Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

N. Burq

Résonances pour le problème de Dirichlet à l'extérieur d'obstacles convexes à coins en dimension 2

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 17, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A17_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RESONANCES POUR LE PROBLEME DE DIRICHLET A L'EXTERIEUR D'OBSTACLES CONVEXES A COINS EN DIMENSION 2

N. BURQ

Exposé n° XVII

16 Février 1993

1. Introduction

Soit Θ, un compact de $\mathbb{R}^2$. On suppose que $\partial\Theta$ est analytique sauf en un point $O=(0,0)$ et qu'il existe des fonctions a et b, analytiques au voisinage de 0 dans $\mathbb{R}$ telles que localement, Θ est défini par l'équation $\Theta=\{(x,y)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R};\ b(x)\leq y\leq a(x)$. On suppose que Θ est strictement convexe, c'est à dire que partout où elle est définie, la courbure de $\partial\Theta$ est strictement positive.

Le but de cet exposé est d'étendre à ce cadre des résultats de C. Bardos, G.Lebeau et J. Rauch ([BLR]) sur les singularités Gevrey 3 et la diffusion. Plus précisément nous allons montrer que la résolvante tronquée du Laplacien avec conditions de Dirichlet, dans l'ouvert $\Omega=\Theta^c$, analytique dans $\Im m\lambda<0$, admet un prolongement analytique sous une courbe inverse cubique. Ces résultats seront utilisés dans un travail ultérieur pour calculer les pôles dans le cas de deux obstacles.

On note $R(\lambda)$, la résolvante du Laplacien avec conditions de Dirichlet, holomorphe dans $\Im m\lambda<0$. l'opérateur $R(\lambda)$ vérifie :

$$(1.1)\qquad \begin{aligned}(\Delta+\lambda^2)R(\lambda)u &= u, \text{ dans } \Omega,\\ R(\lambda)u\,|_{\partial\Omega} &= 0,\end{aligned}$$

pour $u\in C_0^\infty(\Omega)$ et s'étend de manière classique en un opérateur continu de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

On note $U(t)$ le propagateur du problème suivant

$$(1.2)\qquad \begin{aligned}(\partial_t^2-\Delta)\,U(t)f &= 0, \text{ dans } \Omega\times\mathbb{R}_t,\\ U(t)f\,|_{t=0} &= 0,\\ \partial_t U(t)f\,|_{t=0} &= f\in C_0^\infty(\Omega),\end{aligned}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\Omega)$ dans $H_0^1(\Omega)$.

Soient $R_1>R>0$ tels que $\Theta\subset B(O,R)$. Soit $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$; $\chi\equiv 1$ au voisinage de $B(O,R)$ et $\operatorname{supp}(\chi)\subset B(O,R_1)^c$. On note $R_\chi(\lambda)=\chi R\chi$ l'opérateur défini par la relation suivante :

$$(1.3)\qquad R_\chi(\lambda)=\int_0^{+\infty}e^{-i\lambda t}\chi U(t)\chi dt.$$

Nous allons démontrer le théorème suivant :

THÉORÈME 1. — *Il existe $A,B>0$ tels que la résolvante tronquée R_χ admet un prolongement analytique comme opérateur de $\mathcal{L}(L^2(\Omega);H_0^1(\Omega))$ à un domaine $U_{A,B}$ et y vérifie l'estimation suivante :*

$$(1.4)\qquad \begin{gathered}\exists C>0;\ \forall\lambda\in U_{A,B},\\ \|R_\chi(\lambda)\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega);H_0^1(\Omega))}\leq Ce^{C\Im m\lambda_+},\end{gathered}$$

où on a noté $\Im m\lambda_+=sup(\Im m\lambda,0)$.

La démonstration de ce résultat utilise deux ingrédients :

- Une stratégie de G. Popov [P], qui permet de réduire le problème à l'obtention de résultats de propagation de type Gevrey 3 en temps à valeur H^1 en espace, pour la solution de l'équation des ondes dans l'ouvert Ω
- Des résultats de P. Gérard et G. Lebeau [GL] sur la diffraction d'une onde par un coin, qui, modulo une légère modification, fournissent de telles estimations.

Nous utiliserons les notions suivantes de rayons C^∞ et C^ω (analytiques) : on prend un système de coordonnées centré sur le coin O. Soit L l'arête; $L = \{(x = 0, y = 0, t) \in \mathbb{R}^3\}$. Soit $X = \Omega \times \mathbb{R}_t$. On note $T_b^*X = T^*X \cup T^*(\partial X - L) \cup T^*L$. On a une projection naturelle :

$$p: \ T^*\mathbb{R}^3 \mid_{\overline{X}} \longrightarrow T_b^*X$$

qui définit la topologie de T_b^*X.

Un rayon C^∞ (respectivement C^ω) est, par définition une application continue,

$$\rho: \ I \longrightarrow p(car\Box \cap \{(\tau,\xi) \neq (0,0)\}),$$

où I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, telle que ρ est un rayon C^∞ (respectivement C^ω) au sens usuel près de $s \in I$ si $\rho(s) \notin T^*L$, l'ensemble $\{s;\ \rho(s) \in T^*L\}$ est discret et si $(t(s), \tau(s))$ sont les coordonnées (t, τ) de $\rho(s)$, on a $\tau(s) = \tau_0 \neq 0$ et $t(s) = t - 2\tau_0 s$.

2. Démonstration du théorème

2.1. Réduction du problème à un résultat de propagation des singularités dans un coin

On note $U_0(t)$ le propagateur du problème suivant :

$$(2.1) \qquad \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta)\, U_0(t)f &=& 0, \text{ dans } \mathbb{R}_x^2 \times \mathbb{R}_t, \\ U_0(t)f \mid_{t=0} &=& 0, \\ \partial_t U_0(t)f \mid_{t=0} &=& f \in C_0^\infty(\Omega), \end{array}$$

qu'on étend comme opérateur de $L^2(\mathbb{R}_x^2)$ dans $H_0^1(\mathbb{R}_x^2)$.

On note $G^3(\mathbb{R}^n)$ la classe des fonctions Gevrey 3, c'est à dire vérifiant l'estimation suivante :

$$\forall K \subset\subset \mathbb{R}^n\ \exists C > 0;\ \forall \alpha \in \mathbb{N}^n\ \forall x \in K \quad | \partial_x^\alpha f(x) | \leq C^{|\alpha|+1}(3\alpha!)$$

Soit $T = 2R_1$ le temps maximum nécessaire à tout rayon parcouru à vitesse 1, issu du support de χ, pour en sortir.

Soit $\zeta \in G^3(\mathbb{R}^{2+1})$ telle que :

- $\zeta \equiv 1$ dans $\{| \, |x| - t \, | < T\}$
- $\zeta \equiv 0$ dans $\{| \, |x| - t \, | > T + 1\}$

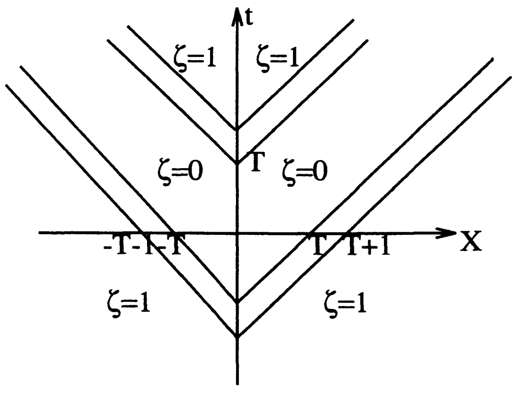

figure 1

Soient $U_\chi(t) = \chi U(t)\chi$ et $E(t) = \zeta U(t)\chi$. On note, pour $\Im m\lambda < 0$,

$$\chi\widehat{E}(\lambda) = \int_0^{+\infty} e^{-i\lambda t}\chi E(t)dt. \tag{2.2}$$

Comme $\chi E(t)$ est à support compact en temps (car $\chi\zeta$ l'est), $\chi\widehat{E}(\lambda)$ admet un prolongement analytique à $\mathbb{C}$, comme fonction à valeur $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ et a une estimation du type (1.4).

On pose

$$F(t) = \left[\partial_t^2 - \Delta, \zeta\right] U(t)\chi. \tag{2.3}$$

L'opérateur $E(t)$ est alors le propagateur du problème :

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)E(t)f &= F(t)f, \text{dans } \Omega \times \mathbf{R}_t, \\ E(t)f \mid_{\partial\Omega} &= 0, \\ E(t)f \mid_{t=0} &= 0, \\ \partial_t E(t)f \mid_{t=0} &= \chi f. \end{aligned} \tag{2.4}$$

THÉORÈME 2. — *L'opérateur $F(t)$ est Gevrey 3 en temps à valeurs $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$.*

Nous admettons dans un premier temps ce résultat ; nous allons en déduire le théorème 1 en suivant la méthode de Popov [P].

On note $\widetilde{F}(t)$ le prolongement par 0 de F comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega))$. Soit $W(t)$ le propagateur du problème

$$\begin{aligned} (\partial_t^2 - \Delta)W(t)f &= \widetilde{F}(t)f \text{ dans } \mathbf{R}_x^2 \times \mathbf{R}_t, \\ W(0)f = \partial_t W(0)f &= 0,\ f \in L^2(\mathbf{R}^2); \end{aligned} \tag{2.5}$$

c'est à dire

$$W(t) = \int_0^t U_0(t-s)\widetilde{F}(s)ds. \tag{2.6}$$

Soit $\Psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\Psi \equiv 0$ au voisinage de $B(0,R)$ et telle que $\chi \equiv 1$ au voisinage du support de $(1-\Psi)$. Soit

$$\begin{aligned} Q(t) &\stackrel{def}{=} (\partial_t^2 - \Delta)[E(t)f - \Psi W(t)f] \\ &= (1-\Psi)F(t)f + [\Delta, \Psi]W(t)f \end{aligned} \tag{2.7}$$

On a alors, comme $Q(t)f\mid_{\partial\Omega} = 0$,

$$E(t)f - \Psi W(t)f = U(t)\chi f + \int_0^t U(t-s)\chi Q(s)ds f \tag{2.8}$$

car $\chi Q(t) = Q(t)$. On en déduit que pour $\Im m k < 0$, on a

$$\chi \hat{E}(k)f = R_\chi(k)f + R_\chi(k)\hat{Q}(k)f + \Psi\chi\widehat{W}(k). \tag{2.9}$$

En suivant la méthode de Popov ([P]), on peut alors montrer que $\hat{Q}(k)$ et $\widehat{W}(k)$ admettent des prolongements analytiques à $\mathbb{C}\setminus i\mathbb{R}^+$ comme opérateurs $\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ et $\mathcal{L}(L^2(\Omega); H_0^1(\Omega))$ respectivement, ont dans ces espaces des estimations du type (1.4) et que l'opérateur $Id + \hat{Q}(k)$ est inversible comme opérateur $\mathcal{L}(L^2(\Omega); L^2(\Omega))$ dans on ouvert $U_{A,B}$ et y est uniformément borné; ce qui prouve le théorème 1.

2.2. Démonstration du théorème 2

On a

$$\begin{aligned} F(t) &= [\partial_t^2 - \Delta_x, \zeta]\, U(t)\chi, \\ &= ((\partial_t^2 - \Delta_x)\,\zeta + 2\partial_t\zeta\partial_t - 2\nabla\zeta\nabla)\, U(t)\chi. \end{aligned} \tag{2.10}$$

On rappelle les propriétés vérifiées par les troncatures ζ et χ : on a $\Theta \subset\subset B(0,R)$, $T = 2R_1 > R_1 > R$ et

$$\begin{aligned} \chi &= 1 \quad \text{sur } B(0,R), \\ \chi &= 0 \quad \text{sur } B(0,R_1)^c, \\ \zeta &\in G^3(\mathbb{R}^{2+1}), \\ \zeta &= 1 \quad \text{sur } \{||x|-t| < T\}, \\ \zeta &= 0 \quad \text{sur } \{||x|-t| > T+1\}. \end{aligned} \tag{2.11}$$

On pose $\eta = \mathrm{dist}(B(0,R_1)^c, \mathrm{supp}(\chi))$.

LEMME 2.1. — *Pour tout point $x_0 \in \overline{\Omega} \cap \mathrm{supp}(\chi)$, il existe $\epsilon > 0$, $V(x_0)$, un voisinage de x_0, un temps t_0, supérieur au temps mis par tous les rayons issus de V pour rencontrer le point O, tels qu'aucun rayon analytique issu de V ne rencontre le coin O entre les instants $t_0 - \epsilon$ et $t_0 + \epsilon$.*

Démonstration. — On distingue deux cas :

i) Le segment $[x_0, O]$ rencontre Θ en un point distinct de O; le temps $t_0 = 0$ convient alors, par vitesse finie de propagation.

ii) Le segment $[x_0, O]$ ne rencontre Θ qu'en O. On note alors $S = [x_0, O]$. Si V est assez petit, tous les rayons C^∞ issus de V qui rencontrent O sont proches de S. On note t_1 la longueur de S et t_2 la longueur du plus petit rayon, γ, analytique, non C^∞, issu de x_0, qui rencontre le point O. Si V est assez petit, les rayons issus de V qui rencontrent le point O ont des longueurs proches de $t_1 + n \times \text{longueur}(\partial\Theta)$; $n \in \mathbb{N}$ ou de $t_2 + n \times \text{longueur}(\partial\Theta)$; $n \in \mathbb{N}$. Comme $t_2 > t_1$, il suffit de prendre $t_0 \in]t_1, t_2[$, ϵ assez petit et V assez petit.

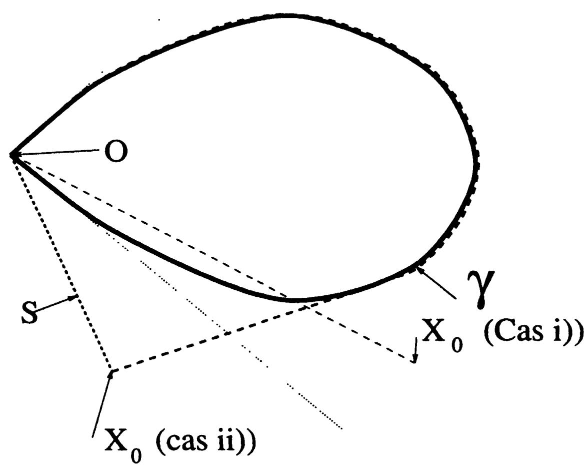

figure2

En adaptant les méthodes de P. Gérard et G. Lebeau, on démontre la proposition suivante :

PROPOSITION 2.2. — *Soit $u \in H^1_{loc}(\overline{\Omega})$, solution de $(\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0$ dans $\Omega \times \mathbb{R}_t$, $u\,|_{\partial\Omega} = 0$. Si u ne possède aucune singularité analytique arrivant de $t < t_0$ sur le point O à l'instant t_0, alors u est analytique en temps à valeurs $H^1_0(\Omega)$ au voisinage de (t_0, O).*

Supposons maintenant que u possède une singularité analytique arrivant de $t < t_0'$ au point O, avec $t_0' \in [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$. On peut alors propager cette singularité dans le passé tant qu'on ne rencontre pas le point O de nouveau. Si on le rencontre à un instant t_0'', on sait alors qu'il n'existe aucun voisinage de (O, t_0'') où u est analytique en temps à valeurs H^1 (car hors du coin, comme $(\partial_t^2 - \Delta_x)u = 0$ et $u\,|_{\partial\Omega} = 0$, analytique en temps à valeurs H^1 est équivalent à analytique). D'après la proposition 2.2, u possède alors une singularité analytique arrivant de $t < t_0''$ au point O à l'instant t_0''. En réitérant ce processus jusqu'à l'instant $t = 0$ et en utilisant le lemme 2.1, on en déduit qu'il existe un voisinage V de $O \times [t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon]$ tel que u est analytique en temps à valeurs H^1 dans V. On supposera par la suite que V est de la forme $V = \Omega \cap B(O,\eta)$.

LEMME 2.3. — *Si η est assez petit et si $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de $t = 0$, alors $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta/6)))$ au voisinage de $t = \eta/3$.*

Démonstration. — Soit $\Psi \in G^3(\mathbb{R}_t)$ telle que $\Psi \equiv 0$ pour $t < -\eta/4$, $\Psi \equiv 1$ pour $t > \eta/4$ et telle que $u \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ sur le support de Ψ. Soit $\chi \in G^3(\mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{supp}(\chi) \subset B(O,\eta)$ et $\chi \equiv 1$ sur $B(O, \frac{3\eta}{4})$. La fonction Ψu est alors solution de l'équation

$$(2.12) \qquad \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta_x)\Psi u &=& \Psi'' u + 2\Psi' \partial_t u, \\ \Psi u\,|_{t<-\eta/4} &\equiv& 0. \end{array}$$

Soient v et w solutions des équations

$$(2.13) \qquad \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta_x)v &=& \Psi''\chi v + 2\Psi'\partial_t \chi v, \\ v\,|_{t<-\eta/4} &\equiv& 0, \\ v\,|_{\partial\Omega} = 0, && \end{array}$$

$$(2.14) \qquad \begin{array}{rcl} (\partial_t^2 - \Delta_x)w &=& \Psi''(1-\chi)v + 2\Psi'\partial_t(1-\chi)w, \\ w \mid t < -\eta/4 &\equiv& 0, \\ w\,|_{\partial\Omega} = 0. && \end{array}$$

D'après la conservation de la norme H^1, $v \in G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega))$ et par vitesse finie de propagation, pour t proche de $\eta/3$, w est identiquement nulle dans $B(O, 3\eta/4 - (\eta/3 - \eta/4)) = B(O, \eta/6)$.

On choisit maintenant $\eta > 0$ assez petit vérifiant le lemme 2.3 et tel que tout rayon C^∞ qui quitte $B(O,\eta)$ ne rencontre plus jamais cette boule (c'est possible car Θ_2 est convexe). On suppose également $2\eta < \epsilon$ où ϵ est donné par le lemme 2.1.

LEMME 2.4. — *On note $T = \sup\{t > t_0;\ u \in G^3([t_0 - \epsilon; t]; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))\}$. Nous avons montré que $T \geq \epsilon + t_0$. On a en fait $T = +\infty$.*

Démonstration. — Nous raisonnons par l'absurde. Supposons en effet que $T < +\infty$. Alors, $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de T. Si de plus $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta/6)))$ au voisinage de T, d'après la contraposée du lemme 2.3, $u \notin G^3(\mathbb{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O,\eta)))$ au voisinage de $T - \eta/3 > t_0 - \epsilon$, ce qui est absurde. On peut donc supposer que $u \notin G^3\left(\mathbb{R}_t; H^1\left(\Omega \cap \left(B(O,\eta) \setminus \overline{B(O,\eta/6)}\right)\right)\right)$ au voisinage de T. Il existe donc un point $(t = T, \tau, x, \xi) \in T_b^*X$ tel que $x \in B(O,\eta) \setminus \overline{B(O,\eta/6)}$ et u n'est pas microlocalement Gevrey 3 en $(t = T, \tau, x, \xi)$. On peut alors propager sur un rayon C^∞ cette singularité dans le passé tant qu'on ne rencontre pas le coin. Comme $T \geq t_0 + \epsilon$, on le rencontre nécessairement avant $t = 0$ et comme de plus on part d'un point $x \in B(O,\eta)$, on ne quitte pas cette boule. On rencontre donc le coin avant l'instant $T - \eta$. Il existe donc $\rho = (t, \tau, x, \xi) \in T^*X$ tel que $T - \eta \leq t \leq T$, $x \in B(O,\eta/6) \setminus \{O\}$ et u n'est pas microlocalement Gevrey

3 en ρ. Comme $(\partial_t^2 - \Delta)u = 0$, $u\ |_{\partial\Omega} = 0$ et comme $x \neq O$, on en déduit que $u \notin G^3(\mathbf{R}_t; H^1(\Omega \cap B(O, \eta/6)))$ au voisinage de t, et on conclut comme précédemment ce qui termine la démonstration du lemme 2.4.

En utilisant le théorème de propagation des singularités Gevrey 3 de G. Lebeau [Le], on déduit du lemme 2.4 que pour tout $S > 0$ on a

$$u \in G^3([t_0 - \epsilon + S; +\infty[; H_0^1(\Omega \cap B(O, S))) \tag{2.15}$$

Finalement, en utilisant une partition de l'unité et en remarquant que pour $x_0 \in B(O, R_1)$, le temps t_0 associé par le lemme 2.1 est inférieur à R_1, on déduit de (2.15)

$$\forall u_0 \in L^2(\Omega), \ U(t)\chi u_0 \in G^3([R_1 + S, +\infty[; H_0^1(\Omega \cap B(O, S))) \tag{2.16}$$

La fonction ζ n'est pas constante pour $t \geq 0$ sur deux zones seulement

i) $T + t \leq |x| \leq T + t + 1$

ii) $t - T - 1 \leq |x| \leq t - T$

On sait par vitesse finie de propagation que $U(t)\chi u_0$ est identiquement nulle sur la première zone et dans la deuxième zone, on peut utiliser (2.16) avec $|x| = S$; on a donc

$$F(t)u_0 \in G^3(\mathbf{R}_t; L^2(\Omega)) \tag{2.17}$$

Un argument de [L] permet alors de déduire de (2.17) le théorème 1.

Références

[BLR] C. Bardos, G. Lebeau, J. Rauch, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities*, Inventiones mathematicae **90** (1987), 77–104.

[GL] P. Gérard, G. Lebeau, *Diffusion d'une onde par un coin*, Prépublications de l'Université d'Orsay **64** (1991).

[L] P.D. Lax, *Asymptotic solutions of initial value problems*, Duke Math. J. **24** (1957), 627–646.

[Le] G. Lebeau, *Régularité Gevrey 3 pour la diffraction*, Comm. Partial Differ. Equations **9** (1984), 1437–1494.

[P] G. Popov, *Some estimates of Green's functions in the shadow*, Osaka J. Math **24** (1987), 1–12.

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau Cedex
France