SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. LEVY-BRUHL

J. NOURRIGAT

« Wave packets » sur les groupes nilpotents

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 22, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

"WAVE PACKETS" SUR LES GROUPES NILPOTENTS

P. LEVY-BRUHL & J. NOURRIGAT

Exposé n° XXII

23 Mars 1993

Cet exposé résume un travail à paraître aux *Annales de l'E.N.S.* On développe une technique de microlocalisation adaptée aux représentations de groupes nilpotents, qui permet une preuve plus simple du résultat de théorie spectrale obtenu avec A. Mohamed par une autre méthode (voir l'exposé [8] dans ce même séminaire), et aussi des résultats de l'un des auteurs, notamment avec B. Helffer, sur les inégalités L^2 ([16]).

La technique repose sur la construction d'une famille de fonctions $\psi_{y\eta\lambda}$ ($(y, \eta)\in\mathbb{R}^{2n}$, $\lambda>0$) qui généralisent les classiques "états cohérents" ou "wave packets" d'une manière adaptée à la représentation étudiée, puis sur l'emploi de ces fonctions en théorie spectrale.

1. Rappels sur les états cohérents usuels (cf [1], [4], [22]).

On choisit une fonction $\psi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dont la norme L^2 est égale, par exemple, à $(2\pi)^{-n/2}$, et on pose, pour tout $(y,\eta)\in\mathbb{R}^{2n}$:

(1) $$\psi_{y\eta\lambda}(x) = \lambda^{n/2}\, e^{i(x-y).\eta}\ \psi(\lambda(x-y))$$

Pour simplifier, posons $z=(x, \xi)$, $w = (y, \eta)$, et $dz = dx\, d\xi$. Pour toute fonction $f\in L^2(\mathbb{R}^n)$ et pour tout $\lambda>0$, on peut écrire, au sens faible :

(2) $$f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f, \psi_{z\lambda})\, \psi_{z\lambda}\, dz \qquad et \qquad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_{z\lambda})|^2\, dz$$

L'inégalité suivante joue un rôle essentiel : il existe $M>0$, indépendant de $z\in\mathbb{R}^{2n}$ et de $\lambda>0$, tel que :

(3) $$\int_{\mathbb{R}^{2n}} |(\psi_{z\lambda}\, , \psi_{w\lambda})|\, dw \ \leq M \quad \forall z\in\mathbb{R}^{2n}\ , \quad \forall\lambda>0.$$

Grâce à (2), on voit que, si $a(z, \lambda)$ est une fonction mesurable, bornée sur $\mathbb{R}^{2n}\times\mathbb{R}_+$, l'opérateur A_λ défini par :

$$A_\lambda f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} a(z, \lambda)\, (f, \psi_{z\lambda})\, \psi_{z\lambda}\ dz$$

est uniformément borné dans $L^2(\mathbb{R}^n)$). La fonction $a(z, \lambda)$ est appelée le "symbole d'anti-Wick" de l'opérateur A_λ, les fonctions $\psi_{z\lambda}$ sont des "paquets d'ondes", ou des "états cohérents" et, pour certains choix particuliers de la fonction ψ, la fonction $Tf(z,\lambda) = (f, \psi_{z\lambda})$ est liée à la transformée de Bargmann, ou de Fourier-Bros-Iagolnitzer [22], de f.

2. Emploi des états cohérents en théorie spectrale.

On considère un espace de Hilbert séparable H, un opérateur autoadjoint positif P, de domaine $D(P) \subset H$, à résolvante compacte et un réel $\lambda>0$. On note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de P, répétées selon leur multiplicité, qui sont $\leq \lambda$.

On considère aussi un espace mesuré Z, et une application mesurable $z \to \psi_z$ de Z dans H. On suppose que les éléments ψ_z (qui, dans la pratique, dépendront aussi de λ) ont une norme constante $K>0$, et que, pour tout $f \in H$, les égalités (2) sont vérifiées au sens faible. Le théorème suivant permet d'obtenir simplement un encadrement de $N(\lambda)$.

Théorème 1. Avec les hypothèses ci-dessus, supposons qu'il existe deux fonctions $s(z)$ et $S(z)$ mesurables sur Z, à valeurs positives, telles que :

H1. On a, pour tout $f \in D(P)$:

(4) $$\int_Z s(z)\, |(f, \psi_z)|^2\, dz \leq (Pf, f) + \lambda \|f\|^2$$

(5) $$(Pf, f) \leq \int_Z S(z)\, |(f, \psi_z)|^2\, dz$$

H2. Pour tout $z \in Z$, on a $\psi_z \in D(P)$ et l'application $z \to P\psi_z$ est mesurable de Z dans H. Pour tout $\mu>0$, les ensembles $\{z \in Z,\ s(z) \leq \mu\}$ et $\{z \in Z,\ S(z) \leq \mu\}$ sont de mesure finie, et $\|P\psi_z\|$ est bornée sur ces ensembles.

*H*3. Il existe $C>0$ et $\alpha \geq 0$ tels que, pour tout $z \in Z$:

(6) $$\int_Z \left(\frac{sup(S(z), S(w))}{inf(S(z), S(w))} \right)^{\alpha+(1/2)} |(\psi_z, \psi_w)|\, dw \leq C \left(\frac{S(z)}{\lambda}\right)^{\alpha}$$

Alors, on a l'inégalité suivante :

(7) $$N(\lambda) \leq 2\, K^2\, mes\, \{z \in Z,\ s(z) \leq 4\lambda\}$$

De plus, pour tout $r>0$, il existe $R>0$, ne dépendant que de r, K, α et C, tel que :

(8) $$N(R\lambda) \geq \frac{K^2}{2}\, mes\, \{z \in Z,\ S(z) \leq r\, \lambda\}.$$

La preuve repose sur la construction, à l'aide du calcul de Wick, de "projecteurs spectraux approchés". Ceux-ci ont des propriétés plus faibles que ceux de [21], et ne permettent qu'un encadrement du $N(\lambda)$.

3. Etats cohérents associés à une représentation de groupe nilpotent.

Les états cohérents décrits au §1 se déduisent d'une même fonction ψ par une famille d'opérateurs unitaires faisant intervenir notamment l'opérateur :

(9) $$(T_y f)(t) = f(y+t)$$

qui définit une représentation unitaire du groupe $G = \mathbb{R}^n$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Des constructions analogues, liées à d'autres représentations de groupes, ont été utilisées par Berezin, Perelomov [20] et Unterberger [23]. Nous allons adapter ici cette construction au cas d'un groupe nilpotent (en commençant par oublier le paramètre λ qui sera égal à 1 au début).

A. Rappels.

Soit $\mathcal{G}$ une algèbre de Lie nilpotente, de rang de nilpotence r. Pour résumer la théorie des représentations du groupe $exp\mathcal{G}$ associé, nous appellerons "représentation induite" une représentation de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ($n \geq 0$) telle que :

1. Pour tout $X \in \mathcal{G}$, $\pi(X)$ est un opérateur différentiel de la forme suivante :

(10) $$\pi(X) = A_1(X)\frac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1, X)\frac{\partial}{\partial x_2} + \ldots. + A_n(x_1, \ldots x_{n-1}, X)\frac{\partial}{\partial x_n} + i\,B(x, X)$$

où les A_j et B sont des polynômes réels, de degré $\leq r$, ne dépendant que des variables indiquées. Si $n=0$, π est une représentation scalaire.

2. Les formes linéaires $X \to A_j(0, X)$ $(1 \leq j \leq n)$ sont linéairement indépendantes dans $\mathcal{G}^*$. Autrement dit, la condition des crochets de Hörmander est vérifiée à l'origine, (et elle l'est alors en tout point).

B. Définition des états cohérents.

Examinons ce que devient, dans cette situation, l'opérateur T_y défini en (9). On pose, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$:

$$V_j(y) = \{ X \in \mathcal{G},\ A_1(X) = \ldots = A_j(y, X) = 0 \} \quad (1 \leq j \leq n)$$

D'après le point 2 ci-dessus, $V_j(y)$ est une sous-algèbre de codimension 1 dans $V_{j-1}(y)$. Munissons $\mathcal{G}$ d'une structure euclidienne. On peut choisir, pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, des éléments $X_j(y)$ $(1 \leq j \leq n)$ de $\mathcal{G}$, de norme 1, tels que $X_j(y))$ soit dans $V_{j-1}(y)$, et orthogonal à $V_j(y)$, pour la structure euclidienne de $\mathcal{G}$ (on a posé $V_0 = \mathcal{G}$). De plus, X_1 ne dépend pas de y, X_j ne dépend que de y_1, $\ldots y_{j-1}$, et cette dépendance est C^∞. Pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, on définit un opérateur T_y dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ en posant, pour tous $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et $t \in \mathbb{R}^n$:

(11) $$(T_y f)(t) = (e^{t_n \pi(X_n(y))} \ldots\ e^{t_2 \pi(X_2(y))} e^{t_1 \pi(X_1(y))} f)(y)$$

On montre que l'opérateur T_y est de la forme suivante :

(12) $$(T_y f)(t) = e^{i\varphi_y(t)} f(\theta_y(t))$$

(12) $$(T_y f)(t) = e^{i\varphi_y(t)} f(\theta_y(t))$$

où φ_y est un polynôme à coefficients réels sur $\mathbb{R}^n$, et θ_y un difféomorphisme polynomial de $\mathbb{R}^n$, tel que $\theta_y(0)=y$. De plus, les composantes θ_j ($1 \leq j \leq n$) de θ_y sont de la forme suivante :

(13) $$\theta_j(t) = a_j t_j + P_j(t_1, \dots t_{j-1})$$

où les a_j sont des constantes non nulles et les P_j des polynômes, ne dépendant que des variables indiquées, et dont les degrés sont bornés indépendamment de y et π.

D'après (13), le jacobien de θ_y est constant. Sa valeur absolue sera notée $J(y)$:

$$J(y) = |det\,(\theta_y)'\,|$$

La forme (12) de l'opérateur T_y permet de lui associer une application symplectique χ_y dans $\mathbb{R}^{2n}$, qui est de la forme suivante :

$$\chi_y(x, \xi) = (u_y(x)\,,\, v_y(x, \xi))$$

où $u_y = \theta_y^{-1}$.

Nous définissons l'opérateur $U_{y\eta}$ $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$ qui va servir à construire nos états cohérents comme étant l'inverse de l'operateur suivant :

(14) $$(U^*_{y\eta} f)(t) = J(y)^{1/2} e^{-it.\,v_y(y,\eta)} (T_y f)(t)$$

On choisit une fonction $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ telle que $\|\psi\| = (2\pi)^{-n/2}$. Dans la suite, le support de ψ sera choisi dans un voisinage assez petit de 0.

Nous définissons la famille d'états cohérents $\psi_{y\eta}$ associés à la représentation induite π par :

(15) $$\psi_{y\eta} = U_{y\eta}\,\psi \qquad\qquad \forall (y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}.$$

C. Propriétés.

1. On montre que, pour tout $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$:

$$f = \int_{\mathbb{R}^{2n}} (f, \psi_{y\eta})\, \psi_{y\eta}\; dy\, d\eta \qquad et \qquad \|f\|^2 = \int_{\mathbb{R}^{2n}} |(f, \psi_{y\eta})|^2\, dy\, d\eta$$

2. Pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, on associe à π une autre représentation $\sigma_{y\eta}$ en posant :

(16) $$\sigma_{y\eta}(X) = U^*_{y\eta}\, \pi(X)\, U_{y\eta}$$

Pour tout $X \in \mathscr{G}$, l'opérateur $\sigma_{y\eta}(X)$ est d'une forme analogue à (10) mais, alors que, dans l'écriture explicite (10) des opérateurs $\pi(X)$, les coefficients des polynômes $A_j(.\,, X)$ et $B(., X)$ $(X \in \mathscr{G})$ ne sont pas supposés vérifier une quelconque majoration, les coefficients analogues pour l'opérateur $\sigma_{y\eta}(X)$

vérifient certaines majorations précises, où les constantes sont indépendantes de π, y et η. Ces majorations sont analogues à celles qui définissent les classes de symboles du calcul pseudodifférentiel usuel. Posons :

$$(17) \qquad p(y, \eta, \pi) = \sup_{X \in \mathcal{G},\ \|X\| \leq 1} |\pi(X)(y, \eta)|$$

On montre qu'l existe $C>0$ tel que, pour toute représentation induite π, pour tout $(y, \eta) \in \mathbb{R}^{2n}$, pour tout $X \in \mathcal{G}$ tel que $\|X\| \leq 1$, et pour tout multi-indice de dérivation (α, β), on ait :

$$(18) \qquad |\partial_t^\alpha\, \partial_\tau^\beta \sigma_{y\eta}(X)\,(0, 0)| \leq C\, p(y, \eta, \pi)^{1-|\beta|} \quad (|\alpha| \leq r,\ \ |\beta| \leq 1).$$

3. Notons Y_1 , ... Y_d une base orthonormée quelconque de $\mathcal{G}$. Pour tout entier $m \geq 0$, et pour toute représentation induite π, on définit l'espace de Sobolev $\mathcal{H}_{m\pi}$ suivant (avec des notations classiques) :

$$\mathcal{H}_{m\pi} = \{ f \in L^2(\mathbb{R}^n)\,,\ \ \pi(Y^\alpha) f \in L^2(\mathbb{R}^n) \ \ si\ \ |\alpha| \leq m \ \}$$

Cet espace est muni de la norme

$$||||f||||_{m\pi}^2 = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(Y^\alpha) f\|^2$$

On montre que, pour tout entier $m \geq 0$, il existe $C_m > 0$ tel que :

$$(19) \qquad \int_{\mathbb{R}^{2n}} p(z, \pi)^{2m}\, |(f, \psi_z)|^2\ dz \quad \leq C_m \ \ ||||f||||_{m\pi}^2$$

pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ et pour toute représentation induite π.

4. Soit P un élément de degré m dans l'algèbre $\mathcal{U}(\mathcal{G})$ engendrée par $\mathcal{G}$, et j, k deux réels tels que $j+k=m+n$. Alors, il existe $C>0$ (qui ne dépend que de $\mathcal{G}$ et de P, j et k), tel que :

$$(20) \qquad \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + p(z, \pi))^{-j}\, (1 + p(w, \pi))^{-k}\ \ |(\pi(P)\psi_z, \psi_w)|\ \ dw \quad \leq C$$

pour tout $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et pour toute représentation induite π.

5. Soit P un élément de degré m dans $\mathcal{U}(\mathcal{G})$. Alors, il existe $C>0$ tel que, pour toute représentation induite π, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on ait :

$$(21) \qquad |(\pi(P) f, f)| \quad \leq C \int_{\mathbb{R}^{2n}} (1 + p(z, \pi))^{m+n}\, |(f, \psi_z)|^2\, dz$$

D. Cas d'une algèbre de Lie "stratifiée".

On appelle ainsi une algèbre de Lie $\mathcal{G}$ admettant une décomposition en sous-espaces $\mathcal{G}_j$ $(1 \leq j \leq r)$ tels que :

$$[\mathcal{G}_j\,, \mathcal{G}_k] \subset \mathcal{G}_{j+k} \qquad \text{si } j + k \leq r$$

$$[\mathscr{G}_j , \mathscr{G}_k] = 0 \qquad \text{si } j+k>r,$$

et telle que, de plus, $\mathscr{G}$ soit engendrée (en tant qu'algèbre de Lie) par le sous-espace $\mathscr{G}_1$. On désigne par X_1 , ... X_p une base du sous-espace $\mathscr{G}_1$. Pour tout entier $m \geq 0$, et pour toute représentation induite π, on définit (avec des notations usuelles) l'espace de Sobolev $H_{m\pi}$ suivant :

$$H_{m\pi} = \{f \in L^2(\mathbb{R}^n),\ \ \pi(X^\alpha)f \in L^2(\mathbb{R}^n)\ \ si\ |\alpha| \leq m\}$$

muni de la norme :

$$\|f\|^2_{m\pi} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|\pi(X^\alpha)f\|^2$$

On pose aussi :

$$(22) \qquad |||f|||^2_{m\pi} = \sum_{|\alpha| = m} \|\pi(X^\alpha)f\|^2$$

On montre que, pour tout entier $m \geq 0$, il existe $C_m > 0$, (ne dépendant que de $\mathscr{G}$), tel que :

$$(23) \qquad \int_{\mathbb{R}^{2n}} p(z, \pi)^{2m/r}\ |(f, \psi_z)|^2\, dz \ \leq\ C_m\ \|f\|^2_{m\pi}$$

pour tout $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et pour toute représentation induite π.

E. Etats cohérents dépendant d'un paramètre $\lambda > 0$.

Si $\mathscr{G}$ est "stratifiée", pour tout $t>0$, on note δ_t l'unique application linéaire de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{G}$ telle que $\delta_t X = t^j X$ si $X \in \mathscr{G}_j$ $(1 \leq j \leq r)$. Pour toute représentation induite π de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, et pour tout $\mu>0$, on peut appliquer la construction précédente à la représentation $\pi_\mu = \pi \circ \delta_\mu^{-1}$, qui est aussi réalisée dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Les "états cohérents" ainsi obtenus seront notés $\psi_{z\mu}$ $(z=(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $\mu>0)$, et l'opérateur unitaire défini comme en (14) en un point $z=(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ sera noté $U_{z\mu}$. On définit ainsi une famille de fonctions dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, indexée par les paramètres $z \in \mathbb{R}^{2n}$ et $\mu>0$, et dépendant bien sûr aussi de la représentation π.

4. Application à la théorie spectrale du sous-Laplacien.

Dans toute la suite, on suppose que $\mathscr{G}$ est "stratifiée, en utilisant les notations du §3. Rappelons que, en notant X_1, ..X_p une base du sous-espace $\mathscr{G}_1$, on désigne par Δ le "sous-laplacien de Kohn" :

$$(24) \qquad \Delta = - \sum_{j=1}^{p} X_j^2$$

Rappelons aussi qu'une représentation π de l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ qui est la difffférentielle d'une représentation unitaire irréductible du groupe correspondant peut toujours se réaliser comme une "représentation induite de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$" (au sens du début du §3), où n est un entier convenable, dépendant de π, et qu'alors la fonction $p(x, \xi, \pi)$ définie en (17) vérifie :

(25) $\qquad p(x, \xi, \pi) \to +\infty \qquad$ quand $|(x, \xi)| \to \infty$.

Pour simplifier, convenons d'appeler "représentation irréductible" une représentation du type décrit au §3A qui vérifie (25).

Choisissons une base de $\mathscr{G}$, notée (X_I), dont chaque élément X_I est un crochet itéré des éléments $X_1, \ldots X_p$ (qui forment une base de $\mathscr{G}_1$), la longueur du crochet correspondant étant notée $|I|$, et posons, pour toute représentation induite π :

$$M_\pi(x, \xi) = \sum_{|I| \leq r} |\pi(X_I)(x, \xi)|^{1/|I|}$$

où on a noté $\pi(X_I)(x, \xi)$ le symbole complet de l'opérateur $\pi(X_I)$. D'après (25), si π est irréductible, la fonction $M_\pi(x, \xi)$ tend vers $+\infty$ quand $|(x, \xi)| \to \infty$. On peut donc poser, pour tout $\lambda > 0$:

$$N_0(\lambda) = mes\,(\{x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}\,,\ M_\pi(x, \xi) \leq \lambda^{1/2}\ \})$$

Les états cohérents $\psi_{z\mu}$ $(z=(x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}, \mu = \lambda^{1/2})$ associés à la représentation π comme à la fin du §3 permettent une preuve plus simple du résultat suivant, annoncé en [8] et [9] et prouvé par une autre méthode dans [10].

Théorème 2. Avec les notations ci-dessus, il existe une constante $C>1$, ne dépendant que de $\mathscr{G}$, telle qu'on ait, pour toute représentation unitaire irréductible π, et pour tout $\lambda>0$:

$$\frac{1}{C} N_0\left(\frac{\lambda}{C}\right) \quad \leq \quad N(\lambda) \quad \leq C N_0(C\lambda)$$

Au lieu du sous-Laplacien défini en (24), on peut s'intéresser par exemple à la sommme des carrés de tous les éléments d'une base de $\mathscr{G}$. Rappelons que pour ce type d'opérateurs, les résultats de Manchon [11] [12] donnent un équivalent du $N(\lambda)$, à l'aide d'un calcul de Weyl adapté.

5. Analyse microlocale et groupes nilpotents.

Désormais, l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ est supposée stratifiée, et on note π une représentation induite de $\mathscr{G}$ dans $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Pour tous $z = (x, \xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et

$\lambda>0$, notons $U_{z\lambda}$ et $\psi_{z\lambda}$ l'opérateur unitaire et l'état cohérent associés au point (x, ξ) et à la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$ comme dans la section 3.E.

En notant $X_1, \ldots X_p$ une base de $\mathcal{G}_1$, on désigne par $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$ l'ensemble des expressions polynomiales homgènes de degré m en $X_1, \ldots X_p$ (par exemple $(X_1)^2$, $X_1 X_2$ et $X_2 X_1$ sont des éléments de $\mathcal{U}_2(\mathcal{G})$).

En utilisant les états cohérents $\psi_{z\lambda}$ du §3B, on peut construire une technique de microlocalisation adaptée à l'étude de l'image $\pi(P)$ d'un élément P de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$ par une représentation induite π (donc à un opérateur différentiel exprimé de manière polynomiale par rapport à des opérateurs d'ordre 1 de la forme (10)). L'intérêt de cette question provient du rôle de modèle microlocal que les algèbres nilpotentes et leurs représentations jouent pour des algèbres d'opérateurs pseudo-différentiels, comme le montrent les articles [17] et [18]. La technique de microlocalisation proposée peut être résumée par le théorème suivant.

Théorème 3. Avec les notations ci-dessus, pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$, et pour toute représentation induite π de $\mathcal{G}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, il existe une famille d'opérateurs $T(z, \lambda, \pi) : L^2(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ $(z \in \mathbb{R}^{2n}, \lambda > 0)$, telle que :

1. Pour tout $P \in \mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, on peut écrire :

$$(\pi(P)f, f) = \int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^\infty (\pi(P)T(z, \lambda, \pi)f, T(z, \lambda, \pi)f)\, dz\, d\lambda \; + E(f)$$

et il existe $C>0$, indépendant de ε, π et f, tel que, avec la notation (22) :

$$|E(f)| \le C\varepsilon\, |||f|||_{m\,\pi}^2$$

2. L'opérateur $T(z, \lambda, \pi)$ est nul si $p(z, \pi_\lambda) \ge C(\varepsilon)$ (notation (17) appliquée à la représentation $\pi_\lambda = \pi \circ \delta_\lambda^{-1}$).

3. Pour tout multi-indice (α, β) et pour tout $m \ge 0$, il existe $C_{\alpha\beta}(\varepsilon)$ (indépendant de π), tel que :

$$\int_{\mathbb{R}^{2n}} \int_0^\infty \|t^\alpha D_t^\beta\, U_{z\lambda}^*\, T(z, \lambda, \pi)f\|^2\, \lambda^{2m}\, dz\, d\lambda \le C_{\alpha\beta}(\varepsilon)\; |||f|||_{m\,\pi}^2$$

On peut noter l'analogie entre ces propriétés et celle de la "diagonalisation approchée" annoncée par Fefferman et Phong dans [2] pour des opérateurs beaucoup plus généraux.

La principale application de cette technique concerne les "inégalités de Gårding" pour les opérateurs $\pi(P)$ (où π est une représentation induite et P un élément de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$). Le théorème 3 permet de prouver une série de propositions qui correspondent exactement aux étapes de la preuve de l'inégalité de Gårding pour les opérateurs elliptiques homogènes à coefficients constants ("les polynômes sont des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$ ", "la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ est un compact", etc...). Cependant, les preuves sont nettement plus compliquées, et les énoncés font appel à la théorie de Kirillov [6]. Le lecteur trouvera sans [18] quelques applications de ces résultats abstraits et dans [19] un survey de cette théorie.

Nous allons seulement énoncer l'analogue de la continuité des applications polynomiales, qui est l'étape la plus difficile.

Pour toute forme linéaire $\ell \in \mathcal{G}^*$, notons π_ℓ la représentation unitaire irréductible du groupe $exp\mathcal{G}$ que la théorie de Kirillov [6] associe à ℓ. Rappelons que π_ℓ est réalisée dans $L^2(\mathbb{R}^{k(\ell)})$, où $k(\ell)$ est une entier dépendant de ℓ. Dans ce cas commutatif, π_ℓ est définie simplement par :

$$\pi_\ell(X) \;=\; i\,\ell(X) \qquad \forall X \in \mathcal{G}.$$

La continuité des applications polynomiales signifie donc que, si $\mathcal{G}$ est commutative et si P est un élément de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, l'application $\ell \rightarrow \pi_\ell(P)$ est continue. En particulier, si P est "réel", et si (ℓ_ν) $(\nu \in \mathbb{N})$ est une suite dans $\mathcal{G}^* \backslash \{0\}$ telle que $\frac{\ell_\nu}{|\ell_\nu|}$ tend vers une limite $\ell \in \mathcal{G}^*$, alors $\pi_\ell(P) \geq 0$ si, et seulement s'il existe une suite (ε_ν) telle que :

$$\pi_{\ell_\nu}(P) \;+\; \varepsilon_\nu\,|\ell_\nu|^{2m} \;\geq 0 \qquad et \qquad \varepsilon_\nu \rightarrow 0.$$

L'extension au cas d'une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}$ va sembler maintenant naturelle. On note $(g, \ell) \rightarrow g.\ell$ $(g \in exp\ \mathcal{G},\ \ell \in \mathcal{G}^*)$ l'action coadjointe de $exp\mathcal{G}$ dans $\mathcal{G}^*$. On définit une relation d'équivalence ~ dans $\mathcal{G}^*$ en écrivant $\ell \sim \ell'$ s'il existe $g \in exp\mathcal{G}$ et $t>0$ tels que $\ell' = \delta_t^* g.\ell$

(26) $\qquad \ell \sim \ell' \iff \quad \ell' = \delta_t^* g.\ell$

Comme dans [5], on appelle "ensemble limite" d'une suite (ℓ_ν) $(\nu \in \mathbb{N})$, et on note $\mathcal{L}$, l'ensemble des formes linéaires $\ell \in \mathcal{G}^*$ qui sont valeur d'adhérence d'une suite équivalente à (ℓ_ν).

Théorème 4. On suppose $\mathcal{G}$ stratifiée. Soit P un élément de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$, formellement auto-adjoint. Soient (ℓ_ν) une suite dans $\mathcal{G}^*$, et $\mathcal{L}$ l'ensemble limite associé. Alors, il y a équivalence entre :

1. On a $(\pi_\ell(P)f, f) \geq 0$ pour tout $\ell \in \mathcal{L}$ et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\ell)})$.

2. Il existe une suite (ε_ν) tendant vers 0, telle que :

$$0 \leq (\pi_{\ell_\nu}(P)f, f) + \varepsilon_\nu \ |||f|||^2_{m\,\pi}$$

pour tout $\nu \in \mathbb{N}$, et pour tout $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\ell_\nu)})$.

Le théorème 4, (de "continuité"), joint à l'argument de "compacité de la sphère unité dans l'ensemble des représentations irréductibles" qui est développé dans [5] (p. 172-176), entraîne le corollaire suivant.

Théorème 5. Soit F un sous-ensemble fermé dans $\mathcal{G}^*$, stable par la relation d'équivalence définie en (26). Soit P un élément formellement autoadjoint de $\mathcal{U}_{2m}(\mathcal{G})$ $(m \geq 1)$. On suppose que, pour tout $\ell \in F \backslash \{0\}$, il existe une constante $c(\ell)$ strictement positive telle que :

$$(\pi_\ell(P)f, f) \geq c(\ell) \ |||f|||^2_{m\,\pi} \qquad \forall f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{k(\ell)}).$$

Alors la constante $c(\ell)>0$ peut être choisie indépendante de $\ell \in F$.

Les théorèmes 4 et 5 sont voisins de ceux de [16], mais la preuve esquissée ici à l'aide des états cohérents est plus simple que celle de [16]. Rappelons que ces théorèmes sont des étapes importantes dans la preuve de certaines inégalités L^2 (voir [5] ou [18]).

[1] A. CORDOBA, C. L. FEFFERMAN. Wave packets and Fourier Integral operators. *Comm. in P.D.E*, 3 (11) (1978), p. 979-1005.

[2] C. L. FEFFERMAN. The uncertainty principle. *Bull. A.M.S.* 9 (1983), p.129-206.

[3] G.B. FOLLAND Subelliptic estimates and function spaces on nilpotent Lie groups. *Ark. för Math.* 13 (1975).

[4] P. GERARD. Moyennisation et régularité d'ordre deux-microlocale. *Ann. Sc. Ecole Norm. Sup.* 23 (1) (1990) *p*.89–121.

[5] B. HELFFER, J. NOURRIGAT. Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Progress in Math. 58. Birkhauser, 1985.

[6] A. KIRILLOV. Unitary representations of nilpotent groups. *Russian Math. Survey* 17 (1962), p. 53-104.

[7] P. G. LEMARIE. Base d'ondelettes sur les groupes de Lie stratifiés. *Bull. S.M.F*, 117 (1989), p. 211-232.

[8] P. LEVY-BRUHL, A. MOHAMED, J. NOURRIGAT. Etude spectrale d'opérateurs sur des groupes nilpotents. Séminaire "Equations aux dérivées partielles", Ecole Polytechnique. Exposé 18, 1989-90.

[9] P. LEVY-BRUHL, A. MOHAMED, J. NOURRIGAT. Spectral theory and representations of nilpotent groups. *Bull. A.M.S*, 26 (2), 1992, *p*. 299–303.
[10] P. LEVY-BRUHL, A. MOHAMED, J. NOURRIGAT. Etude spectrale d'opérateurs liés à des représentations de groupes nilpotents. To appear in *Journal of functional Analysis.*
[11] D. MANCHON. Calcul symbolique sur les groupes de Lie nilpotents et applications. *Journal of functional Analysis.* 102 (1) (1991), p.206–251.
[12] D. MANCHON. Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents. *J. reine angew. Math.* 418 (1991), 77–129.
[13] A. MELIN. Parametrix constructions for right invariant differential operators on nilpotent groups. *Ann. Global Anal. and Geom.* 1 (1), (1983) p. 79-130.
[14] A. MOHAMED, J. NOURRIGAT.Encadrement du $N(\lambda)$ pour des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. *J. de Math. pures et appl.* 70 (1990), 87–99.
[15] N. MOUKADEM. Interpolation pour des espaces de Sobolev liés à des représentations de groupes. Thèse (Rennes, 1981).
[16] J. NOURRIGAT. Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents. *J. Funct. Analysis*, 74, 2 (1987), p. 300-327.
[17] J. NOURRIGAT. Subelliptic systems. *Comm. in P.D.E.* 15 (3) (1990) *p*.341–405.
[18] J. NOURRIGAT. Systèmes sous-elliptiques II. *Inventiones Math.* 104 (1991), p. 377-400.
[19] J. NOURRIGAT. L^2 estimates and représentations of nilpotent groups. Cours à l'école CIMPA-UNESCO d'Analyse Harmonique. Wuhan (Chine), avril-mai 1991. A paraître (World Scientific).
[20] A. PERELOMOV. Generalized coherent states and their applications. Texts and monographs in Physics. Springer, 1981.
[21] M.A. SHUBIN. Pseudodifferential operators and spectral theory. Springer, 1978.
[22] J. SJOSTRAND. Singularités analytiques microlocales. *Astérisque* 95 (1982).
[23] A. UNTERBERGER. Quantification relativiste. *Mémoires de la S.M.F*, 44-45 (1991).

Département de Mathématiques
Université de Reims
Moulin de la Housse. B.P. 347. 51062 Reims Cédex.