Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

W. M. Wang

# Développement asymptotique de la densité d'états pour l'opérateur de Schrödinger aléatoire avec champ magnétique

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1992-1993), exp. n° 18, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A18_0>

*CENTRE*
*DE*
*MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

---

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

# DEVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DENSITE D'ETATS POUR L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER ALEATOIRE AVEC CHAMP MAGNETIQUE

**W.M. WANG**

Exposé n° XVIII

27 Avril 1993

# DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE DE LA DENSITÉ D'ÉTATS POUR L'OPÉRATEUR DE SCHRŐDINGER ALÉATOIRE AVEC CHAMP MAGNÉTIQUE

WEI-MIN WANG

Université Paris-Sud

## I. INTRODUCTION

Nous étudions la densité d'états de l'opérateur de Schrődinger avec champ magnétique uniforme agissant sur $L^2(\mathbb{R}^2)$

$$P^{\omega}_{B,V} = (D_x + By)^2 + D_y^2 + V^{\omega}(x,y). \tag{1}$$

où $B > 0$. Soit $v$ une fonction $C_0^\infty$, le potentiel $V$ est défini par

$$V(\overline{x}) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^2} \alpha_i v(\overline{x} - i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}^2} \alpha_i v_i(\overline{x}),$$

où $\overline{x} = (x,y)$, $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\mathbb{Z}^2}$ forme un champ aléatoire, c'est-à-dire une famille indexée par $\mathbb{Z}^2$ de variables aléatoires sur un espace probabilisé $(\Omega, P)$. On note $< f >$ l'espérance de la variable aléatoire $f$. On peut toujours supposer que $\Omega = \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^2}$. Dans ce cas,

$$\alpha_\omega(j) = \omega(j),$$

et les opérateurs de translation $T_i$ $(i \in \mathbb{Z}^2)$ sur $\Omega$ sont définis par

$$T_i\omega(j) = \omega(j - i).$$

On prend

$$dP = \prod_{i\in\mathbb{Z}^2} g(\alpha_i) d\alpha_i$$

Nous remercions Johannes Sjostrand pour de nombreuses discussions ainsi que l'institut Mittag-Leffler de son accueil pendant qu'une partie de ce travail était effectué.

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

où $g$ est une fonction $C_0^\infty$. On dit que les $\alpha_i$ sont indépendants et identiquement distribués (i.i.d.). On remarque que l'action des $T_j$ est ergodique sur $(\Omega, P)$ : si $A \subset \Omega$ vérifie

$$\forall j \in \mathbb{Z}^2, T_j^{-1}A = A$$

alors $P(A) = 0$ ou 1.

Quand $V = 0$, le Hamiltonien $P_{B,0}$ a pour valeurs propres $\lambda_n = (2n+1)B$, $n \in \mathbb{N}$ avec multiplicité infinie. Ce sont les niveaux de Landau.

On définit les "translations magnétiques" $\tau_j^B$ ($j \in \mathbb{Z}^2$) par

$$\tau_j^B u(x) = e^{\frac{1}{2}iB(x\wedge j)}u(x-j)$$

où $x \wedge j$ est le déterminant de $(x,j)$ dans la base canonique. On a les relations

$$\begin{aligned}
&[P_{B,0}, \tau_j^B] = 0\\
&\tau_j^B\tau_k^B = e^{-\frac{1}{2}iB(j\wedge k)}\tau_{j+k}^B\\
&\tau_j^B\tau_k^B = e^{-iB(j\wedge k)}\tau_k^B\tau_j^B.
\end{aligned}$$

Quand $V \neq 0$, on a

$$\tau_j^B P_{B,V}^\omega \tau_{-j}^B = P_{B,V}^{T_j\omega}.$$

Ainsi, par les arguments standard [CFKS] [Pa], le spectre de $P_{B,v}^\omega$, $\sigma(P_{B,v}^\omega)$ est presque sûrement constant par rapport à $\omega$, c'est-à-dire

$$\sigma(P_{B,v}^\omega) = \sigma(P_{B,v}) \qquad \text{p.s.}$$

où $\sigma(P_{B,v})$ est un ensemble non-aléatoire. Si de plus on prend supp $g \subset ]-a,a[$ avec $a < B$, alors $\sigma(P_{B,v}^\omega)$ est contenu dans la réunion $\cup_n[\lambda_n - a, \lambda_n + a]$. Nous allons démontrer plus loin que la densité d'états $\rho^\omega$ est aussi presque sûrement non-aléatoire:

$$\rho^\omega = \rho \qquad \text{p.s.}$$

où $\rho$ est une fonction non aléatoire.

La densité d'états de l'opérateur de Schrődinger avec champ magnétique a été étudiée en premier par le physicien Wegner [We] [BGI]. C'est une quantité mesurable physiquement. Dans la limite des champs forts $B >> 1$, Wegner a développé un argument heuristique. Selon son argument, si l'on ne s'inéresse qu'à la densité d'états pour les basses énergies, on ne doit prendre en compte que le niveau de Landau le plus bas, et l'on peut négliger la contribution des autres niveaux de Landau. Ainsi Wegner a pu calculer exactement le premier terme de la densité d'états pour un potentiel donné par un bruit blanc gaussien.

Dans cet article, nous justifions l'approximation de Wegner en un certain sens faible, et obtenons un développement asymptotique pour la densité d'états $\rho$. Par commodité d'exposition, nous supposerons dans la suite que $v$ est à support dans un carré unitaire centré à l'origine. Nous démontrons que pour $B$ assez grand ($B >> 1$), pour tout $N$ et pour une fonction $f \in C_0^\infty$ telle que

$$|\partial^j f| \leq \mathbf{O}(B^{Nj}) \tag{1.1}$$

et à support disjoint de $\{(2n+1)B, n \in \mathbb{N}\}$, on a

$$\int f(t)d\rho(t) = \int f(t)\rho_0(t)dt + h\int f(t)\rho_1(t)dt + \cdots + h^m \int f(t)\rho_m(t)dt + \cdots + \mathbf{O}(h^\infty) \tag{1.2}$$

où les $\rho_m(t)$ sont des fonctions $C^\infty$ et $h = B^{-1} << 1$ est le petit paramètre semi-classique. Le résultat de Wegner correspond au terme d'ordre 0 dans le développement.

Si on prend un $v$ ne vérifiant pas l'hypothèse de support ci-dessus (en sorte que les supports des $v_i$ s'intersectent), le développement (1.2) tient pour toute fonction $f$ satisfaisant (1.1). La condition supplémentaire sur le support de $f$ est un artefact du modèle simplifié utilisé.

Nous utilisons la "méthode de Grushin" pour étudier ce problème comme Helffer et Sjőstrand [HS] dans le cas où $V$ est périodique. Pour tout $z'$ dans $[\lambda_n - a, \lambda_n + a]$, l'étude de $P^\omega_{B,v} - z'$ peut être réduit à l'étude d'un opérateur effectif unidimensionnel dénoté $E_{-+}$: $z' \in \sigma(P^\omega_{B,v})$ si et seulement si $0 \in \sigma(E_{-+})$. Le symbole de $E_{-+}$ a un développement asymptotique en $h$, le symbole principal étant $h(V(x,\xi) - z)$ où $z = z' - \lambda_n$.

Le Hamiltonien effectif fournit le point de départ de notre analyse, qui est très différente de celle qui est faite par Helffer et Sjöstrand pour un $V$ périodique [HS] [S]. Les paramètres supplémentaires $\alpha_i$ et les densités de probabilité associées $g(\alpha_i)$ permettent d'utiliser des arguments d'échelle (voir le section IV). A l'ordre $h^\infty$, $E_{-+}(x,\xi)$ ne dépend que du potentiel et de ses dérivées en $(x,\xi)$. Pour $|\operatorname{Im} z'| \geq h^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$, $E_{-+}^{-1}(\omega)$ admet une paramétrixe, c'est-à-dire un développement asymptotique en puissances de $h$, le premier terme étant

$$\frac{1}{h(V^\omega - z)}.$$

Afin d'étudier la densité d'états, nous avons besoin de contrôler les régions non elliptiques où $|\alpha_j v_j - z| << 1$. Par le théorème ergodique, la densité d'états $\rho^\omega$ existe presque sûrement et est égale à la densité d'états moyenne $\rho$ (voir la section III). Une fois qu'on a pris la moyenne, on a

$$< E_{-+}^{-1}(x,\xi) >=< E_{-+}^{-1}(x+i_1, \xi+i_2) >$$

$((i_1, i_2) \in \mathbb{Z}^2)$. Ainsi on n'a besoin que d'étudier $< E_{-+}^{-1}(x,\xi) >$ pour $(x,\xi) \in \mathbb{E}$ avec $\mathbb{E}$ un carré unitaire centré à l'origine.

En raison de la nature "locale" de l'opérateur $E_{-+}^{-1}(x,\xi)$; l'influence des régions non-elliptiques sur $E_{-+}^{-1}(x,\xi)$ décroit quand $j$ croit. Pour contrôler ceci, nous effectuons une dilatation complexe en $\alpha_j$: $\alpha_j \to \alpha_j e^{i\theta}$, où $\theta_j \simeq 1/|j|$.

C'est le principe de notre argument d'échelle en dimension 2. ( La forme précise de la relation d'échelle dépend crucialement de la dimension.) Nous pouvons de cette manière contrôler les régions non-elliptiques jusqu'à l'échelle $L \leq \mathbf{O}(h^{-N})$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Ainsi, pour tout $z$ tel que $\mathrm{Re}\, z \neq 0$, la paramétrixe pour $< E_{-+}^{-1} >$ est valable pour $|\,\mathrm{Im}\, z| \geq \mathbf{O}(h^N)$. Nous étudions l'intégrale $\int f(t) d\rho(t)$ pour toute $f$ telle que $|\partial^j f| \leq \mathbf{O}(h^{-Nj})$ à support disjoint de $\{(2n+1)B, n \in \mathbb{N}\}$ et démontrer que les $\rho_i$ sont des fonctions $C^\infty$ en dehors de $(2n+1)B$.

Par une procédure standard, on peut intégrer $d\rho$ contre toute fonction Hőlderienne $f \in C^\alpha, 0 < \alpha < 1$ avec une erreur qui est d'ordre $\mathbf{O}(h^\infty)$.

Ce résultat devrait être comparé avec le cas $V$ périodique:

$$V(\overline{x}) = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} v(\overline{x} - i),$$

c'est-à-dire $\alpha_i = 1$ pour tout $i \in \mathbb{Z}^2$. Là, on a besoin de conditions beaucoup plus fortes sur $f$, à savoir $|\partial^j f| \leq \mathbf{O}(h^{-j/(2+\epsilon)}) (\epsilon > 0)$. De plus, dans le cas périodique, $\rho(t)$ a des singularités. Bien sûr, ceci est dû au fait que la paramétrixe pour $E_{-+}^{-1}$ ne vaut que pour $|\,\mathrm{Im}\, z| \geq h^{\frac{1}{2}-\epsilon}$.

Il est bien connu maintenant des physiciens que les effets de localisation [Bel], ce qu'on définit comme le fait que $P_{B,v}^{\omega}$ a un spectre ponctuel avec fonctions propres localisées, sont cruciaux pour l'étude de l'effet Hall quantique. Mais jusqu'ici on n'avait essentiellement aucun résultat dans la littérature mathématique sur la localisation de l'opérateur de Schrődinger avec champ magnétique. Afin de prouver la localisation, une première étape est de contrôler la densité d'états. Nous espérons que notre résultat pourra contribuer à la recherche dans cette direction.

On considère l'opérateur $P^{\omega}_{B,v}$ de l'introduction. Par un argument standard il existe un opérateur unitaire $U$ tel que $P^{\omega}_{B,V}$ est unitairement équivalent à

$$\widetilde{P}^{\omega}_{B,V} = UP^{\omega}_{B,V}U^{-1} = B(D_y^2 + y^2) + V^W(y + B^{-1/2}y, B^{-1}D_x - B^{P1/2}D_y).$$

(Voir la proposition 1.10 de [HS1]). En renormalisant, on obtient

$$H^{(n)}_{B,V} = D_y^2 + y^2 - (2n+1) + B^{-1}V^W(x + B^{-1/2}y, B^{-1}D_x - B^{-1/2}D_y)$$

où $n$ est le niveau de Landau auquel nous nous intéressons. Comme nous l'avons mentionné plus haut, $B^{-1} = h$ est le paramètre semi-classique.

**Classes de symboles.**

Rappelons qu'un symbole $Q(x, \xi, h)$ est dans la classe $S^0(\mathbb{R}^2)$ s'il vérifie

(2) $$\exists h_0, \forall \alpha \in \mathbb{N}^2, \exists C_\alpha, \forall (x,\xi) \in \mathbb{R}^2, \forall h \in ]0, h_0], |D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\alpha_2} Q(x,\xi,h)| \leq C_\alpha.$$

On lui associe alors un opérateur pseudo-différentiel (o.p.d.) (le $h$-quantifié de Weyl)

$$(Q^W(x, hD_x, h)u)(x) = (2\pi h)^{-1} \int e^{(i/h)<x-y,\xi>} Q(\frac{x+y}{2}, \xi, h)u(y)dyd\xi.$$

On définit de manière analogue les classes de symboles à valeurs opérateurs:

$$S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^k, B_y^{k'}))$$
$$S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^k, \mathbb{C}))$$
$$S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(\mathbb{C}, B_y^k))$$

où les $B_y^k$ ($k$ entier positif ou nul) sont définis par récurrence:

$$B_y^0 = L^2(R_y)$$
$$B_y^k = (1 + D_y^2 + y^2)^{-1} B_y^{k-1},$$

$B_y^{-k}$ est le dual de $B_y^k$, et $\mathcal{L}(E,F)$ désigne l'ensemble des opérateurs bornés de $E$ dans $F$.

Soit $z$ un paramètre complexe tel que $hz$ appartient au disque ouvert $B(0,1)$ de centre 0 et rayon 1. Soit $R_-^{(n)}$ l'opérateur de $L^2(R_x)$ dans $L^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$ tel que

$$(R_-^{(n)}v_-)(x,y) = h_n(y)v_-(x)$$

où $h_n$ est la $n$-ème fonction propre de l'oscillateur harmonique, définie par

$$h_n(y) = \beta_n(\partial_y - y)^n e^{-y^2/2}$$

avec la constante $\beta_n$ choisie en sorte que $\|h_n\| = 1$. L'opérateur $R_+^{(n)}$ de $L^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$ dans $L^2(R_x)$ est défini par

$$u \mapsto (R_+^{(n)}u)(x) = \int h_n(y)u(x,y)dy.$$

On remarque que $R_+^{(n)}$ est l'adjoint de $R_-^{(n)}$. $R_-^{(n)}$ est dans $S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(\mathbb{C}, B_y^k))$ et $R_+^{(n)}$ dans $S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^{k+2}, \mathbb{C}))$. Nous étudions l'opérateur de Grushin associé:

$$\mathcal{P}_{B,V}(x,\xi) = \begin{pmatrix} H_{B,V}^{(n)} - hz & R_-^{(n)} \\ R_+^{(n)} & 0 \end{pmatrix}$$

où

$$H_{B,V}^{(n)} = D_y^2 + y^2 - (2n+1) + hV^W(x + h^{1/2}y, \xi - h^{1/2}D_y)$$

est dans $S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^{k+2}, B_y^2))$. L'opérateur $\mathcal{P}$ est dans la classe $S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^{k+2} \times \mathbb{C}, B_y^k \times \mathbb{C}))$ pour tout $k$ entier.

**1. Le cas $V = 0$.**

On a

$$\mathcal{P}_{B,0}^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} D_y^2 + y^2 - (2n+1) - hz & R_-^{(n)} \\ R_+^{(n)} & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour $|hz| \leq 1$, $P_{B,0}^{(n)}(z)$ est inversible [HS], et son inverse, noté $\mathcal{E}_0^{(n)}(z)$ s'écrit

$$P_{B,0}^{(n)}(z)^{-1} = \mathcal{E}_0^{(n)}(z) = \begin{pmatrix} E_0^{(n)}(z) & E_{+,0}^{(n)} \\ E_{-,0}^{(n)} & E_{-+,0}^{(n)}(z) \end{pmatrix}.$$

Nous décomposons $L^2(\mathbb{R}^2_{x,y})$ de la manière suivante:

$$L^2(\mathbb{R}^2_{x,y}) = \sum_{\ell} \mathbb{C}h_\ell(y) \otimes L^2(R_x) = \bigoplus_{\ell} E_\ell.$$

Il est bien connu que $E_0^{(n)}(z)$ est un o.p.d. dont le symbole de Weyl $\rho_0(x,y,\xi,\eta,z)$ satisfait

$$\rho_0(x,y,\xi,\eta;z) = \rho_0(y,\eta;z).$$

$\rho_0$ est holomorphe en $z$ dans $B(0,h^{-1})$ et est dans la classe $S^0$. Dans la décomposition $\bigoplus_\ell E_\ell$, nous avons:

$$(E_0^{(n)}(z))_{\mathcal{L}(E_\ell,E_k)} = (1 - \delta_{n,\ell})\delta_{\ell,k}/(2(\ell - n) - z)$$

(où on a identifié $E_\ell$ avec $L^2(R_x)$). On a aussi

$$E_{0,+}^{(n)} = R_-^{(n)}; \qquad E_{0,-}^{(n)} = R_+^{(n)}; \qquad E_{-+,0}^{(n)}(z) = hz.$$

## 2. Le cas $V \neq 0$.

Par la méthode standard de perturbation, on peut prouver [HS] qu'il existe un $h_0$ tel que pour tout $h \in ]0, h_0]$, $\mathcal{P}_{B,V}^{(n)}$ est inversible d'inverse

$$\mathcal{E}(x,\xi;z) = \mathcal{P}_{B,v}^{(n)\,-1} = \begin{pmatrix} E(x,\xi;z) & E_+(x,\xi;z) \\ E_-(x,\xi;z) & E_{-+}(x,\xi;z) \end{pmatrix},$$

où $\mathcal{E}(x,\xi) \in S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B^k_y \times \mathbb{C}, B^{k+2}_y \times \mathbb{C}))$ pour tout $k$ entier. En particulier a-t-on pour tout $k$

$$\begin{aligned} E_+(x,\xi) &\in S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(\mathbb{C}, B^{k+2}_y)) \\ E_-(x,\xi) &\in S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B^k_y, \mathbb{C})) \\ E_{-+}(x,\xi)/h &\in S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(\mathbb{C},\mathbb{C})) = S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi}). \end{aligned}$$

$E_{-+}$ est appelé le hamiltonien effectif; et on a

$$hz \in \operatorname{Sp} H_{B,V}^{(n)} \iff 0 \in \operatorname{Sp} E_{-+}.$$

C'est cet opérateur que nous allons étudier dans la suite.

Si $hz \notin \operatorname{Sp} H_{B,V}^{(n)}$, alors

$$(H_{B,V}^{(n)} - hz)^{-1} = E(z) - E_+(z) E_{-+}(z)^{-1} E_-(z).$$

De plus, on peut démontrer [HS] qu'il existe $B_0 = h_0^{-1}$ tel que pour tout $B$ avec $B \geq B_0$, $E_{-+}$ est un o.p.d. analytique en $z$ et $\alpha_i$ ($i \in \mathbb{Z}^2$) pour $z \in B(0, h^{-1})$ et $\alpha_i \in B(0,a)$, et est réel pour $z$ réel. $E_{-+}$ a un développement asymptotique en $h$:

$$E_{-+} = \sum_{n \geq 0} h^{n+1} Q_n + \mathbf{O}(h^\infty).$$

Le symbole principal

$$Q_0(x,\xi;z) = (V(x,\xi) - z).$$

Le terme suivant est

$$Q_1(x,\xi;z) = \frac{2n+1}{4} \operatorname{Tr} \operatorname{Hess} V(x,\xi)$$

où Hess désigne la hessienne.

Soit $f \in C^0(\mathbb{R})$; alors $f(P^\omega_{B,V})$ est continu. Comme

$$\tau_j^{-1} P^\omega_{B,V} \tau_j = P^{T_j\omega}_{B,V};$$

nous avons

$$\tau_j^{-1} f(P^\omega_{B,V}) \tau_j = f(P^{T_j\omega}_{B,V}).$$

Soit $K^\omega_{f,B}(x,y)$ le noyau de $f(P^\omega_{B,V})$, nous avons ainsi

$$K^\omega_{f,B}(x+j, x+j) = K^{T_j\omega}_{f,B}(x,x)$$

pour tout $j \in \mathbb{Z}$. Par le théorème ergodique, nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{\Lambda\to\mathbb{Z}^2} \frac{1}{\Lambda} \sum_{j\in\Lambda} K^{T_j\omega}_{f,B}(x,x) &= \int K^\omega_{f,B}(x,x) P(d\omega) \quad \text{p.s.} \\ &= < K_{f;B}(x,x) > \end{aligned} \tag{3.1}$$

où $< \quad >$ est comme précédemment l'espérance par rapport à $\omega$. Définissons

$$\tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{2\pi R^2} \operatorname{Tr}(\chi'_R f(P^\omega_{B,V}) \chi'_R)$$

où $\chi'_R$ est une fonction $C_0^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ avec support dans le disque de rayon $R$ et de centre 0, et égale à 1 dans le disque de centre 0 et de rayon $R-1$.

Nous allons montrer ci-dessous que $\tilde{\operatorname{Tr}}(P^\omega_{B,V})$ existe et est finie. Il résultera alors de $*$

$$\begin{aligned} \tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) &= (\operatorname{vol} \mathbb{E})^{-1} \int_{\mathbb{E}} K^\omega_{f,B}(x,x) P(d\omega) \\ &= (\operatorname{vol} \mathbb{E})^{-1} \int_{\mathbb{E}} < K_{f,B}(x,x) > dx \qquad \text{p.s.} \\ &= < \tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) > \end{aligned}$$

Nous pouvons alors associer à $\tilde{\operatorname{Tr}}$ une mesure positive $\rho_{B,V}$. C'est la *mesure de densité d'états*. Nous avons donc

$$< \tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) >= \int f(t) \rho_{B,V}(dt)$$

pour toute $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, nous pouvons utiliser le calcul fonctionnel habituel [HS] [S] et obtenir pour $A$ auto-adjoint

$$f(A) = \frac{i}{2\pi} \int \partial_{\bar{z}} \tilde{f}(z)(z - A)^{-1} d\bar{z} \wedge dz,$$

où $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{C})$ est une extension presque analytique de $f$, c'est-à-dire une fonction $f$ telle que $\partial_{\bar{z}} \tilde{f}$ est nulle sur $\mathbb{R}$ à l'ordre infini. Pour que $f(A)$ soit un opérateur pseudo-différentiel, nous devons choisir $f$ dans une classe restreinte de fonctions dans $C_0^\infty$ que nous préciserons plus tard.

Utilisant la même transformation unitaire $U$ que celle que nous avons utilisée pour $P_{B,V}^{\omega}$, nous obtenons

$$\operatorname{Tr} \chi'_R f(P_{B,V}^{\omega}) \chi'_R = \operatorname{Tr} U \chi'_R U^{-1} U f(P_{B,V}^{\omega}) U^{-1} U \chi'_R U^{-1}.$$

Posant $\chi_R = U\chi'_R U^{-1}$, le symbole de $\chi_R$ est $\chi_R^W(x, y, \xi, \eta) = \chi'_R(x + h^{1/2}y, \xi - h^{1/2}\eta)$, où l'exposant $W$ indique que l'on prend la $h$-quantification de Weyl en $(x, \xi)$ et la 1-quantification de Weyl par rapport à $(y, \eta)$. On a

$$\chi_R^W(x + h^{1/2}y, \xi - h^{1/2}\eta) \in S(\mathbb{R}^2_{x,\xi}; \mathcal{L}(B_y^{-k_1}, B_y^{-k_2}))$$

avec $0 \le k_1 \le k_2$. Pour tout $z$ tel que $|\operatorname{Im} z| \neq 0$, nous avons

$$((2n+1)B + z - P_{B,V}^{\tilde{\omega}})^{-1} = h(hz - H_{B,V})^{-1} = h[E(z) - E_+(z)E_{-+}^{-1}(z)E_-(z)].$$

Puisque $E(z)$ est holomorphe en $z$, nous avons

$$\begin{aligned} U f(P_{B,V}^{\omega}) U^{-1} &= f(\widetilde{P}_{B,V}^{\omega}) \\ &= \frac{-ih}{2\pi} \int \partial_{\bar{z}} \tilde{f} E_+(z) E_{-+}^{-1}(z) E_-(z) dz \wedge d\bar{z} \end{aligned}$$

comme auparavant. Il vient

$$\operatorname{Tr} \chi'_R f(P_{B,V}^{\omega}) \chi'_R = -\frac{ih}{2\pi} \operatorname{Tr} \chi_R \left( \int \partial_{\bar{z}} \tilde{f} E_+(z) E_{-+}^{-1}(z) E_-(z) dz \wedge d\bar{z} \right) \chi_R.$$

Puisque pour $\operatorname{Im} z \neq 0$, $E_{-+}^{-1}(z)$ est un o.p.d., $hE_{-+}^{-1}$ appartient à $S^0(\mathbb{R}^2_{x,\xi})$. Nous avons

$$\operatorname{Tr} \chi'_R f(P_{B,V}^{\omega}) \chi'_R = -\frac{ih}{2\pi} \int \partial_{\bar{z}} \tilde{f} (\operatorname{Tr}(\chi_R E_+ E_{-+}^{-1} E_- \chi_R)) dz \wedge d\bar{z}.$$

Prouvons maintenant que $\chi_R E_+ E_{-+}^{-1} E_- \chi_R$ est à trace pour $\operatorname{Im} z \neq 0$.

**Lemme 1.** *L'opérateur $E_-\chi_R$ est de Hilbert-Schmidt de $L^2(\mathbb{R}_x, L^2(R_y))$ dans $L^2(\mathbb{R}_x, \mathbb{C}) = L^2(R_x)$. On a de plus $\|E_-\chi_R\|_{\mathrm{HS}} \leq Ch^{-1/2}R$ où $C$ est une constante indépendante de $R$.*

Pour prouver le lemme ci-dessus, nous avons besoin du résultat bien connu

**Proposition 1.** *L'opérateur $P^W(x, hD_x)$ de $L^2(\mathbb{R}_x; \mathcal{H}_1)$ dans $L^2(\mathbb{R}_x; \mathcal{H}_2)$, où $\mathcal{H}_1$ et $\mathcal{H}_2$ sont des espaces de Hilbert arbitraires, est de Hilbert-Schmidt si et seulement si*

$$\int \|P^W(x,\xi)\|^2_{\mathrm{HS}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} dx d\xi < \infty.$$

*On définit*

$$\|P^W(x, hD_x)\|^2_{\mathrm{HS}} = \frac{1}{2\pi h} \int \|P^W(x,\xi)\|^2_{\mathrm{HS}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)} dx d\xi.$$

*Démonstration du lemme 1.* On considère $E_-\chi_R(x,\xi)$ comme la composée:

$$\mathbb{C} \xleftarrow{E_-} B_y^{-k_2} \xleftarrow{I} B_y^{-k_1} \xleftarrow{\chi_R} L^2(R_y)$$

où $k_2 > k_1 > 0$. Par des arguments standard d'intégration par partie, en utilisant le fait que

$$|h^{1/2}(y,\eta)| \geq (|(x,\xi)| - R)_+$$

(on note $|\quad|$ la norme euclidienne) sur le support de $\chi_R(x + h^{1/2}y, \xi - h^{1/2}\eta)$ et le fait que le plongement de $B_y^{-k_1}$ dans $B_y^{-k_2}$ est de Hilbert-Schmidt pour $k_1 < k_2$, on a:

$$\|E_-\tilde{\chi_R}(x,\xi)\|_{\mathrm{HS}(L^2(R_y),\mathbb{C})} \leq C_{k_2}[1 + (|(x,\xi)| - R)_+]^{-2k_1}$$

pour tout $k_2 > 0$. De la proposition 1 on déduit

$$\|E_-\chi_R\|_{\mathrm{HS}} \leq Ch^{-1/2}R.$$

**Proposition 2.** *L'opérateur $\chi_R E_+ E_{-+}^{-1} E_- \chi_R \in L^2(\mathbb{R}_x, L^2(R_y))$ est à trace.*

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}\|\chi_R E_+ E_{-+}^{-1} E_- \chi_R\|_{\mathrm{Tr}} &\leq \|\chi_R E_+\|_{\mathrm{HS}}\, \|E_{-+}^{-1}\|\, \|E_-\chi_R\|_{\mathrm{HS}} \\ &\leq (C^2 h^{-2}/|\operatorname{Im} z|)R^2\end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $\chi_R E_+$ est l'adjoint de $E_-\chi_R$, et est donc de Hilbert-Schmidt.

Utilisant la propriété d'invariance cyclique de la trace, nous avons

$$\begin{aligned}\operatorname{Tr}(\chi_R E_+ E_{-+}^{-1} E_- \chi_R) &= \operatorname{Tr}(E_- \chi_R^2 E_+ E_{-+}^{-1}) \\ &= \operatorname{Tr}((\chi_R^{(1)})^2 E_- E_+ E_{-+}^{-1}) + \operatorname{Tr}([E_-, \chi_R]_0 (\chi_R E_+) E_{-+}^{-1}) \\ &\quad + \operatorname{Tr}(\chi_R^{(1)} [E_-, \chi_R]_0 E_+ E_{-+}^{-1}) \\ &= \operatorname{Tr} A_1 + \operatorname{Tr} A_2 + \operatorname{Tr} A_3\end{aligned}$$

où ${\chi_R^{(1)}}^W(x,\xi) = \chi_R'(x,\xi)$ et l'on a noté

$$[E_-, \chi_R]_0 = E_- \chi_R - \chi_R^{(1)} E_-.$$

On a évidemment

**Lemme 2.** *$\chi_R^{(1)}$ est de Hilbert-Schmidt, et on a*

$$\|\chi_R^{(1)}\|_{\mathrm{HS}} \leq C h^{-1/2} R.$$

**Corollaire.** *$A_1 = (\chi_R^{(1)})^2 E_- E_+ E_{-+}^{-1}$ est à trace:*

$$\operatorname{Tr}((\chi_R^{(1)})^2 E_- E_+ E_{-+}^{-1}) = \operatorname{Tr}(\chi_R^{(1)} E_- E_+ E_{-+}^{-1} \chi_R^{(1)}).$$

*De plus* $\operatorname{Tr} A_1 \leq C h^{-2} R^2$.

**Lemme 3.** *$A_2$ et $A_3$ sont à trace et*

$$\operatorname{Tr} A_2 \leq C h^{-2} R^{3/2} \qquad \operatorname{Tr} A_3 \leq C h^{-2} R^{3/2}.$$

*Démonstration.* Puisque

$$[E_-, \chi_R]_0 = -[E_-, 1 - \chi_R]_0 = -[E_-; \chi_R^c]_0$$

où ${\chi_R^c}^{(1)} = 1 - \chi_R^{(1)}$ et $\chi_R^c = 1 - \chi_R$. Il en résulte que l'estimée que l'on obtient pour $\|[E_-, \chi_R]_0\|_{\mathrm{HS}}$ doit être symétrique par rapport à $|(x,\xi)| - R$. On obtient donc

$$\|[E_-, \chi_R]_0(x,\xi)\|_{\mathrm{HS}(L^2(R_y),\mathbb{C})} \leq C_{k_2}[1 + ||(x,\xi)| - R|]^{-2k_2}.$$

D'où

$$\|[E_-,\chi_R]_0\|_{\mathrm{HS}(L^2(\mathbb{R}_x;L^2(R_y)),L^2(R_x)))} \le Ch^{-1/2}R^{1/2}.$$

Ceci donne le résultat pour $\operatorname{Tr} A_2$ et $\operatorname{Tr} A_3$.

En combinant le corollaire et le lemme 3, on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) &=< \tilde{\operatorname{Tr}} f(P^\omega_{B,V}) > \\ &= -\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{E}} \partial_{\bar z}\tilde f < [\partial_z E_{-+}E^{-1}_{-+}](x,\xi,z) > (dz\wedge d\bar z)dxd\xi \quad \text{p.s.}\end{aligned}$$

où $\mathbb{E}$ est un carré unitaire. Comme $E_{-+}$ est holomorphe en $z$; il suffit maintenant de contrôler $E^{-1}_{-+}$ quand $|\operatorname{Im} z| \to 0$.

## IV. Etude de l'opérateur $f(P^\omega_{B,V})$

Pour $|\operatorname{Im} z| \ge h^{\frac{1}{2}-\epsilon}$, $\epsilon > 0$, $E^{-1}_{-+}(\omega)$ admet une paramétrixe

$$hE^{-1}_{-+}(\omega) = \frac{1}{V^\omega - z} + \frac{h\tilde Q^\omega_1}{(V^\omega - z)^2} + \frac{h^2\tilde Q^\omega_2}{(V^\omega - z)^4} + \frac{h^3\tilde Q^\omega_3}{(V^\omega - z)^6} + \cdots$$

où les $\tilde Q_i$ sont fonctions des $Q_i$ et de leurs dérivées, et en particulier $\tilde Q_1 = Q_1$ et $\tilde Q_2 = Q_2$. Comme $\partial_z E_{-+}$ est également dans la classe $S^0$ et admet le développement asymptotique

$$\partial_z E_{-+}(\omega) = 1 + hS^\omega_1 + h^2 S^\omega_2 + \cdots$$

avec $S_i \in S^0$ pour tout $\omega$, $\partial_z E_{-+}(\omega)E^{-1}_{-+}(\omega)$ admet le développement asymptotique suivant

$$\partial_z E_{-+}(\omega)E^{-1}_{-+}(\omega) = \frac{1}{V^\omega_1 - z} + h(\frac{S^\omega_1}{V^\omega - z} + \frac{\tilde Q^\omega_1}{(V^\omega - z)^2}) + \cdots$$

pour $|\operatorname{Im} z| \ge h^{\frac{1}{2}-\epsilon}$ $(\epsilon > 0)$.

Utilisons maintenant le caractère aléatoire des paramètres $\alpha_i$. Nous avons :

**Proposition 3.** *Pour tout $N$ et tout $c > 0$, $h|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta < (\partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1})(x, \xi, z) > | \leq C_{N,\alpha,\beta}$ c'est-à-dire $h < \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} >$ est dans la classe $S^0$ pour tout $z$ tel que $|z| < h^{-1}$ et $|\operatorname{Re} z| \geq 1/c$, $|\operatorname{Im} z| \geq h^N/c$. De plus, $h < \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} >$ est classique, c'est-à-dire $h < \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} >$ admet un développement asymptotique de la forme:*

$$h < \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} >= \sum_{j \geq 0} h^j A_j + \mathbf{O}(h^\infty)$$

*où $A_j \in S^0$.*

Nous démontrons cette proposition par un argument d'échelle : nous prenons graduellement en compte les potentiels à des échelles de longueur de plus en plus grandes. Comme $< \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} >$ est invariant par translation, il suffit de prouver la proposition 3 pour $(x, \xi) \in \mathbb{E}$ où $\mathbb{E}$ est comme précedemment un carré unitaire centré en $(0,0)$.

Soit $\Lambda_n$ une suite croissante de carrés centrés en $(0,0)$ de longueur $\ell_n = 2^{n+1} + 1$. Clairement pour tout $(x, \xi) \in \mathbb{E}$, $\operatorname{dist}((x, \xi), \partial \Lambda_n) \geq (\ell_n - 1)/2$, où $\partial \Lambda_n$ est la frontière de $\Lambda_n$. Soit $H_n$ l'opérateur réduit pour le potentiel $V_n = \sum_{i \in \Lambda_n} \alpha_i v(x - i)$ ($E_{-+}$ est l'opérateur réduit correspondant au potentiel $V = \sum_{i \in \mathbb{Z}^2} \alpha_i v(x-i)$). Le symbole principal est clairement $h(V_n(x, \xi) - z)$. Ecrivons

$$\begin{aligned} E_{-+}^{-1} &= H_0^{-1} + H_1^{-1} - H_0^{-1} + H_2^{-1} - H_1^{-1} + \cdots + E_{-+}^{-1} - H_{N_0}^{-1} \\ &= H_0^{-1} + H_0^{-1} \Delta_1 H_1^{-1} + H_1^{-1} \Delta_2 H_2^{-1} + \cdots + H_{N_0}^{-1} \widetilde{\Delta}_{N_0+1} E_{-+}^{-1} \end{aligned}$$

où $\Delta_n = H_{n-1} - H_n$, $\widetilde{\Delta}_{N_0+1} = H_{N_0} - E_{-+}$ et nous avons utilisé l'équation résolvente: $A^{-1} - B^{-1} = B^{-1}(B - A)A^{-1}$. $N_0$ est à déterminer. On en déduit:

(4.1.)
$$\begin{aligned} \partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1} = (\partial_z E_{-+}) H_0^{-1} + (\partial_z E_{-+}) H_0^{-1} \Delta_1 H_1^{-1} + (\partial_z E_{-+}) H_1^{-1} \Delta_2 H_2^{-1} \\ + \cdots + (\partial_z E_{-+}) H_{N_0}^{-1} \widetilde{\Delta}_{N_0+1} E_{-+}^{-1} \end{aligned}$$

Pour démontrer la proposition, nous avons besoin du

**Lemme 4.** *On a les inégalités*

$$\begin{aligned} | < \nabla_\alpha H_n(\alpha), t > | &\leq \sup_{|z|=1} |H_n(\alpha + zt)| \\ | < \nabla_\alpha E_{-+}(\alpha), t > | &\leq \sup_{|z|=1} |E_{-+}(\alpha + zt)| \end{aligned}$$

*où $t \in \ell^\infty(\mathbb{Z}^2)$.*

*Démonstration.* Nous prouvons la deuxième assertion, la première se démontrant de la même manière. Nous avons

$$< \nabla_\alpha E_{-+}(\alpha), t >= \frac{\partial}{\partial z} E_{-+}(\alpha + zt)|_{z=0}.$$

Ainsi

$$< \nabla_\alpha E_{-+}(\alpha), t > \leq \sup_{|z|=1} |E_{-+}(\alpha + zt)|$$

par l'inégalité de Cauchy.

Définissons $V_\theta = e^{i\theta} V = e^{i\theta} \sum \alpha_i v_i$. Comme $E_{-+}(\theta), H_n(\theta)$ sont bornés, on en déduit:

**Corollaire.** *$\partial E_{-+}(\theta)/\partial\theta$ et $\partial H_n(\theta)/\partial\theta$ sont bornés.*

Par [H-S 2] nous avons le développement asymptotique pour $H_n$:

$$H_n(x,\xi,h) = \sum_{j\geq 0} Q_j^{(n)}(x,\xi) h^{j+1}.$$

Il est facile de voir que $Q_j^{(n)}(x,\xi)$ ne dépend que du potentiel et ses dérivées en $(x,\xi)$. On en déduit:

$$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \Delta_n(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}^{(N)} h^N$$

pour tout $N$ et $(x,\xi)$ dans $\Lambda_{n-1}$ ou $(x,\xi)$ dans $\mathbb{R}^2 \backslash \Lambda_n$.

*Démonstration de la proposition 3.* Nous utilisons le développement (4.1). D'abord, nous estimons $< \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} >$. Nous effectuons une dilatation complexe: $\alpha_i \to \alpha_i e^{i\theta_n}$ avec $\theta_n = 1/\ell_n$ pour tout $i \in \Lambda_n$. Nous remarquons que pour $n$ tel que $1/\ell_n \leq h^N/c \leq |\operatorname{Im} z|$, la dilatation complexe ne va pas nous donner une meilleure estimation pour $H_n^{-1}$. Donc pour un $N$ donné, on choisit $N_0$ comme le plus petit entier tel que $1/\ell_{N_0} \leq h^N/c$; $N_0$ est donc d'ordre $N \log(1/h)$. Soit

$$< \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} >_c \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\Gamma(0)} \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} \mathcal{G}(\alpha) d\alpha$$

où $\alpha = \{\alpha_i\}_{i\in\Lambda_n}$, $d\alpha = \prod_{i\in\Lambda_n} d\alpha_i$, $\mathcal{G}(\alpha) = \prod_{i\in\Lambda_n} g(\alpha_i)$. Alors

$$| < \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} > | \leq | < \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} >_c |_\infty.$$

Il est donc suffisant de ne nous préoccuper de majorer $| < \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} >_c |$. Par la formule de Stokes, nous avons

$$\begin{aligned}
< \partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} >_c &= \int_{\Gamma(0)} (\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} \mathcal{G}(\alpha) d\alpha \\
&= \int_{\Gamma(\theta_n)} (\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} \tilde{\mathcal{G}}(a) ds \\
&\quad + \int_{\Omega_{\theta_n}} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \bar{a}} [(\partial_z E_{-+}) H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1}] d\bar{a} \wedge da
\end{aligned}$$

où $a = \{\alpha_i e^{i\theta_n}\}_{i\in\Lambda_n} = \{a_i\}_{i\in\Lambda_n}$, $\tilde{\mathcal{G}}$ est un prolongement presque analytique quelconque de $\mathcal{G}$, donc tel que $\partial\tilde{\mathcal{G}}/\partial\bar{a}|_{\mathbb{R}^{\Lambda_n}} = 0$. Nous choisissons maintenant

$$\tilde{\mathcal{G}}(a) = \prod_{i\in\Lambda_n} \tilde{g}(a_i)$$

où $\tilde{g}(a_i)$ est un prolongement presque analytique de $g(a_i)$ tel que $\partial_{\bar{a}_i}\tilde{g}(a_i) = \mathbf{O}(|\operatorname{Im} a_i|^p)$ pour tout $p > 0$. En particulier on a $\partial_{\bar{a}_i}\tilde{g} = 0$ sur l'axe réel.

Sur $\Gamma(\theta_n)$, on a, par le lemme 5, $| < \phi, H_n\phi > | \geq hE\sin\theta_n/2 = h\delta_n$ (où $E = |\operatorname{Re} z| > 1/c$) pour $h$ assez petit. Par conséquent

$$\|H_n^{-1}\| \leq \frac{2}{hE\sin\theta_n} = \frac{1}{h\delta_n}.$$

De même $h\|H_{n-1}^{-1}\| \leq 1/\delta_n$. Utilisons le lemme de Beals [Bea]; nous avons

$$h\left|\partial_x^\alpha\partial_\xi^\beta\begin{pmatrix} H_{n-1}^{-1} \\ H_n^{-1}\end{pmatrix}\right| \leq C_{\alpha,\beta}\max\left(1, (\frac{h}{\delta_n^2})^3\right)\delta_n^{-1-\alpha-\beta}$$

Démontrons maintenant que $(\partial_z E_{-+})H_{n-1}^{-1}\Delta_n H_n^{-1}(x,\xi)$ est petit pour $(x,\xi) \in \mathbb{E}$. En utilisant la formule de composition pour quatre symboles de Weyl, nous avons (en écrivant $X = (x,\xi)$)

$$[(\partial_z E_{-+})H_{n-1}^{-1}\Delta_n H_n^{-1}](X) =$$
$$\frac{1}{(2\pi h)^4}\int e^{i\frac{Q_4(Y)}{h}}\partial_z E_{-+}(X-Y_1)H_{n-1}(X-Y_2)^{-1}\Delta_n(X-Y_3)H_n^{-1}(X-Y_4)dY$$

où $Y = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4)$ et $Y_i = (y_i, \eta_i)$, $dY = \prod_i dy_i d\eta_i$, et

$$Q_4(Y) = \sigma(Y_1,Y_2) + \sigma(Y_2,Y_3) + \sigma(Y_3,Y_4) + \sigma(Y_1,Y_4) + \sigma(Y_4,Y_2) + \sigma(Y_3,Y_1)$$

$\sigma$ étant la forme symplectique canonique:

$$\sigma(Y_i, Y_j) = y_j\eta_i - y_i\eta_j.$$

Par intégration par parties standard, et en utilisant les bornes sur $\partial^\alpha H_n^{-1}$ et $\partial^\alpha\Delta_n$ obtenues plus haut, et le fait que $\partial_z E_{-+} \in S^0$, nous obtenons que sur $\Gamma(\theta_n)$,

$$|(\partial_z E_{-+})H_{n-1}^{-1}\Delta_n H_n^{-1}| \leq C_N h^N$$

pour tout $N$ et tout $n \leq N_0$, où nous avons utilisé la relations d'échelle $\delta_n = E\sin\theta_n/2$, $\theta_n = 1/\ell_n$ et $\ell_n \leq Ch^{-N}$ pour $n \leq N_0$. Comme

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma(\theta_n)} |\tilde{\mathcal{G}}(a)|ds &= \int\prod_{i\in\Lambda_n}|\tilde{g}(\alpha_i e^{i\theta_n})|d\alpha_i \\ &\leq (1+c\theta_n^2)^{\ell_n^2} \\ &\leq C\end{aligned}$$

où nous avons utilisé $\theta_n = 1/\ell_n$ et le fait que $\int |\tilde{g}(\alpha_i e^{i\theta_n})| d\alpha_i$ est paire en $\theta_n$ et différentiable en $\theta_n = 0$, nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_{\Gamma(\theta_n)} |(\partial_z E_{-+}) H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1} \tilde{\mathcal{G}}(a)| ds \leq C_N h^N \log h \\ \leq C_N h^N \tag{4.2}$$

pour tout $|E| > 1/C$ $(C > 0)$ et tout $N$.

Il reste à estimer l'intégrale $\int_{\Omega(\theta_n)}$. En développant, on a

$$\begin{aligned}
&\left| \int_{\Omega(\theta_n)} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\alpha}} (\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1}) d\bar{\alpha} \wedge d\alpha \right| \\
&= \left| \int_{\Omega(\theta_n)} \sum_{j=1}^{|\Lambda_n|} \frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\alpha}_j} (\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1}) d\bar{\alpha} \wedge d\alpha \right| \\
&\leq C_N \int_0^{\theta_n} \int_{\mathbb{R}^{|\Lambda_n|}} \sum_{j=1}^{|\Lambda_n|} \theta^N |\prod_{i \neq j} \tilde{g}(\alpha_i e^{i\theta})| |(\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1})| d\bar{\alpha}_j \wedge d\alpha_i \wedge \cdots \wedge d\alpha_{|\Lambda_n|} \\
&\leq C_N h^N
\end{aligned}$$

pour tout $N$, où nous avons borné $|(\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1})|$ dans $\Omega(\theta_n)$ comme sur $\Gamma(\theta_n)$, en remplaçant $\delta_n$ par $E \sin \theta/2$, et la majoration

$$\int |\tilde{g}(\alpha_i e^{i\theta})| d\alpha_i \leq 1 + C\theta^2.$$

Finalement

$$\sum_{n=1}^{N_0} \int_{\Omega(\theta_n)} |\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \bar{\alpha}} (\partial_z E_{-+} H_{n-1}^{-1} \Delta_n H_n^{-1}) d\bar{\alpha} d\alpha| \leq C_N h^N \tag{4.3}$$

pour tout $N$.

Comme $\|E_{-+}^{-1}(z)\| \leq C/|\operatorname{Im} z|$, nous déduisons du lemme de Beals

$$\begin{aligned}
|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta E_{-+}^{-1}| &\leq C_{\alpha,\beta} |\operatorname{Im} z|^{-7+\alpha+\beta} \\
&\leq C_{\alpha,\beta} h^{-N(7+\alpha+\beta)}.
\end{aligned}$$

D'où, par le même raisonnement, nous obtenons

$$|<\partial_z E_{-+} H_{N_0}^{-1} \Delta_{N_0+1} E_{-+}^{-1}>_c| \leq C_N h^N \tag{4.4}$$

pour tout $N$.

Un argument plus simple donne

$$h|<\partial_z E_{-+} H_0^{-1}>_c| \leq C. \tag{4.5}$$

En combinant (4.2), (4.3), (4.4), (4.5) nous obtenons

$$h|<\partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1}>| \leq C_N.$$

De manière similaire:

$$h|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta <\partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1}>| \leq C_{N,\alpha,\beta}.$$

Ceci prouve que $h<\partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1}>$ est un symbole classique dans la classe $S^0$.

**Corollaire.** *Pour tout $N>0$ et $c>0$, si $f \in C_0^\infty$, à support à distance au moins $1/c$ de $(2n+1)B$, vérifie $|\partial^j f| \leq C_j h^{-Nj}$, alors*

$$A_f = \int \partial_{\bar z} \tilde f <\partial_z E_{-+} E_{-+}^{-1}> dz \wedge d\bar z$$

*est un o.p.d. classique.*

## V. Conclusion

Nous pouvons maintenant énoncer notre théorème principal.

**Théorème.** *Pour tout $N$, $c>0$, si $f \in C_0^\infty$ vérifie $|\partial_j f| \leq C_j h^{-Nj}$ et a son support à distance au moins $1/c$ de $(2n+1)B$, alors nous avons le développement*

$$\begin{aligned}<\tilde{\operatorname{Tr}} f(P_{B,V})> &= \int f(t) d\rho(t) \\ &= \int f(t)\rho_0(t)dt + h\int f(t)\rho_1(t)dt + \cdots + h^m \int f(t)\rho_m(t)dt \cdots + \mathbf{O}(h^\infty)\end{aligned}$$

*avec $\rho_m(t)$ une fonction $C^\infty$ pour tout $m$; on a par exemple:*

$$\rho_0(t) = \int \frac{1}{\gamma} F(\gamma) g(\frac{t}{\gamma}) d\gamma \tag{4.6}$$

où

$$F(\gamma) = \int_{v=\gamma} \frac{ds}{\|\nabla v\|}.$$

*Démonstration.* Un calcul direct utilisant le développement asymptotique pour $E_{-+}^{-1}$ et $\partial_z E_{-+}$.

**Remarque.** En raison de l'intégration supplémentaire par rapport à la variable aléatoire $\alpha$, lorsque nous calculons $d\rho_m/dt$, nous nous ramenons en quelque sorte à calculer $\partial g/\partial\alpha$ (voir (4.6)); comme $g$ est de classe $C^\infty$, $\rho_m$ l'est aussi.