C. Gérard

Complétude asymptotique pour des systèmes à 3-corps à longue portée

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 19, p. 1-9

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A19_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

COMPLETUDE ASYMPTOTIQUE POUR DES SYSTEMES A 3-CORPS A LONGUE PORTEE

C. GERARD

Exposé n° XIX

16 Février 1993

Complétude asymptotique pour des systèmes à 3−corps à longue portée

C.Gérard
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique 91128 Palaiseau Cedex
France

1 Introduction

Nous considérons dans cet exposé le problème de l'existence et de la complétude des opérateurs d'onde pour des hamiltoniens à $N-$corps avec des interactions à longue portée. Nous allons surtout nous intéresser au cas des systèmes de trois particules. Néanmoins nous ferons une remarque assez élémentaire mais semble-t'il nouvelle sur les systémes à $N-$corps formés de particules identiques.

Nous étudierons donc des hamiltoniens de la forme

$$H = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\Delta_i}{2m_i} + \sum_{i<j} V_{ij}(x_i - x_j), \tag{1.1}$$

agissant sur l'espace $L^2(\mathbb{R}^{3N})$. Après séparation du mouvement du centre de masse, ce qui correspond à restreindre le hamiltonien H à $L^2(X^{CM})$ où

$$X^{CM} := \{(x_1, \cdots, x_N) \mid \sum_{i=1}^{N} m_i x_i = 0\},$$

on peut considérer un tel hamiltonien comme un exemple d'un hamiltonien d'Agmon [Ag]. Cette classe de hamiltoniens est définie de la manière suivante. Fixons nous un espace euclidien X muni d'une forme quadratique g et d'une famille $\{X_a\}_{a\in\mathcal{A}}$ de sous-espaces vectoriels de X, contenant X et stable par l'intersection. On demande d'autre part que

$$\bigcap_{a\in\mathcal{A}} X_a = \{0\}.$$

On note par X^a l'espace $X_a^\perp$ et par x^a, x_a les projections orthogonales de x sur X^a et X_a. On peut doter $\mathcal{A}$ d'un structure de *treillis* (il serait sans doute plus correct de parler de semi-treillis car seul le supremum de deux éléments est défini de manière unique), en posant

$$a \leq b \text{ si } X_b \subset X_a.$$

On note $a_{\max}$ le plus grand élément de $\mathcal{A}$ et $a_{\min}$ le plus petit. Dans le cas des hamiltoniens à $N-$corps standard, l'ensemble $\mathcal{A}$ est l'ensemble des partitions de $\{1, \cdots, N\}$ et la structure de treillis définie plus haut coincide avec la structure naturelle sur l'ensemble des partitions d'un ensemble fini. La partition $a_{\max}$ est donc la partition triviale corespondant à un seul amas, et la partition $a_{\min}$ est la plus fine, correspondant au cas où le système est complètement décomposé.

Un hamiltonien d'Agmon est alors défini par

$$H = \frac{1}{2}D_x^2 + \sum_{a \in \mathcal{A}} V_a(x^a),$$

agissant sur $L^2(X)$, où $\frac{1}{2}D_x^2$ est le Laplacien associé à g et les V_a sont des potentiels réels tels que

$$|V_a(x^a)| \leq C\langle x\rangle^{-\mu}, \tag{1.2}$$

pour un exposant $\mu > 0$. Le cas $\mu > 1$ est le cas des interactions à *courte portée*, et le cas $0 < \mu \leq 1$ est le cas des interactions à *longue portée*. Notons qu'en toute rigueur une définition correcte dans le cas à longue portée demande une estimation sur quelques dérivées supplémentaires, le nombre optimal semblant être deux dérivées. Pour $a \in \mathcal{A}$, on définit

$$H^a := \frac{1}{2}D_{x^a}^2 + \sum_{b \leq a} V_b(x^b) = \frac{1}{2}D_{x^a}^2 + V^a(x^a),$$

qui représente le hamiltonien interne des amas de a, et

$$\begin{aligned} I_a &= \textstyle\sum_{b \not\leq a} V_b(x^b), \\ H_a &= \tfrac{1}{2}D_x^2 + V^a(x^a) = \tfrac{1}{2}D_{x_a}^2 + H^a \\ &= H - I_a. \end{aligned}$$

Le potentiel I_a représente donc la somme des interactions entre particules appartenant à deux amas de a qui sont différents. Enfin on notera

$$Z_a := X_a \setminus \bigcup_{b \not\subset a} X_b. \tag{1.3}$$

La famille $\{Z_a\}_{a \in \mathcal{A}}$ forme une partition de X

$$X = \bigcup_{a \in \mathcal{A}} Z_a, \ Z_a \cap Z_b = \emptyset, \ a \neq b. \tag{1.4}$$

Nous avons maintenant introduit assez de notations pour définir les *opérateurs d'onde.*

Définition 1.1 *Pour $a \in \mathcal{A}, a \neq a_{\max}$, on définit l'opérateur d'onde*

$$\Omega_a^+ := \text{s.} \lim_{t \to +\infty} e^{itH} e^{-itH^a - iS_a(t,D_{x_a})} E_{\text{pp}}(H^a). \tag{1.5}$$

Chaque opérateur d'onde correspond donc à un scénario selon lequel le système peut se comporter pour des temps grands. Ici $E_{\text{pp}}(H^a)$ désigne la projection sur les états propres de H^a. Dans le cas à courte portée, la fonction S_a est égale à $\frac{1}{2}t\xi_a^2$. On a alors

$$e^{-itH^a - iS_a(t,D_{x_a})} = e^{-itH_a}.$$

Dans le cas à longue portée, on doit modifier l'évolution externe des amas pour tenir compte de l'influence à l'infini du potentiel I_a. On prend donc pour S_a une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t S_a = \frac{1}{2}\xi_a^2 + I_a(0, \partial_{\xi_a} Sa)(t, \xi_a). \tag{1.6}$$

On peut d'autre part 'séparer' l'opérateur d'onde Ω_a^+ en écrivant

$$E_{\text{pp}}(H^a) = \oplus_{\lambda^\alpha \in \sigma_{\text{pp}}(H^a)} \pi_{\psi^\alpha},$$

où π_{ψ^α} est la projection propre sur le vecteur propre ψ^α de H^a pour la valeur propre λ^α.

Définition 1.2 *On dit que le hamiltonien H possède la propriété de* complétude asymptotique *si*

$$\bigoplus_{a \neq a_{\max}} Im(\Omega_a^+) = \mathcal{H}_c(H).$$

Deux remarques sont nécessaires. La première est que nous n'avons rien dit sur l'existence de la limite (1.5). Ce point est à tort considéré comme facile. En fait le problème de l'existence des opérateurs d'onde est aussi important que celui de la complétude, et comme lui il n'est pas complétement résolu. On peut par exemple imaginer que des vecteur propres de H^a décroissant très lentement à l'infini sont trop instables pour constituer des évolutions asymptotiques physiquement réalisables.

la deuxième remarque concerne le fait que la coordonée interne x^a est remplacée par 0 dans l'équation (1.6). Physiquement ceci vient du fait que l'on s'attend à ce que les amas soient assez bien localisés pour que leur extension spatiale soit $O(1)$ quand t tend vers l'infini. En fait c'est précisément ce point qui est la principale difficulté du cas à longue portée.

2 La vitesse asymptotique

Dans cette section nous allons introduire une observable fondamentale pour l'étude des sytèmes à $N-$corps, la *vitesse asymptotique.* Sa construction est due à Derezinski, en utilisant des idées de Graf.

Théorème 2.1 *Pour $f \in C^0_\infty(X)$ la limite forte*

$$\lim_{t \to +infty} e^{itH} f(\frac{x}{t}) e^{-itH} \tag{2.7}$$

existe. Il existe une unique famille P^+ d'opérateurs autoadjoints qui commutent telle que la limite (2.7) soit égale à $f(P^+)$. L'opérateur P^+ s'appelle la vitesse asymptotique.

L'observable P^+ donne une classification pertinente des états en fonction de leur comportement asymptotique. En fait grâce à (1.3), (1.4), on peut définir

$$\tilde{Z}_a := E_{Z_a}(P^+)(L^2(X)),$$

et on a (comparer avec (1.4) et la définition 1.2)

$$\bigoplus_{a \in \mathcal{A}} \tilde{Z}_a = L^2(X), \ \tilde{Z}_a \perp \tilde{Z}_b, \ a \neq b.$$

L'espace $\tilde{Z}_a$ est l'espace des états qui sont *$a-$séparés.* Ceci signifie que l'évolution de tels états se sépare en amas dont la taille est $o(t)$ et la séparation des centres de masse $O(t)$.

Il est particulièrement important d'étudier l'espace $Z_{a_{\max}}$, que l'on peut appeler espace des états *quasi-bornés.* En effet $\tilde{Z}_{a_{\max}}$ est l'espace des états ψ tels que la 'taille' de $e^{-itH}\psi$ soit d'ordre $o(t)$ quand t tend vers l'infini. Clairement on a

$$E_{\mathrm{pp}}(H) \subset \tilde{Z}_{a_{\max}}.$$

En fait on a aussi le résultat suivant, qui résulte d'arguments de Sigal-Soffer [S.S1] et Graf [Gr] en utilisant l'estimation de Mourre [Mo], [P-S-S]

Théorème 2.2

$$E_{\mathrm{pp}}(H) = \tilde{Z}_{a_{\max}}.$$

Ce résultat peut aussi être interprété en disant que si la taille de $e^{-itH}\psi$ est $o(t)$, alors elle est en fait $O(t^0)$. Cette propriété est fausse en mécanique classique (contrairement au Théorème 2.1, qui reste valable) et aussi si l'on rajoute à H un perturbation dépendant du temps $W(t, x)$.

Les théorèmes 2.1 et 2.2 impliquent assez facilement la complétude asymptotique dans le cas à courte portée, résultat démontré originellement par Sigal-Soffer [S.S1].

Pour traiter le cas des interactions à longue portée, il faut plus d'informations sur la taille des amas pour les états ψ dans $\tilde{Z}_a$. En fait on a le résultat suivant, démontré par Derezinski:

Théorème 2.3 *Soit $\psi \in \tilde{Z}_a$. Alors il existe $C > 0$ tel que*

$$e^{-itH}\psi = F(\frac{x}{Ct^\delta} \leq 1)e^{-itH}\psi + o(1),$$

pour $\delta = \frac{2}{2+\mu}$.

Ce résultat signifie que la taille des amas, a priori $o(t)$, est en fait $O(t^{\frac{2}{2+\mu}})$. La même estimation a lieu pour le problème classique, où elle est optimale. Il existe en effet des trajectoires telles que la taille des amas est équivalente à $t^{\frac{2}{2+\mu}}$. A l'aide du Théorème 2.3, on démontre (voir [De]) l'existence et la complétude asymptotique des opérateurs d'onde pour $\mu > \sqrt{3} - 1$. Il est intéressant de noter que cette borne apparait également dans un travail antérieur de Enss [E], où ce résultat était démontré pour le cas $N = 3$ par une approche différente. Sigal et Soffer [S.S2] ont d'autre part montré la complétude asymptotique pour des exposants $\mu > 1 - 2^{-N-2}$.

La borne $\sqrt{3} - 1$ qui semble artificielle est en fait assez facile à comprendre: pour un état $\psi \in \tilde{Z}_a$, on considère le potentiel inter-amas I_a le long de l'évolution $e^{-itH\psi}$. On écrit

$$\begin{aligned} & I_a(x^a, x_a)e^{-itH}\psi \\ & = (I_a(x_a) + x^a\nabla_{x^a}I_a(x))\, e^{-itH}\psi \qquad (2.8) \\ & = \left(I_a(x_a) + O(t^\delta)O(t^{-1-\mu})\right) e^{-itH}\psi. \end{aligned}$$

Si $\delta < \mu$, c'est à dire $\mu > \sqrt{3} - 1$, le terme $x^a\nabla_{x^a}I_a(x)$ est intégrable en t le long de l'évolution, et peut donc être remplacé par 0. On peut donc remplacer le hamiltonien H par

$$\tilde{H}_a := H^a + \frac{1}{2}D_{x_a}^2 + I_a(x_a).$$

La propriété importante de $\tilde{H}_a$ est que l'évolution dans les variables x^a et x_a est séparée. La complétude asymptotique en découle ensuite facilement.

3 Résultats

Nous allons présenter dans cette section deux résultats sur la complétude asymptotique pour des potentiels décroissant plus lentement que $\sqrt{3} - 1$. Le premier résultat est assez élementaire et concerne le cas des systèmes de *particules identiques*.

Définition 3.1 *Le Hamiltonien*

$$H = \sum_{i=1}^{N} -\frac{\Delta_i}{2m_i} + \sum_{i<j} V_{ij}(x_{i-x_j}$$

décrit un système de particules identiques *s'il existe un potentiel V tel que*

$$V_{ij}(x) = m_i m_j V(x),\ \forall i \neq j.$$

Il est clair que si toutes les particules sont identiques, on a $m_i = m_j, V_{ij} = V$ et la propriété est vérifiée. On obtient un autre exemple en 'regroupant' des paquets de particules identiques pour en faire de nouvelles, ce qui correspond à additionner les masses et les interactions. On a alors le théorème suivant:

Théorème 3.2 *Soit H un hamiltonien décrivant un système de particules identiques avec un potentiel V tel que*

$$|\partial_x^\alpha V(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|-\mu},\ |\alpha| \leq 2.$$

Alors on a existence et complétude des opérateurs d'onde pour

$$\mu > \frac{\sqrt{17}-3}{2} \sim 0,56.$$

La preuve de ce théorème repose sur l'observation suivante: sous les hypothèses précédentes, on a

$$\nabla_{x^a} I_a(x_a) = 0,\ a \in \mathcal{A}.$$

Il suffit alors d'utiliser la formule de Taylor à l'ordre deux dans (2.8).

Le deuxième résultat que nous allons discuter plus longuement concerne le cas des hamiltoniens à 3 corps. Décrivons d'abord le résultat. Nous supposerons que $N = 3$ et que les potentiels V_a vérifient les conditions suivantes:

$$(H1):\ |\partial_x^\alpha V_a(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|-\mu},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ et } \frac{1}{2} < \mu \leq 1.$$

(H2): pour $a \neq a_{\max}$, $V_a(x) = V_{a,s}(x) + V_{a,l}(|x|)$, où $V_{a,s}$ satisfies

$$|\partial_x^\alpha V_{a,s}(x)| \leq C_\alpha \langle x \rangle^{-|\alpha|-\mu_s},\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

pour $\mu_s > 1 + \mu/2$.

(H3): pour $a \neq a_{\min}$, $V_a(x)$ satisfait la condition du viriel:

$$2V_a(x) + x.\nabla_x V_a(x) \leq -C\langle x\rangle^{-\mu}, \text{ pour } C > 0.$$

Remarquons que la condition de viriel ne signifie pas du tout que le potentiel soit répulsif. Par exemple des potentiels comme $V(x) = -c|x|^{-\mu}$ pour $c > 0$ et $0 < \mu < 2$ vérifient *(H3)*. Par contre la condition du viriel entraine que 0 n'est pas une valeur propre de H^a pour $a \neq a_{\max}$. On a alors le résultat suivant:

Théorème 3.3 *Sous les hypothèses (H), les opérateurs d'onde existent et sont complets.*

Nous allons simplement donner quelques idées heuristiques de la preuve de ce résultat et renvoyer le lecteur intéressé à [G]. Un peu de travail montre qu'il suffit de concentrer son attention sur certains états, que l'on peut appeler *états exceptionnels.* Ces états peuvent être décrits de la manière suivante. Ce sont les états dont l'évolution consiste en une paire de particules (par exemple $(1,2)$) dont l'énergie interne tend vers 0, et en une troisème particule qui s'éloigne linéairement des deux autres. Ces états sont très délicats à classer car la paire n'est pas fortement liée. En d'autres termes elle hésite entre devenir un état lié et se séparer linéairement. Pour trancher ce dilemne, on montre qu'en fait de tels états ne peuvent pas exister. Notons E l'espace vectoriel des états exceptionnels La preuve consiste à montrer suffisamment d'estimations sur l'évolution des états de E. Pour celà nous nous inspirons du comportement du problème classique correspondant. Il suffit en fait de s'intéresser à la paire $(1,2)$, en remplaçant l'action de la troisième particules par un potentiel dépendant du temps. On notera donc par $U(t)$ cette évolution effective qui agit uniquement sur la paire $(1,2)$. Le groupe unitaire $U(t)$ est engendré par le hamiltonien

$$H(t) := H + I(t,x),$$

où $H = \frac{1}{2}D_x^2 + V(x)$ est maintenant un hamiltonien à 2 corps décrivant la paire $(1,2)$ et $I(t,x)$ décrit l'interaction avec la troisième particule.

La première estimation est analogue à celle du Théorème 2.3: on notera par $F(\Omega)$ une fonction de troncature supportée près d'un ensemble Ω. On a

$$U(t)\psi = F(\frac{|x|}{t^\delta} \leq C)U(t)\psi + o(1), \ \forall\psi \in E. \tag{3.9}$$

Une autre estimation importante est

$$U(t)\psi = F(|H|t^\mu \leq C)U(t)\psi + o(1), \ \forall\psi \in E. \tag{3.10}$$

On utilise ensuite la condition de viriel pour obtenir

$$U(t)\psi = F(\frac{|x|}{t^\delta} \geq C_1)U(t)\psi + o(1), \ \forall\psi \in E. \tag{3.11}$$

On sait donc maintenant que $U(t)\psi$ vit dans une couronne $\{C_1 t^\delta \leq |x| \leq C t^\delta\}$. Ce comportement est incompatible avec la complétude asymptotique. Il nous faut donc montrer que $\psi = 0$. Pour celà on utilise la condition *(H2)* pour se ramener à un problème unidimensionnel. Au passage on montre aussi l'amélioration suivante de (3.10)

$$U(t)\psi = F(|H| t^{\mu+\delta\mu/2} \leq C) U(t)\psi + o(1),\ \forall \psi \in E. \tag{3.12}$$

On peut maintenant obtenir une localisation beaucoup plus précise sur $e^{-itH}\psi$. On introduit pour celà une solution de l'équation eikonale

$$\frac{1}{2}(\partial_x S(x))^2 + V(x) = 0,$$

qui se résout de façon élémentaire en dimension 1. Puis on note par $K(t)$ la solution de

$$\dot{K}(t) = \partial_x S(K(t)), K(0) = 0,$$

qui est aussi une solution des équations du mouvement pour le potentiel V. On a alors l'estimation suivante

$$\begin{aligned} &U(t)\psi \\ &= F(|\,|x| - K(t)\,| \leq C t^{\frac{1}{2}+\epsilon} U)(t)\psi + o(1),\ \forall \psi \in E, \epsilon > 0. \end{aligned} \tag{3.13}$$

On utilise enfin la formule de Taylor pour écrire

$$\begin{aligned} &I(t,x) = I(t,|x|,\tfrac{x}{|x|}) \\ &I(t,K(t),\tfrac{x}{|x|}) + O(t^{\frac{1}{2}+\epsilon}) O(t^{-1-\mu}). \end{aligned}$$

Pour $\mu > \frac{1}{2}$, le terme d'erreur est intégrable en t, donc peut être remplacé par 0. Le hamiltonien H commute avec la nouvelle évolution engendrée par $H + I(t,|x|,\frac{x}{|x|})$. Il en résulte que les états exceptionnels sont en fait des vecteurs propres de H pour la valeur propre 0. Or sous la condition de viriel 0 n'est pas une valeur propre de H, et on a enfin

$$E = \{0\},$$

ce qui montre la complétude asymptotique.

Bibliographie

[Ag] S.Agmon: *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Princeton University Press, Princeton 1982.

[De] J.Derezinski: Asymptotic Completeness for $N-$particle long -range Quantum Systems, to appear in Ann. of Math.

[E] V.Enss: Long range scattering of two- and three-body quantum systems, Proceedings of the Conference 'Equations aux dérivées partielles' Saint Jean de Monts, Ecole Polytechnique 1989.

[G] C.Gérard: Asymptotic completeness for $3-$particle long-range systems, to appear in Inventiones Math.

[Gr] G.M.Graf: Asymptotic Completeness for $N-$body Short Range Quantum Systems : A new proof, Comm. in Math. Phys. 132 (1990) p 73-101.

[Mo] E.Mourre: Absence of singular continuous spectrum for certain selfadjoint operators, Comm. in Math. Phys., 78 (1981) 519-567.

[P-S-S] P.Perry, I.Sigal, B.Simon: Spectral analysis of $N-$body Schrödingeroperators, Ann. Math. Vol 114 (1981), p 519-567.

[S.S1] I.M Sigal-A.Soffer: The $N-$particle scattering problem: asymptotic completeness for short range quantum systems, Ann. of Math. 125 (1987) 35-108.

[S.S2] I.M.Sigal-A.Soffer: Asymptotic completeness of N particle long range scattering. preprint. 1991.