obtient

$$(21) \qquad Pu = 0 \ , \ u \in H^1_0 \Longrightarrow u \in F$$

On définit alors $SS_b(u)$ par régularité tangentielle comnme suit : Soit T_0 la transformation de FBI tangentielle

$$(22) \qquad T_0 u(w, x', \lambda) = \int e^{-\frac{\lambda}{2}(w-x'')^2} u(x', x'')dx''$$

et φ_0 la fonction poids $\varphi_0(w) = \frac{1}{2}(\mathrm{Im} w)^2$. D'après (21), si $Pu = 0 \quad u \in H^1_0$ $\theta_1(x'') \in C_0^\infty$ on a $T_0(\theta_i u) \in \mathcal{H}_{\varphi_0}(E_{\mathrm{loc}})$. espace de Sjöstrand à valeurs dans E_{loc}.

Définition 5.— *Soit $u \in H^1_0, Pu = 0, \rho \in \dot T^*_b M$. On définit $SS_b(u)$ par $\rho \notin SS_b(u)$ ssi*

1) si $\rho \notin \dot T^* L$, définition usuelle

2) si $\rho = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^* L$, $w_0 = x_0'' - i\xi_0''$, il existe $\theta_1(x'') \in C_0^\infty, \theta_1 \equiv 1$ près de x_0'', $\theta_0(x') \in C_0^\infty, \theta_0 \equiv 1$ près de 0, W voisinage de w_0 et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour $w \in W, \lambda \geq 1$

$$\|\theta_0 T_0 \theta_1 u\|_E \leq \frac{1}{\varepsilon_0} e^{\lambda[\varphi_0(w) - \varepsilon_0]} \; . \tag{23}$$

On a alors la proposition suivante

Proposition 1.— *$SS_b(u)$ est fermé, localement compact dans $\dot{T}_b^* M$ (on prendra garde au fait que ce résultat est faux sans la condition aux limites $u_{|\partial} = 0$).*

Il n'est pas évident que la définition précédente de $SS_b(u)$ soit indépendante du système de coordonnées choisi, ou de l'espace E de régularité normale choisie ; toutefois, cela est vrai, en effet on a

Théorème 1.—

$$SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \backslash \dot{T}_\Delta^*)$$

où $\underline{u}$ est le prolongement canonique de u par zéro à $\mathbf{R}^n \backslash \overline{M}$.

4. Résultats

Dans ce paragraphe, u désigne une solution du problème aux limites : $u \in H_0^1, Pu = 0$.

Théorème 2.— *(régularité elliptique)*

$$SS_b(u) \subset \Sigma_b \; . \tag{24}$$

Pour $\rho_0 \in S_t^2$ soit $\Gamma_{\rho_0}^-$ l'ensemble des rayons entrants en ρ_0

(25)

$$\Gamma_{\rho_0}^- = \{\text{rayons } :]-a, 0[\xrightarrow{\gamma} (\dot{T}^* \mathring{M} \cup \dot{T}^* \mathring{\Delta}_1 \cup \dot{T}^* \mathring{\Delta}_2) \cap \Sigma_b; \gamma(s) \to \rho_0 \quad (s \to 0^-)\}$$

Théorème 3.— *(Réflection hyperbolique sur l'arête)*

On suppose qu'il existe un voisinage W de ρ_0 dans Σ_b tel que pour tout $\rho \in W$ tel qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{\rho_0}^-$ avec $\gamma(-a) = \rho$, on a $\rho \notin SS_b(u)$. Alors

$$\rho_0 \notin SS_b(u) \; . \tag{26}$$

Les théorèmes 2 et 3 s'obtiennent comme dans [G.L] en écrivant les projecteurs de Calderon déduits de l'équation $P\underline{u} = g_1\delta_1 + g_2\delta_2 (\delta_1 = \delta_{x_2=0}, \delta_2 = \delta_{x_1=0})$, qui fournissent un système 2×2 d'équations sur les traces g_i des dérivées normales (pour P) de u sur les faces du dièdre. Le point clé est d'obtenir des estimations 2-microlocales a priori pour $g_1, g_2, \underline{u}$ sur les involutives $\{x_1 = 0\}$, $\{x_2 = 0\}$, $\{x_1 = x_2 = 0\}$, qui permettent d'écrire le système de Calderon comme une équation pseudo différentielle tangentielle à valeurs opérateurs sur les fibres des involutives $x_1 = 0$ ou $x_2 = 0$, l'inversion du symbole principal correspondant comme dans [G.L] à l'étude d'un problème de transmission à coefficents constants dans un dièdre linéaire en dimension 2.

Pour traiter la propagation sur les rayons tangents à l'arête, on utilise la stratégie microhyperbolique, en remarquant qu'on a, avec les notations précédentes

Lemme.— *Soit $\rho_0 \in S_g^2$, et $v_0 \in T_\rho(T^*L)$ tel que $dR_0(\rho_0)(v_0) \neq 0$. Il existe $\varepsilon_0, s_0 > 0$ tels que pour $\alpha = \rho + is\, v_0 + z \in T^*L^{\mathbf{C}}$, ρ réel, $|\rho - \rho_0| < \varepsilon_0$, z complexe $|z| < \varepsilon_0 s$, $|\mathrm{Re}\, x'| < \varepsilon_0, |\mathrm{Im}\, x'| < \varepsilon_0 s$, $0 < s < s_0$, l'équation $p(x', \alpha_{x''}, \xi', \alpha_{\xi''}) = 0$ n'a pas de solutions $\xi' \in \mathbf{R}^2$.*

On obtient alors, comme dans Sjöstrand [S]

Théorème 4.— *(Estimation près de S_g^2)*

Soit K un compact de S_g^2 ; il existe A_0 (grand) ε_0, δ_0 (petits) tels que pour tout $\rho_0 \in K$, $\varepsilon \in]0, \varepsilon_0]$

(27) $\quad$ *Boule* $(\rho_0, A_0\varepsilon^2) \cap SS_b(u) = \phi \Longrightarrow \exp sH_\rho(\rho_0) \notin SS_b(u)$*pour* $|s| \leq \delta_0 \varepsilon$.

Des résultats précédents, on déduit

Théorème 5.— *(propagation des singularités)*

Pour u solution H_0^1 de $Pu = 0$. $SS_b(u)$ est un fermé de Σ_b et si $\rho_0 \in SS_b(u)$ il existe un rayon maximal issu de ρ_0 dans $SS_b(u)$.

5. Problèmes ouverts

A. Quels sont les rayons qui peuvent porter des singularités C^∞ ?

B. Un rayon en incidence transverse sur l'arête en ρ_0 diffracte en général sur tout le cone $\Gamma_{\rho_0}^+$. Toutefois les singularités secondaires, différentes de la propagation directe ou des "reflections" sur les faces (avec une définition précise dans le cas intérieur), portent des singularités plus faibles.

Quels sont les rayons qui portent les singularités modulo $H^{3/2}$?

C. Soit Ω le complémentaire dans $\mathbf{R}^3$ de la réunion des deux boules de centre $(0, \pm 1/2, 0)$ et de rayon 1, $G(t, x, y)$ la fonction de Green

(28) $$\Box_{t,x} G = \delta_{t=0}\delta_{x=y}, \text{ support } (G) \subset t \geq 0 \text{ , } G_{|x \in \partial\Omega} = 0$$

avec $x, y \in \Omega$. (La discussion précédente s'applique à des primitives en temps de G). Quelle est la régularité Gevrey de G près de $y_0 = (-2, 0, 0), x_0 = (+2, 0, 0), t_0 = \mathrm{dist}_\Omega(y_0, x_0)$?

6. Références

[C.T] Cheeger-Taylor M., Diffraction by conical singularities I, II CPAM, 35, (1982) 275-331, 487-529.

[E] Eskin G., The wave equation in a wedge with general boundary conditions CPDE 17, (1992), 99-160.

[G] Garnir H.G., Fonction de Green pour l'opérateur métaharmonique dans un angle ou un dièdre. Bull. Soc. Roy. Sciences Liège, 1952, 119-140, 207-231, 328-344.

[G.L] Gérard P., Lebeau G., Diffusion d'une onde par un coin à paraître au journal de l'A.M.S.

[K] Kondrat'ev, Boundary Problems for elliptic equations in domains with conical or angular points, Trans Moscow Math. Soc. 16, (1967) 227-313.

[R] Rouleux M., Diffraction analytique sur une variété à singularités coniques, CPDE, 11, (1986), 947-988.

[S] Sjöstrand J., Analytic singularities and microhyperbolic boundary value problems, Math. Ann. 254 (1980), 211-256.

[U] Uchida M., Microlocal Analysis of diffraction at the corner of an obstacle, Ann. Scien ENS

Université Paris-Sud

Département de Mathématiques

Bât. 425

91405 Orsay cedex

Ecole Polytechnique

Centre de mathématiques

91128 Palaiseau cedex