Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

A. Bachelot

La diffraction en métrique de Schwarzschild : complétude asymptotique et résonances

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. n° 8, p. 1-13

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A8_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

LA DIFFRACTION EN METRIQUE DE SCHWARZSCHILD : COMPLETUDE ASYMPTOTIQUE ET RESONANCES

A. BACHELOT

Exposé n° VIII

16 Février 1993

I. Présentation

Le problème fondamental de la relativité générale est celui de l'existence et de la stabilité des solutions du système des équations d'Einstein

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu} \tag{1}$$

couplées à des équations de champs

$$\mathcal{L}_g(x, \partial, \Psi) = 0 \ , \tag{2}$$

reliant la métrique g aux champs Ψ. Dans toute sa généralité ce problème est colossal (cf. D. Christodoulou et S. Klainerman [8] pour la stabilité de la métrique de Minkowski dans le vide). Une simplification drastique est l'approximation linéaire où l'on suppose qu'un champ Ψ de faible amplitude, i.e. $|T_{\mu\nu}| \ll 1$, affecte peu la métrique g qui restera voisine d'une solution des équations d'Einstein dans le vide, (1) avec $T_{\mu\nu} \equiv 0$. En revanche, les équations de champs (2) dépendent de façon cruciale de la métrique g. On est ainsi amené à étudier les équations de champs classiques sur les variétés d'Einstein dans le vide, telles que les espace-temps de Minkowski ou de Schwarzschild. Ce dernier cas qui modèlise les trous noirs neutres sphériques fait l'objet d'intenses recherches en astrophysique (cf. par exemple S. Chandrasekhar [6]) mais peu d'études mathématiques rigoureuses ont été consacrées à la diffraction des champs par un trou noir, c'est à dire au comportement asymptotique des solutions de (2) en métrique de Schwarzschild. L'objet de cet article est de présenter l'état de l'art en ce domaine.

Le premier résultat a été obtenu par J. Dimock [10] qui construisit l'opérateur de diffraction pour le D'Alembertien, en tirant partie du caractère de courte portée de l'interaction gravitationnelle à l'infini. Dans le cas de l'équation de Klein-Gordon où la présence de la masse induit une perturbation de longue portée, J. Dimock et B.S. Kay prouvèrent l'existence des opérateurs d'onde modifiés [11] conjecturant la complétude asymptotique nécessaire pour la seconde quantification [12]. Nos résultats présentés ici concernent tout d'abord l'existence et la complétude des opérateurs d'onde pour :

(1) l'équation hyperbolique de Regge-Wheeler décrivant la perturbation d'un champ de spin s ;

(2) le système de Maxwell pour lequel l'interaction gravitationnelle est de pseudo-longue portée ;

(3) l'équation de Klein-Gordon (complétude asymptotique des opérateurs modifiés à la Dollard).

Nous étudions aussi le problème des résonances d'un trou noir en montrant l'existence d'un prolongement méromorphe de la matrice de diffraction de l'équation de Regge-Wheeler sur $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^-$ et proposons une nouvelle procédure de calcul numérique de ces pôles, basée sur l'algorithme de Prony et expérimentée sur CRAY2.

Enfin nous abordons les problèmes non linéaires ; W.T.Shu [16] avait résolu le problème de Cauchy à petites données pour le système de Yang-Mills en métrique de Schwarzschild. Nous considérons le cas plus simple de l'équation non linéaire de Klein-Gordon en établissant que le problème de Cauchy global à données arbitraires est bien posé et que les solutions admettent un profil asymptotique à l'infini et à l'horizon du trou noir. Ces résultats sont dûs à J.P. Nicolas [14].

II La métrique de Schwarzschild

Le théorème d'unicité de Birkhoff assure que l'ensemble des solutions à symétrie sphérique des équations d'Einstein dans le vide est donné par la famille à un paramètre $M \geq 0$ des métriques de Schwarzschild :

$$(3) \qquad g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = (1 - \frac{2M}{r})dt^2 - (1 - \frac{2M}{r})^{-1}dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 \ .$$

Pour $M = 0$, on retrouve la métrique partout régulière de Minkowski, pour $M > 0$, $g_{\mu\nu}$ est singulière à $r = 0$ et décrit un trou noir de masse ponctuelle M. On a un résultat analogue si la constante cosmologique est non nulle ; nous renvoyons à [2] pour l'étude de la diffraction du champ électromagnétique par un trou noir dans un univers de De Sitter. En coordonnées (t, r, θ, φ) il apparaît une singularité fictive (éliminable par le changement de variables de Kruskal) sur la sphère $r = 2M$ appelée "horizon du trou noir" qu'il est commode d'envoyer à $-\infty$ en prenant une nouvelle coordonnée radiale r_* :

$$(4) \qquad r_* = r + 2M \log|r - 2M|$$

Il est instructif d'étudier la diffraction géométrique en considérant les géodésiques nulles d'équation (dans le plan equatorial $\theta = \frac{\pi}{2}$) :

$$\dot{t} = A(1 - \frac{2M}{r})^{-1}, (\dot{r})^2 = A^2 - \frac{B^2}{r^2}(1 - \frac{2M}{r}), \dot{\varphi} = \frac{B}{r^2}$$

On montre (cf. [4] [6]) que :

(i) si $B > 3\sqrt{3}MA$, alors $r \to \infty, t \to \pm\infty$ et $r > 3M$;

(ii) si $B < 3\sqrt{3}MA$, alors $r \to 1$ pour une valeur finie du paramètre affine : il s'agit d'une géodésique incomplète qui part de l'infini et franchit l'horizon du trou noir ;

(iii) si $B = 3\sqrt{3}MA$, alors les grands cercles de la sphère $\{r = 3M\}$ "sphère des photons", sont des géodésiques nulles ; ces géodésiques fermées sont instables : il y a des géodésiques nulles asymptotes à la sphère des photons qui partent à l'infini ou franchissent l'horizon. Le point (iii) montre que les singularités des champs peuvent être piégées par la sphère des photons : on perd le principe de Huygens et on ne compte pas pouvoir mesurer la vitesse de décroissance de l'énergie locale ; en revanche, ces géodésiques fermées étant instables, on peut espérer que l'énergie ne reste pas piégée, mais rayonne asymptotiquement quand $|t| \to \infty$, une partie franchissant l'horizon en tombant dans le trou noir, et l'autre partie étant diffusée à l'infini : c'est la complétude asymptotique.

III Les résonances d'un trou noir

La perturbation d'un champ sans masse de spin s est décrite par l'équation hyperbolique de Regge-Wheeler.

$$(5)\quad \partial_t^2\Psi - (1-\frac{2M}{r})\partial_r[(1-\frac{2M}{r})\partial_r\Psi] - (1-\frac{2M}{r})[\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}\Psi + \frac{2M}{r^3}(s^2-1)\Psi] = 0$$

Par décomposition en harmoniques sphériques le problème est ramené à l'étude de l'équation

$$(6)\qquad \partial_t^2 u - \partial_x^2 u + V(x)u = 0\ ,\ x \in \mathbf{R}\ ,$$

$$(7)\quad V(x) = (1-\frac{2M}{r})[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + (1-s^2)\frac{2M}{r^3}], x = r + 2M\log(r-2M), 2M < r\ , \ell \in \mathbf{N}$$

L'existence de l'opérateur de diffraction pour (6) avec des potentiels $V(x) = 0(|x|^{-2-\varepsilon})$, $0 < \varepsilon, |x| \to \infty$, a été établie par R. Phillips [15]. Les potentiels (7) satisfont seulement $V(x) = 0(|x|^{-2}), x \to +\infty$, aussi étudions nous (6) sous l'hypothèse

$$(8)\qquad V(x) = V_+(x) - V_-(x),\ 0 \le V_\pm, V_+(x) \le C(1+|x|)^{-1-\varepsilon},$$
$$V_-(x) \le C(1+|x|)^{-2-\varepsilon}, 0 < \varepsilon\ .$$

Pour $f = (f_1, f_2) \in [C_0^\infty(\mathbf{R}_x)]^2$, on introduit les énergies

$$E(f) = \int |f_1'|^2 + V(x)|f_1|^2 + |f_2|^2 dx\ ,$$
$$E_0(f) = \int |f_1'|^2 + |f_2|^2 dx\ ,$$
$$E_+(f) = \int |f_1'|^2 + V_+(x)|f_1|^2 + |f_2|^2 dx + \int_0^1 |f_1|^2 dx\ .$$

On note $\mathcal{H}_0$ et $\mathcal{H}_+$ les complétés de $[C_0^\infty(\mathbf{R}_x)]^2$ pour E_0 et E_+. La solution u de (6) s'exprime à l'aide d'un groupe fortement continu sur $\mathcal{H}_+$

$$(9)\qquad (u(t),\partial_t u(1)) = e^{-itA}(u(0),\partial_t u(0)), A = A_0 - i\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ V & 0 \end{pmatrix}, A_0 = i\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \partial_x^2 & 0 \end{pmatrix}$$

Le générateur A admet un nombre au plus fini de valeurs propres non nulles dans $\mathcal{H}_+$. Soit P le projecteur E- orthogonal de $\mathcal{H}_+$ sur $\mathcal{H}$, l'espace E-orthogonal au sous-espace engendré par les fonctions propres de A. Soit Π la surjection canonique de $\mathcal{H}$ sur $\widehat{\mathcal{H}} = \mathcal{H}/\mathrm{Ker}A$ muni de la norme $\hat{E}(\hat{f}) = E(f), f \in \hat{f} = \Pi f$. Ker A et Ker A^2 sont des espaces de dimension finie ; on introduit l'espace $\widehat{\mathcal{H}}_1$, $\hat{E}$-orthogonal de Ker $A^2/\mathrm{Ker}A$ dans $\widehat{\mathcal{H}}$. On définit les opérateurs d'onde

$$(10)\qquad W_\pm f = s - \lim_{t\to\pm\infty} \Pi P e^{itA} e^{-itA_0} f \quad \text{dans} \quad \widehat{\mathcal{H}}$$

sur le sous-espace $\mathcal{D}_0$ dense dans $\mathcal{H}_0$

$$(11)\qquad \mathcal{D}_0 = \{f = (f_1, f_2)\ ,\ f_i \in C_0^\infty(\mathbf{R}_x), \int f_2(x)dx = 0\}\ .$$

Théorème 1.— *Sous l'hypothèse (8) les limites $W_+ f, W_- f$ existent pour tout $f \in \mathcal{D}_0$ et vérifient*

$$W_\pm f \in \widehat{\mathcal{H}}_1\ ,\ \widehat{E}(W_\pm f) = E_0(f), \overline{\mathrm{Im}W_+} = \overline{\mathrm{Im}W_-} = \widehat{\mathcal{H}}_1\ .$$

L'opérateur de diffraction $S = W_+^{-1}W_-$ est donc une isométrie de $\mathcal{H}_0$ sur $\mathcal{H}_0$. S est unitairement équivalent à la matrice d'Heisenberg $\mathcal{S}(\sigma,\omega,\eta)$ définie par

$$\sigma \in \mathbf{R}^*, \omega \in \{+1,-1\}, \mathcal{S}(\sigma,\omega,\omega) = T(\sigma), \mathcal{S}(\sigma,\omega,-\omega) = R_{-\omega}(\sigma)$$

où les coefficients de tranmission T et de réflexion R_ω sont donnés par

$$T(\sigma)[f_-(x,\sigma)\frac{df_+}{dx}(x,\sigma) - f_+(x,\sigma)\frac{df_-}{dx}(x,\sigma)] = 2i\sigma\ ,$$

$$2i\sigma R_\omega(\sigma) = T(\sigma)[f_+(x,-\omega\sigma)\frac{d}{dx}f_-(x,\omega\sigma) - f_-(x,\omega\sigma)\frac{d}{dx}f_+(x,-\omega\sigma)]\ ,$$

et les fonctions de Jost $f_\pm$ sont les solutions de

$$-\frac{d^2}{dx^2}f_\pm + V(x)f_\pm = \sigma^2 f_\pm, \lim_{x\to\pm\infty} e^{\mp i\sigma x}f_\pm(x,\sigma) = 1\ .$$

La représentation spectrale libre est l'isométrie $\mathcal{R}_0$ de $\mathcal{H}_0$ sur $L^2(\mathbf{R}_\sigma \times \{-1,1\}_\omega)$ définie par

$$f \in \mathcal{D}_0\ , (\mathcal{R}_0 f)(\sigma,\omega) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}E_0(f,(e^{-i\sigma x\omega}, i\sigma e^{-i\sigma x\omega}))$$

Le lien entre S et $\mathcal{S}$ est exprimé par la relation

$$\mathcal{S} = \mathcal{R}_0 S \mathcal{R}_0^{-1}$$

Les résonances associées au potentiel V sont les pôles du prolongement analytique de $T(\sigma)$ pour $\mathrm{Im}\sigma < 0$.

Théorème 2.— *Soit V une fonction continue sur $\mathbf{R}$, analytique dans $\{x \in \mathbf{C}, |\mathrm{Re}\, x| \geq B\}$ et telle que pour tout $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,*

$$\int_0^\infty |V(\pm B \pm \rho e^{i\theta})| d\rho < +\infty, \sup_{|\alpha| \leq |\theta|} |\rho V(\rho e^{i\alpha})| \to 0 \ , |\rho| \to \infty \ ;$$

Alors $T(\sigma)$ est méromorphe sur $\mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^-$.

Proposition 3.— *Les potentiels de Schwarzschild définis par (7) satisfont les hypothèses du théorème 2.*

Si le potentiel est à support compact il y a une infinité de résonances et les solutions de (6) admettent un développement spectral asymptotique.

Théorème 4.— *Si V est une fonction à support compact, $V \in L^\infty(\mathbf{R}), V \neq 0$, alors $T(\sigma)$ est méromorphe sur $\mathbf{C}$; chaque bande horizontale ne contient qu'un nombre fini de ses pôles ; les pôles de parties imaginaires ≥ 0 sont purement imaginaires et en nombre fini ; l'ensemble des pôles de partie imaginaire < 0 est infini, on ordonne les pôles de T par ordre décroissant de leur partie imaginaire, $\mathrm{Im}\sigma_{j+1} \leq \mathrm{Im}\sigma_j < 0 \leq \mathrm{Im}\sigma_0 \leq \mathrm{Im}\sigma_{-1} \leq \cdots \leq \mathrm{Im}\sigma_{-N}, 1 \leq j$; alors toute solution u de (6) à données initiales dans $C_0^\infty(\mathbf{R})$ vérifie*

$$\forall x \in \mathbf{R} \ , \exists C_j(x) \in \mathbf{C} \ , \forall \varepsilon > 0 \ , \forall n \geq -N \ , \exists C(x, n, \varepsilon) > 0 \ ;$$

$$|u(t,x) - \sum_{j=-N}^{n} e^{-i\sigma_j t} C_j(x)| \leq C(x,n,\varepsilon) |e^{(-i\sigma_{n+1}+\varepsilon)t}| \ . \tag{12}$$

Les résonances d'un potentiel analytique sont approchées par amortissement et troncature : étant donné un compact

$$K \subset \mathbf{C} \setminus i\mathbf{R}^-, K \subset \{\sigma : -\pi/2\gamma < \mathrm{Arg}\sigma < \pi + \pi/2\gamma\}, 1 < \gamma \ ,$$

on note $\mathcal{R}(V, K)$ l'ensemble des résonances de V dans K.

Théorème 5.— *Soit V un potentiel satisfaisant les hypothèses du théorème 2. Alors pour tout ε, $\eta > 0$ il existe $R > 0$ tel que*

$$\forall \rho > R \ , \mathrm{Card}\mathcal{R}(V, K) = \mathrm{Card}\mathcal{R}(\mathbf{1}(x)_{[-\rho,\rho]} e^{-\varepsilon|x|^\gamma} V(x), K),$$

$$\forall \sigma \in \mathcal{R}(V, K), \exists \sigma_\rho \in \mathcal{R}(\mathbf{1}(x)_{[-\rho,\rho]} e^{-\varepsilon|x|^g} V, K), |\sigma - \sigma_\rho| < \eta \ .$$

Ce résultat et la formule (12) sont à la base d'une méthode dépendant du temps de calcul des résonances σ_j d'un trou noir par l'algorithme de Prony : on résout par différences finies l'équation (6) pour les potentiels (7) ; on échantillone le signal $t \mapsto u(t,x)$ en posant $u_k = u(t_0 + k\Delta T, x)$ où t_0 est choisi suffisamment grand pour rendre négligeable l'erreur dans (12) :

$$\sum_{j=-N}^{n} C_j z_j^k = u_k \ , \ k \in \mathrm{N} \ , z_j = e^{-i\sigma_j \Delta T} \ . \tag{13}$$

Selon Prony, les z_j inconnus sont les racines du polynôme

$$\sum_{k=0}^{n+N} \alpha_k z^k = 0 \ , \tag{14}$$

où les coefficients α_k sont les solutions du système linéaire surdéterminé

$$\alpha_{n+N} = 1 \ , \ \sum_{j=0}^{N+n} \alpha_j u_{j+m} = 0 \ , m = 0, \cdots, M \ , M > N+n \ . \tag{15}$$

Les résonances dépendant de façon très sensible du potentiel, toutes les procédures de calcul comportent une étape instable : ici c'est la résolution de (15) par décomposition en valeurs singulières où une faible variation des u_k affecte considérablement les α_k. Cette méthode implémentée sur CRAY 2 s'avère remarquablement précise dans le calcul des premières résonances ; en revanche son efficacité, à comparer avec des méthodes WKB, décroit pour des résonances de grande partie imaginaire (évanescence trop rapide du signal)

IV Le système de Maxwell

Les équations de Maxwell dans la métrique (3) ont la forme

$$\partial_t U = -iHU \ , \ \nabla.E = \nabla.B = 0, U = (E,B) = (E^r, E^\theta, E^\varphi, B^r, B^\theta, B^\varphi) \tag{16}$$

où

$$H = i\begin{pmatrix} 0 & \nabla X \\ -\nabla X & 0 \end{pmatrix}, \nabla X = \begin{pmatrix} 0 & \frac{-\alpha}{r\sin\theta}\partial_\varphi & \frac{\alpha}{r\sin\theta}\partial_\theta \sin\theta \\ \frac{\alpha}{r\sin\theta}\partial_\varphi & 0 & -\frac{\alpha}{r}\partial_r r\alpha \\ -\frac{\alpha}{r}\partial_\theta & \frac{\alpha}{r}\partial_r r\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

$$\nabla.X = \alpha r^{-2}\partial_r(r^2 X^2) + (r\sin\theta)^{-1}[\partial_\theta \sin\theta X^\theta + \partial_\varphi X^\varphi], \alpha = (1 - \frac{2M}{r})^{1/2}.$$

H est un opérateur autoadjoint sur les espaces

$$\widetilde{\mathcal{H}} = [L^2(]2M, +\infty[_r \times S^2_\omega, r^2 dr d\omega)]^6, \widetilde{\mathcal{H}}^{(0)} = \{U \in \widetilde{\mathcal{H}}, \nabla.E = \nabla.B = 0\} \tag{17}$$

et sur l'orthogonal $\mathcal{H}$ dans $\widetilde{\mathcal{H}}^{(0)}$ du second espace de cohomologie

(18) $$\mathcal{H} = \{U \in \widetilde{\mathcal{H}}^{(0)}, \int E^r dr d\omega = \int B^r dr d\omega = 0\}.$$

On compare les champs à l'infini aux solutions du système de Maxwell

(19)
$$\partial_t U_\infty = -iH_\infty U_\infty, \mathrm{div} E_\infty = \mathrm{div} B_\infty = 0, U_\infty = (E_\infty, B_\infty), H_\infty = i\begin{pmatrix} 0 & \mathrm{rot} \\ -\mathrm{rot} & 0 \end{pmatrix}$$

dans l'espace temps de Minkowski

(20) $$\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_\rho^+ \times S_\omega^2\ ,\ g_{\mu\nu}^\infty dx^\mu dx^\nu = dt^2 - d\rho^2 - \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2).$$

On introduit les espaces d'énergie finie

(21) $$\widetilde{\mathcal{H}}_\infty = [L^2(\mathbf{R}_\rho^+ \times S_\omega^2, \rho^2 d\rho d\omega)]^6, \mathcal{H}_\infty = \{U_\infty \in \widetilde{\mathcal{H}}_\infty; \mathrm{div} E_\infty = \mathrm{div} B_\infty = 0\}$$

Pour éviter une interaction de longue portée, on identifie ρ et r_* donné par (4) et on construit un opérateur $\mathcal{I}_\infty : \mathcal{H}_\infty \to \widetilde{\mathcal{H}}$ en posant

(22)
$$(\mathcal{I}_\infty U_\infty)(r_*, \omega) = \chi(r_*) U_\infty(r_*, \omega) \quad \text{pour} \quad r_* \geq 0, (\mathcal{I}_\infty U_\infty)(r_*, \omega) = 0 \quad \text{pour} \quad r_* < 0\,,$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}), \chi(r_*) = 0$ pour $r_* \leq 1, \chi(r_*) = 1$ pour $r_* \geq 2$. En fait $H - H_\infty$ contient encore une perturbation de longue portée, mais par ce choix, celle ci affecte seulement les composantes radiales qui, par l'invariance par rotation, décroissent plus vite que le champ total ; l'interaction est de pseudolongue portée et on introduit les opérateurs d'onde classiques

(23) $$W_\infty^\pm U_\infty = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_\infty e^{-itH_\infty} U_\infty \quad \text{dans} \quad \widetilde{\mathcal{H}}\,.$$

Près de l'horizon, on compare le champ avec des champs d'ondes planes à polarisation gauche (droite) franchissant l'horizon futur (émergeant de l'horizon passé) en introduisant

(24) $$\widetilde{\mathcal{H}}_0 = \{U_0 = (E_0^r, E_0^\theta, E_0^\varphi, B_0^r, B_0^\theta, B_0^\varphi) \in [L^2(\mathbf{R}_{r_*} \times S_\omega^2, dr_* d\omega)]^6\},$$

(25) $$\mathcal{H}_0^\pm = \{U_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}_0\ :\ E_0^r = B_0^r = \pm E_0^\theta + B_0^\varphi = \pm E_0^\varphi - B_0^\theta = 0\}\ ,$$

(26) $$U_0 \in \mathcal{H}_0^\pm\ .\ (e^{-itH_0} U_0)(r_*, \omega) = U_0(\pm t + r_*, \omega)\ ,$$

(27) $$\mathcal{I}_0 : \widetilde{\mathcal{H}}_0 \to \widetilde{\mathcal{H}}, U_0 \in \widetilde{\mathcal{H}}_0 \to (\mathcal{I}_0 U_0)(r_*, \omega) = \alpha^{-1}(1 - \chi(r_*)) U_0(r_*, \omega)\ ,$$

(28) $$W_0^\pm U_0 = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_0 e^{-itH_0} U_0 \quad \text{dans} \quad \widetilde{\mathcal{H}}\,.$$

En utilisant les méthodes de Cook et de Birman-Kato on prouve le

Théorème 6.— *Les opérateurs $W_0^{\pm} \oplus W_\infty^{\pm}$ sont des isométries de $\mathcal{H}_0^{\pm} \oplus \mathcal{H}_\infty$ sur $\mathcal{H}$.*

V L'équation de Klein-Gordon

Un champ scalaire de masse $m > 0$ en métrique de Schwarzschild est décrit par l'équation

$$(29) \qquad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r_*}(r^2 \frac{\partial}{\partial r_*}\Psi) + (1 - \frac{2M}{r})(-\frac{1}{r^2}\Delta_{S^2}\Psi + m^2\Psi) = 0, 2M < r \ .$$

La solution Ψ s'exprime à l'aide d'un groupe unitaire :

$$(30) \qquad (\Psi(t), \partial_t \Psi(t)) = e^{-itH}(\Psi(0), \partial_t \Psi(0))$$

où H est un opérateur autoadjoint sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complété de $C_0^\infty(\mathbf{R}_{r_*} \times S_\omega^2)$ pour la norme d'énergie

$$(31) \quad \|(f_1, f_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int \{|\partial_{r_*} f_1|^2 + (1 - \frac{2M}{r})[\frac{1}{r^2}|\nabla_{S^2} f_1|^2 + m^2|f_1|^2] + |f_2|^2\} r^2 dr_* d\omega \ .$$

Près de l'horizon du trou noir, on compare les solutions de (29) avec des ondes planes solutions de

$$(32) \qquad \partial_t^2 \Psi_0 - \partial_{r_*}^2 \Psi_0 = 0 \ ,$$

en introduisant les espaces $\mathcal{H}_0^{\pm}$ complétés des ensembles de données régulières rentrantes/sortantes $\mathcal{D}_0^{\pm}$

$$(33) \qquad \mathcal{D}_0^{\pm} = \{(f_1(r_*, \omega), \pm \frac{\partial}{\partial r_*} f_1(r_*, \omega)), f_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R}_{r_*} \times S_\omega^2)\}$$

pour la norme d'énergie libre

$$(34) \qquad \|(f_1, f_2)\|_{\mathcal{H}_0^{\pm}}^2 = 4M^2 \int |\partial_{r_*} f_1|^2 + |f_2|^2 dr_* d\omega \ ,$$

et le groupe unitaire sur $\mathcal{H}_0^+ \oplus \mathcal{H}_0^-$ défini par

$$(35) \qquad f_0 \in \mathcal{D}_0^{\pm}, (e^{-itH_0} f_0)(r_*, \omega) = U_0(\pm t + r_*, \omega) \ .$$

On construit un opérateur d'identification (non borné) entre $\mathcal{D}_0^+ \oplus \mathcal{D}_0^-$ et $\mathcal{H}$ en posant

$$(36) \qquad (f_1, f_2) \in \mathcal{D}_0^{\pm} \mapsto [\mathcal{I}_0(f_1, f_2)](r_*, \omega) = (\chi(r_*) f_1(r_*, \omega), \chi(r_*) f_2(r_*, \omega))$$

où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}_{r_*}), \chi(r_*) = 1$ pour $r_* \leq 1, \chi(r_*) = 0$ pour $r_* \geq 2$.

On introduit les opérateurs d'onde classiques

$$f_0 \in \mathcal{D}_0^\pm, W_0^\pm f_0 = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_0 e^{-itH_0} f_0 \quad \text{dans} \quad \mathcal{H} . \tag{37}$$

A l'infini le terme $-2Mm^2r^{-1}$ dans (29) constitue une perturbation de longue portée de l'équation de Klein-Gordon dans l'espace-temps de Minkowski

$$[\partial_t^2 - \frac{1}{r_*^2}\partial_{r_*} r_*^2 \partial_{r_*} - \frac{1}{r_*^2}\Delta_{S^2} + m^2]\Psi_\infty = 0 \ , 0 \leq r_* . \tag{38}$$

Suivant [11] on compare alors les solutions de (29) à l'infini avec des champs évoluant selon une dynamique de Klein-Gordon modifiée à la Dollard : soit $U_\infty(t)$ le propagateur unitaire sur

$$\mathcal{H}_\infty = H^1(\mathbf{R}^3) \times L^2(\mathbf{R}^3) \tag{39}$$

défini par

$$U_\infty(t) = \begin{bmatrix} \cos(tB_0 + D\log t) & B_0^{-1}\sin(tB_0 + D\log t) \\ -B_0\sin(tB_0 + D\log t) & \cos(tB_0 + D\log t) \end{bmatrix} , \tag{40}$$

$$B_0 = (-\Delta_{\mathbf{R}^3} + m^2)^{1/2}, D = Mm^2|\nabla_{\mathbf{R}^3}|^{-1} \ , \log t \equiv \frac{t}{|t|}\log|t| .$$

On introduit un sous espace dense de $\mathcal{H}_\infty$

$$\mathcal{D}_\infty = \{(f_1, f_2) \in \mathcal{H}_\infty, \int_{\mathbf{R}^3} e^{-ix.\xi} f_j(x)dx \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3_\xi \setminus \{0\})\} . \tag{41}$$

On construit un opérateur d'identification $\mathcal{I}_\infty : \mathcal{H}_\infty \to \mathcal{H}$

$$(f_1, f_2) \in \mathcal{H}_\infty \ , [\mathcal{I}_\infty(f_1, f_2)](r_*, \omega) = (1 - \chi(r_*))(f_1, f_2)_{|x = r_*\omega} . \tag{42}$$

On définit les opérateurs d'onde modifiés en posant

$$f_\infty \in \mathcal{H}_\infty \ , W_\infty^\pm f_\infty = s - \lim_{t \to \pm\infty} e^{itH} \mathcal{I}_\infty U_\infty(t) f_\infty \quad \text{dans} \quad \mathcal{H} . \tag{43}$$

Théorème 7.— *Les opérateurs $W_0^\pm \oplus W_\infty^\pm$ sont bien définis sur $\mathcal{D}_0^\pm \oplus \mathcal{D}_\infty$ et se prolongent en des isométries de $\mathcal{H}_0^\pm \oplus \mathcal{H}_\infty$ sur $\mathcal{H}$.*

L'existence des opérateurs d'onde est prouvée par la méthode de Cook dans [11] [12]. Nous donnons l'idée de notre démonstration de la complétude asymptotique. On découple l'étude à l'infini et l'étude à l'horizon en comparant (29) avec le problème de Dirichlet pour cette même équation avec la condition homogène sur la sphère $r_* = 0$

$$\Psi(t, r_* = 0, \omega) \equiv 0 \tag{44}$$

qui constitue une perturbation "de courte portée" du problème initial. Le facteur $(1-\frac{2M}{r})$ étant exponentiellement décroissant quand $r_* \to -\infty$, (29) et (44) est une perturbation de courte portée de (32) sur $]-\infty,0]_{r_*}$: l'existence et la complétude de $W_0^\pm$ découlent rapidement des théorèmes de Birman-Kato et du principe d'invariance. Le problème à l'infini se ramène à l'étude de l'équation de Klein-Gordon (38) perturbée par un potentiel

(45) $$V = V_s - \frac{2Mm^2}{|x|}$$

où $V_s(x) = 0(|x|^{-1-\varepsilon}), |x| \to \infty$. L'existence et la complétude de $W_\infty^\pm$ résultent des travaux de Kitada [13] sur l'équation de Schrödinger et le principe d'invariance pour les potentiels de longue portée. Finalement on a le résultat de complétude

(46) $$\overline{W_0^-\mathcal{D}_0^-} \oplus W_\infty^-\mathcal{D}_\infty = \overline{W_0^+\mathcal{D}_0^+} \oplus W_\infty^+\mathcal{D}_\infty \equiv \mathcal{H}_{ac}$$

Pour établir la complétude asymptotique

(47) $$\mathcal{H}_{ac} = \mathcal{H}$$

on décompose (29) en harmoniques sphériques, et on utilise le fait que l'opérateur sur $L^2(\mathbf{R}_{r_*})$

(48) $$-\partial_{r_*}^2 + (1-\frac{2M}{r})\left[\frac{\ell(\ell+1)}{r^2} + \frac{2M}{r^3} + m^2\right]$$

a un spectre absolument continu [5].

VI Equation non linéaire de Klein-Gordon [14]

On considère une perturbation non linéaire cubique de (29)

(49)
$$\partial_t^2\Psi - r^{-2}\partial_{r_*}[r^2\partial_{r_*}\Psi] + (1-\frac{2M}{r})[-r^{-2}\Delta_{S^2}\Psi + m^2\Psi + |\Psi|^2\Psi] = 0, 2M < r, 0 < \lambda\ .$$

On introduit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ complété de $[C_0^\infty(\mathbf{R}_{r_*} \times S_\omega^2)]^2$ pour la norme

(50) $$\|(f_1,f_2)\|_{\mathcal{H}}^2 = \int \{|\partial_{r_*}f_1|^2 + (1-\frac{2M}{r})\frac{1}{r^2}|\nabla_{S^2}f_1|^2 + |f_1|^2 + |f_2|^2\}r^2dr_*d\omega\ .$$

Le contrôle L^2 de f_1 rend cette norme légèrement plus forte que la norme de l'énergie libre (31) mais permet d'estimer la non linéarité par un théorème d'injection $H^1 \subset L^6$ sur la variété $(\mathbf{R}_{r_*} \times S_\omega^2, g = (1-\frac{2M}{r})^{-1}dr^2 + r^2d\omega^2)$.

Théorème 8.— *Etant donné* (f_1, f_2) *dans* $\mathcal{H}$, *l'équation (49) admet une unique solution* Ψ *satisfaisant*

$$(51) \qquad (\Psi, \partial_t \Psi) \in C^0(\mathbf{R}_t, \mathcal{H}), \Psi(0) = f_1, \partial_t \Psi(0) = f_2 \ .$$

Le changement de variables de Kruskal-Szekeres $(t, r) \mapsto (T, X)$

$$X = e^{r_*/4M}(e^{\eta t/4M} + \eta e^{-\eta t/4M}), T = e^{r_*/4M}(e^{\eta t/4M} - \eta e^{-\eta t/4M}), \eta = \frac{r - 2M}{|r - 2M|},$$

élimine la pseudo-singularité à $r = 2M$ et représente

$$\mathbf{R}_t \times]0, \infty[_r \times S^2_\omega \quad \text{par} \quad \Omega = \{(X, T, \omega), 0 < T + X, T^2 - X^2 < 8M\omega \in S^2\}$$

où l'horizon futur est la sous-variété caractéristique $\Sigma = \{(X = T, T, \omega),\ 0 < T, \omega \in S^2\}$. (49) est équivalente à une équation du type

$$(52) \qquad \partial_T^2 f - \partial_X^2 f - A(T, X)\Delta_{S^2} f + B(T, X) f + C(T, X)|f|^2 f = 0$$

que l'on résout sur Ω ; la trace de f sur Σ donne le profil asymptotique de Ψ à l'horizon

Théorème 9.— *Etant donné* $(f_1, f_2) \in [C_0^\infty(]2M, \infty[_r \times S^2_\omega)]^2$, *il existe* $\hat{\Psi}_0 \in C^\infty(\mathbf{R}_s \times S^2_\omega)$ *tel que pour tout* $(s, \omega) \in \mathbf{R} \times S^2$, *la solution* Ψ *de (49) (51) vérifie*

$$(53) \qquad \lim_{t \to +\infty} \Psi(t, r_* = -t + s, \omega) = \hat{\Psi}_0(s, \omega)$$

$$(54) \qquad \lim_{t \to +\infty} (\partial_t - \partial_{r_*}) \Psi(t, r_* = -t + s, \omega) = 0$$

(54) est la condition d'impédance de T. Damour [9].

Pour les champs sans masse, on étudie le comportement asymptotique à l'infini par une démarche analogue en utilisant la transformation conforme de Penrose

$$T = \text{Arctg}(t + r_*) + \text{Arctg}(t - r_*), X = \text{Arctg}(t + r_*) - \text{Arctg}(t - r_*).$$

On montre alors que les solutions de (49) satisfont la condition de Sommerfeld sortante à l'infini :

Théorème 10.— *Etant donné* $(f_1, f_2) \in [C_0^\infty(]2M, \infty[_r \times S^2_\omega)]^2$, *il existe* $\hat{\Psi}_\infty \in C^0(\mathbf{R}_s, L^2(S^2_\omega))$ *tel que pour tout* $s \in \mathbf{R}$, *la solution* Ψ *de (49) (51) avec* $m = 0$, *vérifie*

$$\lim_{t \to +\infty} t\Psi(t, r_* = t + s, \omega) = \hat{\Psi}_\infty(s, \omega) \quad dans \quad L^2(S^2_\omega) \tag{55}$$

$$\lim_{t \to +\infty} t(\partial_t + \partial_{r_*})\Psi(t, r_* = t + s, \omega) = 0 \quad dans \quad L^2(S^2_\omega)\ . \tag{56}$$

L'existence des opérateurs d'onde et de diffraction pour l'équation non linéaire (49) est un problème ouvert difficile dont la résolution nécessitera une analyse très précise du propagation linéaire.

Références

[1] A. Bachelot, *Gravitational Scattering of Electromagnetic Field by Schwarzschild Black-Hole*, Ann. Inst. Henri Poincaré Physique théorique, 54, 3, 1991, 261-320.

[2] A. Bachelot, *Scattering of elctromagnetic field by De Sitter-Schwarzschild Black-Hole*, in "Non linear hyperbolic equations and field theory" Research Notes in Math. 253, 1992, Pitman.

[3] A. Bachelot, A. Motet-Bachelot, *Les résonances d'un trou noir de Schwarzschild*, à paraître aux Ann. Inst. Henri Poincaré physique théorique.

[4] A.L. Besse. *Einstein Manifolds*, Springer Verlag 1987.

[5] R. Carmona, *One-Dimensional Schrödinger Operators with Random or Deterministic Potentials : New Spectral Types*, J. Func. Anal. 51, 1983, p.229-258.

[6] S. Chandrasekar, *The mathematical theory of black-holes*, Oxford University Press, New-York, 1983.

[7] Y. Choquet-Bruhat, D. Christodoulou, *Existence of global solutions of the Yang-Mills Higgs and spinor field equations in 3+1 dimensions*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup., 14, 1981, p. 481-506.

[8] D. Christodoulou, S. Klainerman, *The Global Nonlinear Stability of the Minkowski Space*, preprint 1989.

[9] Th. Damour, *Black-Hole eddy currents*, Phys. Rev. D 18, 10, 1978, p. 3598, 3604.

[10] J. Dimock, *Scattering for the wave equation on the Schwarzschild metric*, Gen. Rel. Grav. 17, 4, 1985, p. 353-369.

[11] J. Dimock, B.S. Kay, *Classical and Quantum scattering theory for linear scalar fields on the Schwarzschild metric I*, Ann. Phys. 175, 1987, p. 366-426.

[13] H. Kitada, *Scattering theory for Schrödinger operators with long range potentials IL.*, J. Math. Soc. Japan, 30, 4, 1978, p.603-632.

[14] J.P. Nicolas, *Non linear Klein-Gordon Equation in Schwarzschild like metric*, Fourth International Conference on Hyperbolic Problems, Taormina, 1992, Vieweg Eds.

[15] R. Phillips, *Scattering Theory for the Wave Equation with a Short Range Perturbation II*, Indiana Univ. Math. J., 33, 6, 1984, p.831-846.

[16] W.T. Shu, *Spin Field Equations and Yang-Mills Equation*, Ph. D. Thesis, Princeton University, 1990.

[17] M. Zworski, *Distribution of Poles for Scattering on the Real Line*, J. Funct. Anal. 73, 1987, p. 277-296.

Université Bordeaux 1

Département de Mathématiques

Appliquées

351 cours de la Libération

33405 Talence cedex