Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

J. Sjöstrand

Nouvelles majorations sur le nombre de pôles près de l'axe réel pour des obstacles strictement convexes (d'après un travail avec M. Zworski)

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 15, p. 1-5

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A15_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

NOUVELLES MAJORATIONS SUR LE NOMBRE DE PÔLES PRES DE L'AXE REEL POUR DES OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

(d'après un travail avec M. Zworski)

J. SJÖSTRAND

Exposé n° XV

18 Mai 1993

Nouvelles majorations sur le nombre de pôles près de l'axe réel pour des obstacles strictement convexes.

(d'après un travail avec M.Zworski)

0. Introduction. Rappelons d'abord quelque résultats antérieurs. Soit $\mathcal{O} \subset\subset \mathbf{R}^n$, $n \geq 2$ un ouvert à bord C^∞ et supposons que $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}$ soit connexe. Soit P l'opérateur $-\Delta = -\sum_1^n \partial_{x_j}^2$ sur $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}$ avec condition de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$. On note λ_j les pôles de scattering (ou résonances) dans le demi-plan inférieur, définis comme les pôles de l'extension méromorphe de $(P - z^2)^{-1} : C_0^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O}) \to C^\infty(\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O})$ à travers de $]0, \infty[$ jusqu'au demi-plan inférieur. (Voir par exemple [SZ1] et les références qui s'y trouvent.)

Dans cet exposé on s'intéresse aux majorations du nombre de résonances dans des domaines proches de l'axe réel positif, pour d'autres majorations, nous renvoyons à Melrose [M], Zworski [Z], Sjöstrand-Zworski [SZ1], Vodev [V1-3]. Si $N_\delta(\lambda)$, $\lambda \geq 1$ désigne le nombre de résonances (comptées avec leur multiplicité, voir [SZ1]) dans $\{z \in \mathbf{C}; 1 \leq \Re z \leq \lambda, -\Im z \leq \delta\Re\lambda\}$, alors il résulte d'un résultat général dans [SZ2] que

$$N_\delta(\lambda) \leq \frac{\mathrm{Vol}(B(0,1))}{(2\pi)^n}\mathrm{Vol}((\mathrm{ch}\mathcal{O}) \setminus \mathcal{O})\lambda^n + \mathcal{O}(\delta^{2/7})\lambda^n, \ \lambda \geq \lambda(\delta) \tag{1}$$

où "ch" = "enveloppe convexe de", et en particulier, si $\mathcal{O}$ est convexe, on obtient:

$$N_\delta(\lambda) \leq C\delta^{2/7}\lambda^n, \ \lambda \geq \lambda(\delta) \tag{2}$$

Il y a environ un an (voir [SZ3]) nous avions démontré par des dilatations complexes jusq'au bord, dans le cas où $\mathcal{O}$ est strictement convexe que:

$$N_\delta(\lambda) \leq C\delta^{3/2}\lambda^n, \ \lambda \geq \lambda(\delta) \tag{3}$$

et l'exemple de la boule de l'unité montre que les exposants ne peuvent pas être améliorés. Plus récemment Hargé-Lebeau [HL] ont observé qu'essentiellement la même méthode permet de montrer assez simplement l'absence d'une infinité de résonances dans un voisinage du type inverse cubique de l'axe réel positif même si le bord de l'obstacle est seulement de classe C^∞ (résultat auparavant établi par l'école russe en dimension 2 et 3). En particulier ils ont observé que $\frac{\pi}{3}$ est un choix judicieux comme angle de dilatation.

Nous avons donc été amenés à chercher des résultats plus compléts que (3), et plutôt que de développer une machine de problèmes aux limites elliptiques comme dans [SZ3], nous avons utilisé une transformation de FBI tangentielle et nous avons adapté certains arguments de [S]. Les résultats ci-dessous se trouvent dans [SZ4], et nous renvoyons à ce travail pour plus de détails.

1. Résultats. On suppose désormais que $\mathcal{O}$ est strictement convexe.

Théorème 1. *Pour $\lambda \geq \lambda_0$ assez grand et pour $0 < \mu \leq \mu_0$ assez petit, le nombre de résonances pour le laplacien de Dirichlet extérieur dans $\{z \in \mathbf{C}; \lambda \leq \Re z \leq (1 + \sqrt{\mu})\lambda, \ 0 \leq -\Im z \leq \mu\lambda\}$ est $\mathcal{O}(\mu^2\lambda^n)$.*

Corollaire. *Soit* $0 < \alpha \leq 1$. *Le nombre de résonances dans* $\lambda_0 \leq \Re z \leq \lambda$, $0 \leq -\Im z \leq \delta(\Re z)^\alpha$ *est* $\mathcal{O}(\delta^{3/2}\lambda^{n-3(1-\alpha)/2})$.
Corollaire du corollaire. *Le nombre de résonances dans* $\lambda_0 \leq \Re z \leq \lambda$, $0 \leq -\Im z \leq C(\Re z)^{1/3}$ *est* $\mathcal{O}(\lambda^{n-1})$.

Rappelons ici que d'après Hargé-Lebeau [HL], si

$$S_{\min} = 2^{1/3}\cos(\frac{\pi}{6})\zeta_1(\min_{x'\in\partial\mathcal{O},\, i=1,..,n-1}K_i(x'))^{2/3}$$

où $K_i(x')$ sont les courbures principales et $-\zeta_1$ est la première racine de la fonction d'Airy, alors pour $c_1 > 0$ assez grand, le domaine

$$1 \leq \Re z,\ 0 \leq -\Im z \leq \frac{S_{\min}}{2}(\Re z)^{1/3} - c_1$$

ne contient qu'un nombre fini de pôles. Nous retrouvons ce résultat au cours de la démonstration du

Théorème 2. *Supposons que la deuxième forme fondamentale restreinte au fibré en sphères sur* $\partial\mathcal{O}$ *atteint son minimum (exactement) sur une sous-variété de codimension* ν *et que ce minimum soit non-dégéneré au sens que le hessien transversal soit non-dégéneré. Alors, si* $c > 0$, $\frac{2}{3} \leq \alpha \leq 1$, *le nombre de résonances dans*

$$1 \leq \Re z \leq \lambda,\ \ -\Im z \leq \frac{S_{\min}}{2}(\Re z)^{1/3} + c(\Re z)^{1-\alpha}$$

est majoré par $\mathcal{O}(1)(\lambda^{n-1-(\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{3})\nu})$.

Il est en principe possible de donner des estimations plus générales sans hypothèse géometrique supplémentaire.

2. Quelques idées de la démonstration. Près d'un point du bord, on introduit des coordonnées géodésiques normales, y par $x = s(y') + y_n\nu(s(y'))$, où ν est la normale extérieure, et où $\mathbf{R}^{n-1} \supset$ ouvert $\ni y' \mapsto s(y') \in$ ouvert $\subset \partial\mathcal{O}$ est un difféomophisme local. Notons que y_n est bien défini comme la distance du point x au bord. Il est alors bien connu que,
(4)
$$-h^2\Delta = (hD_{y_n})^2 + R(y', hD_{y'}) - 2y_nQ(y', hD_{y'}) + \mathcal{O}(y_n^2(hD_{y'})^2) + \mathcal{O}(hhD_y) + \mathcal{O}(h^2)$$

où $R = -h^2 \times$ (le laplacien sur $\partial\mathcal{O}$), et Q est elliptique et lié à la matrice des courbures. Si r, q sont les symboles principaux de R, Q (au sens des opérateurs h-pseudodifférentiels), alors r, q sont homogènes de degré 2 et $r(y', \eta') > 0$, $q(y', \eta') > 0$, pour $\eta' \neq 0$.

Dans [SZ3] nous avons considéré des sous-variétés totalement réelles Γ de $\mathbf{C}^n$, définies comme l'image de l'application $\mathbf{R}^n \setminus \mathcal{O} \ni x \mapsto x + if'(x)$, où f est une fonction convenable, égale à $\theta\mathrm{dist}(x, \partial\mathcal{O})^2$, près de $\partial\mathcal{O}$, pour un $\theta > 0$ convenable. On sait alors ([SZ1-3]) que les résonances près de l'axe réel sont des valeurs propres de l'opérateur différentiel elliptique $-h^2\Delta_{|\Gamma}$ sur Γ avec condition de Dirichlet sur $\partial\mathcal{O}$, et de plus on sait que l'essentiel de la difficulté de l'estimation du nombre de ces valeurs propres est concentré à un petit voisinage du bord. Choissisant θ avec $\arg(1+i\theta) = \frac{\pi}{3}$, on trouve près du bord en coordonnées géodésiques normales (avec y' réel et $y_n = e^{i\pi/3}\tilde{y}_n$, avec $\tilde{y}_n$ réel et écrivant ensuite y_n à la place de $\tilde{y}_n$):

$$
\begin{aligned}
(5) \qquad & -h^2\Delta_{|\Gamma} = \\
& e^{-2\pi i/3}((hD_{y_n})^2 + 2y_n Q(y', hD'_y)) + R(y', hD_{y'}) + \\
& \mathcal{O}(y_n^2(hD_{y'})^2) + \mathcal{O}(hhD_y) + \mathcal{O}(h^2)
\end{aligned}
$$

Notons maintenant P, l'opérateur dans (5). Suivant la stratégie générale de [SZ1-3], on fixe un nombre ω_0 dans le premier quadrant ouvert (par exemple $1+i$) et le problème essentiel est alors de majorer le nombre de petites valeurs propres de $(P-\omega_0)^*(P-\omega_0)$ (c.à.d. les valeurs propres $\le (\Im\omega_0 + \mu)^2$ pour μ petit). Comme les formules deviennent rapidement très lourdes on se contente de mentionner vaguement quelques idées.

Séparant formellement les variables dans (5), on est amené à considérer d'abord les valeurs propres de

$$
(6) \qquad |e^{-2\pi i/3}((hD_{y_n})^2 + 2y_n q(y', \eta')) + r(y', \eta') - \omega_0|^2
$$

sur $[0, \infty[$ avec condition de Dirichlet en 0 pour $(hD_{y_n})^2 + 2y_n q(y', \eta')$. Bien entendu, il suffit pour cela de remarquer que les valeurs propres de ce dernier opérateur sont données par $(2qh)^{2/3}\zeta_j$, où $-\zeta_j$ sont les zéros de la fonction d'Airy, car les ζ_j sont les valeurs propres de l'opérateur d'Airy $D_t^2 + t$ avec condition de Dirichlet en 0.

Soit $r_0 = \Im\omega_0$. Pour $\mu > 0$ petit, on définit $\hat{\mu}(x', \xi')$ par

$$
|r(x', \xi') - \omega_0 - e^{-2\pi i/3}\hat{\mu}(x', \xi')| = r_0 + \mu
$$

avec la convention que $\hat{\mu} = 0$ si $|r(x', \xi') - \omega_0| \ge r_0 + \mu$. Pour la démonstration du théorème 2, on suppose que $\mu \le (S_{\min}(\Re\omega_0)^{2/3} + \frac{1}{C})h^{2/3}$. Si $e_{x', \xi'}(t)$ est la première fonction propre de $(hD_t)^2 + 2tq(x', \xi')$, on trouve en employant une transformation de FBI tangentielle T (voir [SZ4] pour plus de précisions)

$$
\begin{aligned}
(7) \qquad & \|(P-\omega_0)u\|^2 \ge ((r_0+\mu)^2 - \mathcal{O}(h))\|u\|^2 - \\
& \int\int_{T^*\partial\mathcal{O}} \mathcal{O}(1)(\hat{\mu}(x', \xi') - \zeta_1(x', \xi')h^{2/3})_+ |\gamma_1(x', \xi')Tu(x', \xi')|^2 dx' d\xi'
\end{aligned}
$$

où

$$
\zeta_1(x', \xi') = (2q(x', \xi'))^{2/3}\zeta_1 \text{ et } \gamma_1(x', \xi')v = \int_0^\infty v(x_n)\overline{e_{x', \xi'}(x_n)}dx_n
$$

Pour $\mu \le S_{\min}(\Re\omega_0)^{2/3}h^{2/3}$ on peut prendre le dernier terme égal à 0, et on obtient le résultat de Hargé-Lebeau, déjà mentionné. Plus généralement, on veut remplacer le dernier terme par $-(Q_\delta u|u)$ où Q_δ est de rang le plus petit possible. (Ici on suit la stratégie générale de [S].) On commence par voir que $\gamma_1(x', \xi')Tu(x', \xi')$ peut être remplacé par $T\gamma_1(x', hD_{x'})u$, et ensuite on utilise une observation simple concernant des opérateurs de

Toeplitz (en changeant légèrement les notations et voyant maintenant les transformées de FBI comme des fonctions holomorphes dans des espaces à poids):

Soit Φ une forme quadratique strictement pluri-sousharmonique sur $\mathbf{C}^m$, $m = n-1$, et $\Pi : L^2_\Phi \to H_\Phi$ le projecteur orthogonal, où $L^2_\Phi = \{u : \mathbf{C}^m \to \mathbf{C}; \int e^{-2\Phi(x)/h}|u(x)|^2 L(dx) < \infty\}$, $L =$ la mesure de Lebesgue, $H_\Phi = \{u \in L^2_\Phi; u \text{ est entière }\}$. Si $q \in L^\infty_{\mathrm{comp}}(\mathbf{C}^m)$ alors l'opérateur $\Pi q \Pi^*$ est traçable, et

$$\operatorname{tr} \Pi q \Pi^* = (2\pi h)^{-m} \int\int_{\Lambda_\Phi} q(x) dx d\xi, \quad \Lambda_\Phi = \{(x, \frac{2}{i}\frac{\partial \Phi}{\partial x}; x \in \mathbf{C}^m\}$$

Si $q \geq 0$ on en déduit que pour $\epsilon > 0$, il existe un opérateur K_ϵ de rang fini tel que

$$\|\Pi q \Pi^* - K_\epsilon\| \leq \epsilon, \quad \mathrm{rang} K_\epsilon \leq \frac{1}{\epsilon(2\pi h)^m} \int\int_{\Lambda_\Phi} q(x) dx d\xi$$

Appliquant ceci à l'estimation (7) avec un ϵ convenable, on trouve une majoration pour les petites valeurs propres de $(P-\omega_0)^*(P-\omega_0)$ qui avec des inégalités de Weyl, mène à une majoration du nombre des valeurs propres de $(P-\omega_0)$ de module $\leq r_0 + \mu$, et à partir de cette majoration on obtient le théorème 2.

Pour le théorème 1, plusieurs racines de la fonction d'Airy interviennent en général, mais on a encore une estimation analogue à (7) maintenant avec γ_1 remplacé par un projecteur dépendant de (x', ξ') et dont le rang est variable. Pour arriver de (7) à une estimation avec un opérateur qui globalement est de rang fini, on peut alors appliquer un argument de [S] qui consiste à faire un recouvrement avec des boules de rayon $\epsilon\sqrt{h}$ et approcher l'identité dans chaque boule par un opérateur de rang 1.

Rappelons finalement que dans le cas où $\partial\mathcal{O}$ est analytique, Bardos-Lebeau-Rauch [BLR] ont une estimation sur l'absence d'une infinité de résonances dans des domaines paraboliques du type inverse cubique avec une constante qui est en général meilleure que celle du cas C^∞, et qui s'exprime en termes de certaines moyennes le long de géodésiques du bord. Il serait intéressant de voir si on a alors une version correspondante du théorème 2, et une manière d'attaquer ce problème serait d'introduire des poids supplémentaires de la forme $e^{h^{2/3}\psi(y',\eta')/h}$ du coté des transformées de FBI.

Bibliographie

[BLR] C.Bardos, G.Lebeau, J.Rauch, *Scattering frequencies and Gevrey 3 singularities,* Inv. Math. 90(1)(1987), 77-114.

[HL] T.Hargé, G.Lebeau, *Diffraction par un convexe.* Prépublication d'Orsay n° 93-30 (1993).

[M] R.Melrose, *Polynomial bounds on the number of scattering poles,* Journées d'Equations aux dérivées partielles de Saint-Jean-de-Monts (1984), Ecole Polytechnique,

[S] J.Sjöstrand, *Geometric bounds on the density of resonances for semiclassical problems,* Duke Math. J. 60(1)(1990), 1-57.

[SZ1] J.Sjöstrand, M.Zworski, *Complex scaling and the distribution of scattering poles,* J. of Amer. Math. Soc. 4(4)(1991), 729-769.

[SZ2] J.Sjöstrand, M.Zworski, *Distribution of scattering poles near the real axis,*

Comm.P.D.E. 17(1992), 1021-1035.
[SZ3] J.Sjöstrand, M.Zworski, *Estimates on the number of scattering poles for strictly convex obstacles near the real axis,* Ann. Inst. Fourier, à paraître.
[SZ4] J.Sjöstrand, M.Zworski, *The complex scaling method for scattering by strictly convex obstacles,* Prépublication de l'Institut Mittag-Leffler, n° 10, (1992-93).
[V1] G.Vodev, *Sharp polynomial bounds for metric perturbations of the Laplacian in* R^n, Math. Ann. 291(1991), 39-49.
[V2] G.Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian,* Comm. Math. Phys. 146(1992), 205-216.
[V3] G.Vodev, *Sharp bounds on the number of scattering poles in even dimensional spaces,* Duke Math. J., à paraître.
[Z] M.Zworski, *Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles,* Duke Math. J. 59(1989),311-323.

J. Sjöstrand
Dépt. de Mathématiques, Université de Paris Sud
F-91405 Orsay, Cedex, France