B. Helffer

Estimations sur les fonctions de corrélation pour des modèles du type de KAC

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 12, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A12_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

ESTIMATIONS SUR LES FONCTIONS DE CORRELATION POUR DES MODELES DU TYPE DE KAC

B. HELFFER

Exposé n° XII

27 Avril 1993

ESTIMATIONS SUR LES FONCTIONS DE CORRÉLATION POUR DES MODÈLES DU TYPE DE KAC

Bernard Helffer
DMI-ENS
45 rue d'Ulm
F-75230 Paris Cédex

Résumé. *On se propose dans cet exposé de décrire certains résultats obtenus en collaboration avec J.Sjöstrand [16] sur les fonctions de corrélation associé à une famille de mesures* $\exp(-\Phi^{(m)}(x))dx^{(m)}$ *définies* $I\!R^m$ *où* $\Phi^{(m)}$ *est un potentiel sur* $I\!R^m$ *qui est la somme d'un potentiel harmonique* $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{m} x_j^2$ *et d'un terme d'interaction. Nous nous intéresserons à des estimations contrôlées par rapport à la dimension* m *et donnerons des applications à l'équation de Schrödinger. L'accent sera surtout mis sur les motivations et au niveau des techniques sur l'utilisation du principe du maximum. Nous ferons aussi le point sur des conjectures de Kac-Thompson pas encore résolues. Ce texte peut être considéré à la fois comme une introduction et comme une présentation de notre travail, avec J.Sjöstrand [16] qui contient les démonstrations détaillées.*

1 Introduction

Dans différentes publications récentes, nous (c'est à dire ici J.Sjöstrand ou B.Helffer seuls ou en collaboration) avons essayé de réinvestiguer à la lumière de techniques semi-classiques plus récentes différents "vieux" problèmes posés tant en mécanique statistique qu'en théorie des champs [27], [28], [29], [14], [15], [9], [10], [11] et [12]. Faute d'être spécialiste dans ces domaines, je dois préciser que ma motivation personnelle initiale était la lecture d'un cours de M.Kac [18] que m'a fait découvrir M.Brunaud. Le développement par J.Sjöstrand [27], [28] de puissantes techniques pour l'étude de problèmes semi-classiques en grande dimension a fourni une motivation supplémentaire. Même si beaucoup problèmes de base posés dans les années 60 ont apparemment été résolus par d'autres méthodes, il semble intéressant de revenir à un certain nombre de questions posées initialement tant pour des opérateurs de Schrödinger, que pour certaines intégrales du type de Laplace ou pour des opérateurs à noyau intégral que nous appellons les opérateurs de Kac. Danc ce contexte, le paramètre semi-classique est plutôt vu comme un outil d'analyse des phénomènes mais il apparait aussi comme naturel dans la compréhension de la méthode du champ moyen autour du théorème de Lebowitz-Penrose. Nous concentrerons en fait notre exposé sur des techniques non semi-classiques relevant pour l'essentiel du principe du maximum et qui apparaissent comme fondamentales dans le travail de J.Sjöstrand [28], lui même inspiré d'un travail plus ancien de I.M.Singer, B.Wong, S.T.Yau et S.S.T. Yau [26]. Le grand intérêt des techniques basées sur le principe du maximum est que les contrôles des différentes quantités apparaissent avec des constantes très explicites qu'il est possible de suivre par rapport à la dimension. Nous étudions ici une famille de mesures définies sur $I\!R^m$ paramétrées par m et de la forme:

$$d\mu^{(m)} = \exp(-\Phi^{(m)}(x)/h)dx^{(m)} \tag{1.1}$$

où $dx^{(m)}$ est la mesure de Lebesgue sur $I\!R^m$ et $\Phi^{(m)}$ est une famille de potentiels C^∞ sur $I\!R^m$ du type introduit par M.Kac, invariant par permutation circulaire des variables [18]. On étudie alors le comportement asymptotique de la famille lorsque la dimension tend vers l'infini.

Nous donnerons en Section 2 quelques motivations conduisant à l'introduction de ce type de potentiels.

Dans la Section 3, nous présenterons quelques résultats concernant la limite thermodynamique. La question de base, présente dans toute étude de modèles de mécanique statistique, concerne en effet l'existence de la limite :

$$\lambda = -\lim_{m\to\infty} \ln \mu^{(m)}(I\!R^m)/m. \tag{1.2}$$

Même si l'objectif que nous pourrions donner à plus long terme à tous ces travaux soit l'étude précise de phénomènes de transitions de phase, nous ne

considèrerons ici que la situation où le potentiel est convexe. Très schématiquement, la transition de phase est attendue dans ce contexte lorsque l'on introduit une famille de potentiels V_ν (où ν est proportionnel à l'inverse de la température) qui se déforme en fonction de ce paramètre d'une situation convexe à une situation de double puits. On peut donc considérer les travaux présentés ici comme une tentative préliminaire de développer d'abord les techniques de grande dimension dans la situation plus facile du cas convexe. Ces techniques laissent toutefois espérer au moins un certain contrôle par rapport au paramètre lorsque la convexité du potentiel passe du cas strictement convexe au cas convexe.
Dans cette situation convexe, nous pourrons analyser la vitesse de convergence vers la limite thermodynamique puis étudier plus finement la famille de mesures. Si g est une fonction de k variables, nous pourrons étudier le comportement de la moyenne de g par rapport à la mesure normalisée lorsque m tend vers l' ∞:

$$\langle g\rangle_\infty = \lim_{m\to\infty} \langle g\rangle_m \tag{1.3}$$

où

$$\langle g\rangle_m = \int g d\mu^{(m)} / \int d\mu^{(m)}. \tag{1.4}$$

Comme cas particulier, mais important, nous pourrons analyser le cas où

$$g_{ij}(x) = x_i . x_j \,, \tag{1.5}$$

et nous nous intéresserons alors au comportement lorsque $|i-j| \to \infty$ de la corrélation :

$$\mathrm{Cor}(i,j) = \langle g_{ij}\rangle_\infty - \langle x_i\rangle_\infty \langle x_j\rangle_\infty, \tag{1.6}$$

apparaissant comme la limite quand m tend vers l'infini de :

$$\mathrm{Cor}^{(m)}(i,j) = \langle g_{ij}\rangle_m - \langle x_i\rangle_m \langle x_j\rangle_m. \tag{1.7}$$

Sa décroissance exponentielle par rapport à $|i-j|$ sera typique du cas convexe mais il sera de nouveau intéressant de la contrôler précisément en fonction d'une mesure de la stricte convexité. Nous décrirons les résultats obtenus avec J.Sjöstrand dans la Section 4.
Dans la Section 5, nous donnerons quelques indications sur les démonstrations en mettant l'accent sur l'utilisation du principe du maximum.

En Section 6, nous retournerons à nos anciennes amours, c'est à dire à l'équation de Schrödinger, pas uniquement par fidélité mais aussi parce que le carré de la première fonction propre de l'équation de Schrödinger fournit un exemple particulièrement intéressant de densité définissant une mesure. Enfin en Section 7, nous rappellerons quelques résultats ou problèmes ouverts concernant l'opérateur de Kac.

2 Motivations en mécanique statistique

2.1 Modèles sur $\mathbb{Z}$

Nous extrayons (traduction libre) de [22] cette petite introduction à la mécanique statistique :

La mécanique statistique s'occupe de "grands systèmes", c'est à dire d'une collection de sous-systèmes identiques contenus dans une boite $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$, dans la limite où Λ devient infiniment "grand". Par commodité, on remplace $\mathbb{R}^3$ par un réseau $\mathbb{Z}^p$ (par exemple $\mathbb{Z}$). Typiquement, pour des systèmes en mécanique classique, on se donne un espace topologique F et une mesure positive m_0 sur F. Une configuration du système est décrite par un point $x_i \in F$, pour tout $i \in \Lambda$ sur F^Λ. Un état dans Λ est simplement la donnée d'une mesure μ_Λ. Pour définir μ_Λ, on choisit une fonction d'énergie E_Λ définie sur F^Λ et à valeur dans $\mathbb{R}$, un nombre $\beta > 0$ (inverse de la température). On écrit alors:

$$\mu_\Lambda(dx) = \frac{1}{Z_\Lambda}[\exp -\beta E_\Lambda(x)] \prod_{i\in\Lambda} m(dx_i),$$

où Z_Λ est la fonction de partition

$$Z_\Lambda = \int [\exp -\beta E_\Lambda(x)] \prod_{i\in\Lambda} m(dx_i).$$

Supposons que E_Λ est donnée pour toute partie finie $\Lambda \subset \mathbb{Z}^p$, et vérifie une propriété d'additivité approchée :

$$E_{\Lambda_1\cup\Lambda_2} \approx E_{\Lambda_1} + E_{\Lambda_2}$$

pour de grands Λ_1 et Λ_2 disjoints. Alors, il est naturel d'étudier les limites de μ_Λ lorsque $\Lambda \to \mathbb{Z}^p$; ce sont des mesures sur $F^{\mathbb{Z}^p}$, invariantes par les

translations de $\mathbb{Z}^p$ qui sont appelées les états d'équilibres. Ce sont les objets centraux de la mécanique statistique de l'équilibre .
Notre étude peut être considérée dans le cadre ci-dessus en prenant :
$p = 1$, $F = \mathbb{R}$, $m(dx) = (2\pi)^{-1/2} \exp -x^2/2.dx$
et, pour $\Lambda = \{1, ..., m\}$,
$E_\Lambda(x) = \sum_{i=1}^m W(x_i, x_{i+1})$.
L'hypothèse de convexité correspond alors à l'idée qu'il existe une unique mesure limite ce que nous observerons effectivement sous des hypothèses convenables (correspondant d'une certaine manière à β assez petit). Une transition de phase apparaîtra si la limite cesse d'être unique. Quand nous parlerons de limite thermodynamique nous envisagerons en particulier l'étude de la limite de $\ln Z_\Lambda / Vol\Lambda$.

2.2 Modèles de Kac associés à des systèmes de spins sur $\mathbb{Z}^2$

Une autre motivation dominante chez [4] est une étude d'un modèle présenté par Kac [18] dans son cours à Brandeis et dont l'origine remonte semble-t-il à [19]. Ce modèle correspond à un système de spins défini sur un réseau carré de dimension 2. M.Kac propose l'étude du modèle suivant (appelé Modèle A dans la section 7 de [18]) dont l'hamiltonien est donné par:

$$E_{\Lambda(n,m)}(\sigma) = - \sum_{(P,Q)\in\Lambda(n,m)\times\Lambda(n,m)} v_{P,Q}\sigma_P\sigma_Q$$

avec :

$$\Lambda(n,m) = [1, ..., n] \times (\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}) \text{ , } \sigma_P \in \{-1, +1\}, J \in \mathbb{R}_+^\star, \gamma \in \mathbb{R}_+^\star$$

avec:

$$v_{P,P} = 0$$

et

$$v_{P,Q} = J\gamma \exp(-\gamma|k - k'|) \left(\delta_{\ell',\ell} + (1/2)(\delta_{\ell',\ell+1} + \delta_{\ell',\ell-1})\right)$$

si $P = (k, \ell) \neq Q = (k', \ell')$.
Dans ce réseau, deux spins interagissent donc s'ils sont sur la même colonne ou sur deux colonnes voisines, avec atténuation exponentielle par rapport à la distance entre leurs lignes. On s'intéresse à l'étude asymptotique de ce

modèle (i.e on considèrera une suite croissante avec (n,m) $\Lambda(n,m)$). Plus précisément, on introduit d'abord la fonction de partition :
$Z_{\Lambda(n,m)} = Z_{n,m}$
par :

$$Z_{n,m} = \sum_{\sigma \in \{-1,+1\}^{\Lambda(n,m)}} \exp(-\beta E_{\Lambda(n,m)}(\sigma)).$$

On obtient ainsi une probabilité naturelle $P^{(n,m)}$ sur $\{-1,+1\}^{\Lambda(n,m)}$ telle que $P^{(n,m)}(\{\sigma\}) = \exp -\beta(E_{\Lambda(n,m)}(\sigma))/Z_{n,m}$. Puis on regarde l'énergie par spin notée $-\beta\Psi$ dans la limite thermodynamique

$$\beta\Psi := \lim_{m\to\infty}(\frac{1}{m}).\left[\lim_{n\to\infty} \ln Z_{n,m}/n\right] .$$

M.Kac observe alors que cette énergie libre par spin peut être calculée par la formule :

$$-\beta\Psi = \ln 2 - \beta\gamma/2 + \lim_{m\to\infty}(\ln \mu_1^{(m)}/m)$$

où $\mu_1^{(m)}$ est la plus grande valeur propre d'un opérateur intégral K compact donné par :

$$K = K_{Q^{(m)}} := \exp(-Q^{(m)}/2)\exp(-\gamma(-\Delta^{(m)}))\exp(-Q^{(m)}/2)$$

avec

$$Q^{(m)}(y) = (\tanh(\gamma/2)/2)\sum_{k=1}^{m} y_k^2 - \sum_{k=1}^{m} \ln\cosh(\sqrt{\nu\gamma/2}(y_k + y_{k+1}))$$

et

$$\nu = J\beta.$$

On notera plus généralement par $\mu_j^{(m)}$ la suite décroissante des valeurs propres de K.
Lorsque γ tend vers 0, l'opérateur est en un certain sens bien approché par : $\exp(\gamma\Delta^{(m)} - Q^{(m)})$ (Confer [4] ou [12] pour des résultats rigoureux dans cette direction) et il est par conséquent naturel après un changement d'échelle

$$x_k = \gamma^{\frac{1}{2}} y_k ,$$

d'étudier le problème de l'existence de la limite, lorsque $m \to \infty$ de $\lambda_1(m; h, \nu)/m$ où $\lambda_1(m; h, \nu)$ est la plus petite valeur propre de l'opérateur de Schrödinger :

$$S^{(m)}(x, hD_x; \nu) = -h^2\Delta^{(m)} + V^{(m)}(x; \nu)$$

avec :

$$V^{(m)}(x,\nu) = (\frac{1}{4})\sum_{k=1}^{m} x_k^2 - \sum_{k=1}^{m} \ln\cosh(\sqrt{\nu/2}(x_k + x_{k+1})),$$

où on convient que $x_{m+1} = x_1$.
h est donc essentiellement équivalent à γ lorsque γ tend vers 0 et on arrive (après une nouvelle approximation) à un problème semi-classique traditionnel pour un opérateur de Schrödinger. Dans ce contexte, deux corrélations naturelles apparaissent qui vont induire deux problèmes naturels pour l'opérateur de Kac ou pour son analogue de Schrödinger. Nous suivons ici le cours de Kac [18]. On peut d'abord considérer la fonction de corrélation de deux spins dans la même colonne séparés par une distance r. On introduit alors :

$$Cor_{ligne}(r) = \lim_{m\to\infty} Cor_{ligne}^{(m)}(r)$$

et

$$Cor_{ligne}^{(m)}(r) = \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_{k,\ell}.\sigma_{(k+r,\ell)}\rangle_{n,m}$$

où $\langle\ .\ \rangle_{n,m}$ correspond à la moyenne par rapport à la probabilité $P^{(n,m)}$. Le calcul de $Cor_{ligne}^{(m)}(r)$ (cf la formule (7.32) dans [18]) donne :

$$Cor_{ligne}^{(m)}(r) = \sum_{j=2}^{\infty} (\frac{\mu_j^{(m)}}{\mu_1^{(m)}})^r \left[\int_{\boldsymbol{R}^m} u_1^{(m)}(x) u_j^{(m)}(x) \tanh(\sqrt{\nu\gamma/2}(x_1 + x_2))dx\right]^2 .$$

Le comportement asymptotique quand r tend vers l'infini de cette quantité est donc directement relié à l'estimation quand $m \to \infty$ de $\frac{\mu_2^{(m)}}{\mu_1^{(m)}}$.
Si on pense que dans la correspondance Kac- Schrödinger μ_2 correspond à $\exp -\lambda_2$. Le problème correspondant pour Schrödinger est alors l'étude de l'écart entre la deuxième et la première valeur propre .
Considérons maintenant la fonction de corrélation de deux spins dans la même colonne séparé par une distance t. On introduit cette fois-ci :

$$Cor_{col}(t) = \lim_{m\to\infty} Cor_{col}^{(m)}(t)$$

et

$$Cor_{col}^{(m)}(t) = \lim_{n\to\infty} \langle \sigma_{k,\ell}.\sigma_{(k,\ell+t)}\rangle_{n,m}.$$

Le calcul de $Cor_{col}^{(m)}(t)$ (cf la formule (7.36) dans [18]) donne :

$$Cor_{col}^{(m)}(t) = \int_{\mathbb{R}^m} u_1^{(m)}(x)^2 . \tanh(\sqrt{\nu\gamma/2}(x_1+x_2)) . \tanh(\sqrt{\nu\gamma/2}(x_{1+t}+x_{2+t}))dx.$$

C'est typiquement ce type de quantité que nous étudierons dans la Section 4, en considérant la mesure de probabilité $(u_1^{(m)})(x)^2dx$. Il faudrait cependant vérifier que la mesure en question satisfait les hypothèses. Des résultats partiels dans cette direction seront donnés en Section 7. Il n'est pas exclu non plus ici que des techniques de mécanique statistique plus standard donnent les résultats voulus.

2.3 Modèles de Schrödinger

Comme on vient de le voir, l'étude de modèles de ce type peut provenir de l'idée qu'une approximation semi-classique du modèle de Kac est fournie en considérant l'exponentielle de - l'opérateur de Schrödinger et de l'idée partiellement naïve qu'on sait sûrement tout faire sur l'équation de Schrödinger grâce aux méthodes semi-classiques développées ces dix dernières années. Cette idée était naïve en ce sens que les problèmes rencontrés en grande dimension peuvent être considérables. Les articles de J.Sjöstrand [27], [28] et [31] fournissent l'amorce d'une théorie générale sur ces questions dont on pourra aussi trouver des applications convainquantes dans [14], [15], [10] ou [16].

Mais on peut aussi considérer ce problème comme apparaissant naturellement en mécanique quantique pour un problème à un grand nombre de particules et je pense que c'était une des motivations de départ pour J.Sjöstrand (cf [28]). On se donne, pour $j \in \{1, ..., m\}$, un oscillateur harmonique correspondant à une particule et on introduit une interaction entre les différentes particules. On associe à l'ensemble $\{1, ..., m\}$ que l'on préfère ici considérer comme $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ une suite (pour $m \in \mathbb{N}$) d'opérateurs de Schrödinger associés à des potentiels de la forme

$$V^{(m)} = \frac{1}{2}\sum_i x_i^2 + \sum_{i=1}^m W(x_i, x_{i+1})$$

pour ne choisir que des interactions entre plus proches voisins. Sous des hypothèses naturelles, on voit que la plus petite valeur propre $\lambda^{(m)}$ est essentiellement linéaire par rapport à m et l'énergie moyenne par particule est définie naturellement par $\lambda^{(m)}/m$. Notons que le problème que nous considérons ici n'est pas fermionique en ce sens qu'on ne se restreint pas, dans l'étude spectrale, aux états propres antisymétriques. La nature des problèmes est donc très différente de celle souvent considérée dans l'étude de la stabilité de la matière (cas des fermions) (cf [24] pour une présentation).

3 Limite thermodynamique

On pourra trouver dans l'ouvrage de Ruelle [21] des théorèmes d'existence de limite thermodynamique. Celui indiqué ci-dessous n'y figure pas mais le principe de démonstration reste essentiellement le même avec une technique supplémentaire d'intégration par parties:

Proposition 3.1 :
Soit C une constante positive et considérons la famille suivante de potentiels indexée par $m \in I\!N$:

$$\Phi^{(m)}(x) = \frac{x^2}{2} + \Psi^{(m)}(x)$$

satisfaisant les propriétés suivantes :

$$\Psi^{(m)}(0) = 0 \tag{3.1}$$

$$|\nabla\Psi^{(m)}|_{\ell^\infty} \leq C \tag{3.2}$$

$$|\nabla(\Psi^{(m+n)} - (\Psi^{(m)} \oplus \Psi^{(n)}))|_{\ell^1} \leq C \tag{3.3}$$

$$|\Delta(\Psi^{(m+n)} - (\Psi^{(m)} \oplus \Psi^{(n)}))| \leq C. \tag{3.4}$$

Alors la limite thermodynamique existe et la vitesse de convergence vers la limite est mesurée par l'estimation:

$$|\lambda + (\ln \mu^{(m)}(I\!R^m)/m)| \leq D/m \tag{3.5}$$

où D peut être calculée à partir de C.

Corollaire 3.2 :
Soit W une fonction de classe C^2 sur $I\!R^2$ telle que ∇W et ΔW soient bornées. Alors les hypothèses de la Proposition 3.1 sont satisfaites pour :

$$\Psi^{(m)}(x) = \Sigma_{i=1}^m W(x_i, x_{i+1}) \tag{3.6}$$

avec la convention que $x_{m+1} = x_1$.

Ce corollaire a été présenté dans différentes versions dans [9], [10] et [16]. Le corollaire s'applique au cas de notre exemple motivant du à Kac:

Exemple 3.3 *:*
On part du potentiel de deux variables

$$W(u,v) = -\ln\cosh(\sqrt{\nu}(u+v))$$

que nous avions donné en Section 2. Cet exemple a servi de modèle d'application dans beaucoup des articles que nous avons écrits ces dernières années ([27], [28], [29], [4], [14], [15], [9], [10], [11] et [12]).
La famille correspondante de potentiels est convexe pour $\nu \leq 1/4$ *.*

Donnons maintenant un résultat sur le contrôle de la vitesse de convergence pour $\ln(\mu_1^{(m)}(\mathbb{R}^m))/m$. Ce résultat est inspiré par le théorème donné par J.Sjöstrand dans [29].

Théorème 3.4 *:*
On garde les hypothèses de la Proposition 3.1; on suppose aussi que

$$\nabla\Psi^{(m)}(0) = 0 \tag{3.7}$$

et que

$$\Psi^{(m)}(x_1, x_2, ..., x_m) = \Psi^{(m)}(x_2, x_3, ..., x_m, x_1). \tag{3.8}$$

On suppose ensuite que, pour $C,\ \kappa > 0$ *et* $0 < \delta < 1$*, la famille*

$$\Phi^{(m,n)}(x,s) = (1-s)\Phi^{(m+n)}(x) + s(\Phi^{(m)}(x') + \Phi^{(n)}(x"))$$

vérifie pour tout $s \in [0,1]$*,* m *et* n *dans* $\mathbb{N}$ $(m \geq 1; n \geq 1)$*,*
$x = (x', x") \in \mathbb{R}^{m+n}$ *:*

$$(\mathrm{Hess}_x\Phi^{(m,n)})(x,s)) \geq (1/C)\,, \tag{3.9}$$

$$||\mathrm{Hess}\Phi^{(m,n)})(x,s)||_{\mathcal{L}(B_1)} \leq C\,, \tag{3.10}$$

avec

$$B_1 = (\mathbb{R}^{(m+n)}, ||\ \ ||_{\ell^\infty}). \tag{3.11}$$

Introduisons aussi la famille d'espaces normés B (avec comme espace vectoriel sous-jacent $\mathbb{R}^{(m+n)}$) tels que nous avons

$$B = \ell^{\infty}_{\rho_{m,n}} \tag{3.12}$$

où $\rho_{m,n}$ appartient à la famille de poids définie sur $\mathbb{Z}/(m+n)\mathbb{Z}$ et vérifiant:

$$\rho(1) = \rho(m) = 1 \tag{3.13}$$

$$e^{-\kappa} \leq \frac{\rho(\nu+1)}{\rho(\nu)} \leq e^{\kappa} \ , \ \nu \in \mathbb{Z}/(m+n)\mathbb{Z} \ . \tag{3.14}$$

On désigne par $\mathcal{B}_2$ cette famille de B's associée à un κ et nous supposons que pour tout B dans $\mathcal{B}_2$:

$$||\nabla^2 \Phi^{(m,n)}(x,s))||_{\mathcal{L}(B,B)} \leq C, \tag{3.15}$$

et plus précisément

$$||(I - \mathrm{Hess}_x \Phi^{(m,n)})(x,s)||_{\mathcal{L}(B)} \leq \delta < 1 \ , \tag{3.16}$$

$$||\nabla^3(\Phi^{(m,n)})(x,s))||_{\mathcal{L}(B_1 \times B, B)} \leq C \ , \tag{3.17}$$

$$||\nabla^4(\Phi^{(m,n)})(x,s))||_{\mathcal{L}(B_1 \times B_1 \times B, B)} \leq C \ , \tag{3.18}$$

$$|\nabla(\Psi^{(m+n)} - (\Psi^{(m)} \oplus \Psi^{(n)}))(x)|_B \leq C \ , \tag{3.19}$$

(raffinement de (3.3))

$$||\nabla^2(\Psi^{(m+n)} - (\Psi^{(m)} \oplus \Psi^{(n)}))(x)||_{\mathcal{L}(B_1,B)} \leq C \ , \tag{3.20}$$

(raffinement de (3.4))

$$||\nabla^3(\Psi^{(m+n)} - (\Psi^{(m)} \oplus \Psi^{(n)}))(x)||_{\mathcal{L}(B_1 \times B_1, B)} \leq C \ ,. \tag{3.21}$$

Sous ces hypothèses nous avons:

$$|a(m)/m - \lim_{m \to \infty} a(m)/m| \leq E \exp -\kappa m/4 \tag{3.22}$$

pour une certaine constante E (indépendante de m) .

Ce théorème est l'analogue du Théorème 3.1 dans [29]. L'hypothèse que

$$\nabla\Psi^{(m)}(0) = 0$$

correspond à l'hypothèse que l'unique point critique est en 0. C'est bien sûr automatiquement le cas si Ψ est une fonction paire. Dans certains cas (par exemple dans l'étude de la magnétisation) cette condition n'est pas satisfaite et on doit faire une analyse plus soigneuse.

Remarque 3.5 *:*
Les hypothèses du théorème 3.4 sont vérifiées dans le cas de l'exemple 3.3 pour $0 < \nu < 1/4$ *et plus généralement, pour* β *assez petit, pour la famille de potentiels :*

$$V^{m)}(x) = x^2/2 + \beta \sum_i W(x_i, x_{i+1})$$

où W *est de classe* C^3 *avec* $\nabla^p W(x)$ *borné pour* $p = 1, 2, 3$.

4 Etude de la corrélation

Nous étudions maintenant plus précisément la famille de mesures sur des fonctions cylindriques. C'est l'objet de la :

Proposition 4.1 *:*
Soit c *une fonction* C^∞ *définie sur* $I\!R^k$ *t.q.* $\nabla c \in C_b^\infty(I\!R^k)$ *que nous identifions avec une fonction sur* $I\!R^m$ *par:*

$$c^{(m)}(x) = c(x_1, x_2, ..., x_k),$$

alors, sous les hypothèses du Théorème 3.4, la limite quand m *tend vers l'* ∞ *de* $\langle c^{(m)} \rangle_m$ *existe et la convergence est exponentiellement rapide comme en (3.22).*

Remarquons ici que l'identification de c et de $c^{(m)}$ peut paraître arbitraire (à une translation près sur $Z\!\!Z/mZ\!\!Z$), mais ceci n'affecte pas le calcul de $\langle c^{(m)} \rangle_m$ compte tenu de l'invariance par permutation circulaire des variables qui est toujours faite. Plus généralement nous pouvons considérer des fonctions de type polynômial et en particulier $c_{ij}(x) = x_i.x_j$ avec $1 \leq i \leq j \leq m$.

Théorème 4.2 *:*
Soit W une fonction de classe C^3 sur $I\!R^2$ telle que $\nabla^p W$ soit bornée (pour $p = 1, 2, 3$). Alors, si

$$\Psi^{(m)}(x, \beta) = \beta \sum_{i=1}^{m} W(x_i, x_{i+1}) ,$$

et si β est assez petit, la suite des corrélations

$$m \quad \to \quad \mathrm{Cor}^{(m)}(i,j) = \langle x_i x_j \rangle_m - \langle x_i \rangle_m \langle x_j \rangle_m \tag{4.1}$$

admet une limite et il existe $\kappa_0 > 0$ et C_0 t.q.

$$|\mathrm{Cor}^{(m)}(i,j)| \leq C_0 \exp -(\kappa_0 dist_{\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}(i,j)) \tag{4.2}$$

pour tout m et toute paire (i,j) t.q. $|i - j| \geq 2$.

Le problème du calcul du meilleur κ_0 est étudié dans [16]. Notons aussi que ce type de décroissance n'est pas étonnant et apparait dans l'étude de modèles de spin dans le travail de Sokal [32] (voir aussi une présentation dans le livre d'Ellis [6]).
Une autre application concerne l'étude de l'aimantation (ou magnétisation) dans le cas de cette famille de potentiels

$$\Phi^{(m)}(x, B) = \frac{1}{2} \sum_{\ell} (x_\ell - B)^2 + \Psi^{(m)}(x), \tag{4.3}$$

L'aimantation est alors définie par:

$$\mathcal{M}(m, B) = (1/m)(\partial a / \partial B)(m, B) \tag{4.4}$$

ou

$$\mathcal{M}(m, B) = \langle x_1 - B \rangle_m$$

Théorème 4.3 *:*
Sous les mêmes hypothèses que pour le Théorème 4.2, la suite des aimantations

$$m \to \mathcal{M}(m, B)$$

converge, pour β assez petit, exponentiellement vite par rapport à m et la limite dépend continûment de B. En particulier, si $\Psi^{(m)}$ est paire, la limite quand B tend vers 0 est nulle.

La dernière assertion du théorème nous dit en gros qu'il n'y a pas d'aimantation dans le cas d'un potentiel convexe.

Remarque 4.4 *Des corrélations d'ordre plus élevé sont étudiés dans [16].*

5 Utilisation du principe du maximum :

Nous nous contentons d'esquisser quelques uns des arguments et renvoyons à l'article [16] pour les détails. Pour étudier par exemple la limite thermodynamique, on introduit un problème à paramètre. On s'intéresse donc d'abord au comportement par rapport à m de l'expression :

$$a(t) = \ln \left[\frac{(\int \exp(-\Phi_t(y))dy}{\int \exp(-y^2/2)dy} \right] \tag{5.1}$$

où $\Phi_t(y) = \Phi(t, y)$ est une famille de potentiels convexes par rapport à la variable y (pas très loin en un sens à préciser de $y^2/2$) définie sur $I\!R^m$. Comme exemple typique, on considère :

$$\Phi(t, y) = t\Phi_0(y) + (1-t)y^2/2$$

(où Φ_0 sera de la forme $y^2/2 + \Psi$, avec au bout du compte Ψ vérifiant $\nabla\Psi$ borné, mais dans un premier temps Ψ à support compact). Notons que le problème est bien compris au niveau asymptotique (semi-classique et bien sûr pour $t = 0$). Cette idée apparaît d'abord dans [31] et des variantes sont développées dans [16]. On regarde la dérivée $a'(t)$ (on retrouve $a(1)$ par intégration entre 0 et 1) :

$$a'(t) = \frac{\int -(\partial_t\Phi) \exp(-\Phi(t, y))dy}{\int \exp(-\Phi(t, y))dy} \tag{5.2}$$

Il s'agira par exemple de montrer que $a'(t)/m$ converge exponentiellement vite vers une limite. On pose $b(t) = a'(t)$ et on cherche un champ de vecteur v(t,y) défini sur $I\!R^m$ tel que :

$$(\partial_t\Phi) = b(t) + v.\nabla_y\Phi - \mathrm{div}_y v \tag{5.3}$$

Sous ces conditions, on retrouve $b(t)$ à partir de v et Φ en observant qu'au point critique $y(t)$ de Φ_t on a :

$$b(t) = (\partial_t\Phi)(t, y(t)) - (\mathrm{div}_y v)(t, y(t))$$

De bonnes estimations sur v conduisent donc aux estimations souhaitées sur b. En fait, on doit plutôt contrôler, pour étudier la limite thermodynamique, la quantité

$$b(t;m+n) - b(t;m) - b(t;n)$$

ce qui conduit à l'étude d'un problème à deux paramètres (t,s) associés à la donnée d'une phase "interpolante" :

$$\Phi^{(m,n)}(x,t,s) = (1-s)\Phi^{(m+n)}(x,t) + s\left(\Phi^{(m)}(x',t) + \Phi^{(n)}(x",t)\right)$$

où $x = (x', x") \in I\!R^m \times I\!R^n (= I\!R^{m+n})$. Si $b(t,s)$ est la quantité associée, l'estimation souhaitée pour l'étude de la limite thermodynamique est une estimation de $\partial_s b(t,s)$ qu'on obtiendra à partir d'estimations de $\partial_s \nabla v(x,t,s)$ où v est la solution de (5.3). Mais concentrons nous plutôt sur l'étude de la mesure et de la corrélation. On aura donc à étudier la moyenne pour une fonction c dépendant de k variables. On note que l'expression écrite ci-dessus peut être aussi considérée comme la moyenne de $\partial_t \Phi$. On doit alors résoudre, de manière analogue à (5.3), le problème de trouver une constante b et un champ de vecteur v tel que:

$$c = b + v.\nabla_y \Phi - \mathrm{div}_y v. \tag{5.4}$$

La constante b est alors la moyenne cherchée qu'on peut retrouver en utilisant (5.4) au point critique de Φ. Ceci met en évidence le problème du contrôle de ∇v et aussi celui du positionnement du point critique. On élimine dans cette esquisse le deuxième problème en supposant Φ paire (mais ce ne sera pas le cas pour l'étude de l'aimantation) qui place le point critique en 0. Pour le deuxième point, on décide de chercher le vecteur v comme un gradient : $v = \nabla u$, et on trouve en dérivant (5.4), l'équation basique suivante:

$$w = (-\Delta + \nabla\Phi.\nabla)v + (\mathrm{Hess}\Phi)v \tag{5.5}$$

avec $w = \nabla c$.
C'est cette équation qu'on résoudra sous des hypothèses convenables (que nous ne détaillerons pas ici (voir [16]) mais il s'agit, à conjugaison près, de résoudre, si Ψ est à support compact, la perturbation d'un système couplé d'oscillateurs harmoniques) mais esquissons plutôt les arguments basés sur le principe du maximum. Une hypothèse fondamentale dans ce que nous allons

développer est l'hypothèse de convexité qui nous donnera une minoration globale de HessΦ:

$$(\mathrm{Hess}\Phi)(x) \geq \rho > 0 \tag{5.6}$$

Si on escamote les problèmes à l'infini qu'on peut résoudre par une procédure de régularisation, le principe du maximum donne :

$$\sup_x ||v(x)||_{\ell^2} \leq \sup_x ||w(x)||_{\ell^2}/\rho \tag{5.7}$$

Dans la pratique, on aura à travailler avec d'autres normes et la convexité ne sera pas suffisante (on la remplacera par une hypothèse plus forte de proximité de HessΦ avec l'identité (voir hypothèse (3.16)). Mais il est intéressant d'examiner ce cas plus simple qui éclaire d'autres propriétés de la corrélation. Cette première estimation ne donne pas de contrôle de la dérivée. Il est aussi nécessaire et intéressant pour nous de contrôler les dérivées. Regardons ce qui se passe pour la première dérivée. En dérivant l'équation de base ci-dessus, on trouve:

$$\nabla w = (-\Delta + \nabla\Phi.\nabla)\nabla v + (\mathrm{Hess}\Phi) \circ \nabla v + \nabla v \circ (\mathrm{Hess}\Phi) + v.\nabla\mathrm{Hess}\Phi \tag{5.8}$$

Si on prend par exemple, la norme Hilbert-Schmidt pour les matrices symétriques $m \times m$ ∇v et ∇w, le principe du maximum donne :

$$\sup_x ||\nabla v(x)||_{HS} \leq \left(\sup_x ||\nabla w(x)||_{HS} + \sup_x ||v(x).\nabla\mathrm{Hess}\Phi(x)||_{HS}\right)/(2\rho) \tag{5.9}$$

ou encore en utilisant l'estimation (5.7) :

$$\sup_x ||\nabla v(x)||_{HS} \leq \left(\sup_x ||\nabla w(x)||_{HS} + (\sup_x ||w||_{\ell^2}.||\nabla\mathrm{Hess}\Phi||)/\rho\right)/(2\rho) \tag{5.10}$$

où $||\nabla\mathrm{Hess}\Phi||^2 = \sum |\partial^3_{ijk}\Phi|^2$.

De nouveau, il faudra jouer avec d'autres normes et contrôler par rapport à des paramètres, ce qui a conduit J.Sjöstrand à l'introduction de la notion de fonctions k-standard dans [31], notion que nous réutilisons dans [16]. On trouvera dans les hypothèses du Théorème 3.4 (et plus précisément les conditions introduites en (3.12)-(3.14)) des exemples d'espaces avec lequel il faut en fait travailler. On veut en effet expliciter deux types de propriétés des hypothèses pour l'étude de la corrélation. La première est que si :

$$\partial^2_{ij}\Phi \leq 0 \text{ pour } i \neq j\ , \tag{5.11}$$

alors la corrélation est positive. Plus précisément, P.Cartier [5] (cf aussi le Théorème 12.6 de [24] ou le Théorème 8.16 dans [23]) a démontré ces des inégalités de corrélation :

Théorème 5.1 *Soit Φ une fonction de classe C^2 sur $\mathbb{R}^m$ vérifiant (5.11) et tendant assez vite (comme par exemple $|x|^2$) vers $+\infty$ à l'infini. Soient f et g deux fonctions qui sont monotones croissantes par rapport à chacune des variables. Alors :*

$$<fg> \geq <f><g>$$

où $<>$ désigne la moyenne par rapport à la mesure de probabilité (cf (1.4))

$$\exp -\Phi(x)dx / \int \exp -\Phi dx$$

Cette inégalité fait partie de la famille des inégalités FKG du nom de Fortuin, Kasteleyn et Ginibre [7]. On retrouvera une démonstration de ce théorème (malheureusement sous des hypothèses renforcées) en utilisant le principe du maximum et l'équation ci-dessous.
Le deuxième problème que l'on veut résoudre est de trouver des estimations asymptotiques pour la corrélation (cf l'énoncé du théorème 4.2). On observe ici le truc suivant (il faudra utiliser des techniques plus sophistiquées pour raffiner et obtenir un résultat plus proche de l'optimal (voir [16])). Si on résout l'équation (5.4) avec $c(x) = x_j$, alors la corrélation apparait simplement comme la moyenne de la fonction $v_{ij}(x)$:

$$Cor^{(m)}(i,j) = < v_{ij} >_m \quad .$$

Un bon contrôle de $\sup_x |v_{ij}(x)|$ pour $d(i,j)$ grand se déduit d'un bon contrôle de $\sup_x |\Phi_{ij}(x)|$. La mise en application de cette idée nécessitera l'introduction de poids exponentiels vérifiant les conditions (3.12)-(3.14) et les hypothèses (3.15)-(3.16) sur Φ indiquent le type de contrôle dont nous aurons besoin.

6 Retour à Schrödinger

Pour relier les résultats ci-dessus avec les résultats sur l'équation de Schrödinger rappelons un résultat essentiellement obtenu par J.Sjöstrand dans [29].

Proposition 6.1 : *Si $V^{(m)} = \frac{x^2}{2} + W^{(m)}$ vérifie les hypothèses du Théorème 3.4 (essentiellement !) avec $V^{(m)}$ remplaçant $\Phi^{(m)}$ alors le logarithme $-\ln(u_1^{(m)})$ de la première fonction propre normalisée $u_1^{(m)}$ de l'opérateur de Schrödinger sur $I\!R^m$*

$$S_V^{(m)} = -\Delta + V^{(m)}$$

vérifie les mêmes conditions avec $\Phi^{(m)} = -\ln(u_1^{(m)})$ et pour C, δ et κ convenables.

De nouveau le point de départ de la démonstration de ce théorème est la formule :

$$\nabla\Phi\nabla(\mathrm{Hess}\Phi) + (\mathrm{Hess}\Phi)\circ(\mathrm{Hess}\Phi) = \mathrm{Hess}V + \Delta(\mathrm{Hess}\Phi) \tag{6.1}$$

sur laquelle on joue avec le principe du maximum. En particulier, on peut retrouver (en suivant [26]-[29] le résultat de stricte convexité de Brascamp-Lieb [2] de Φ à partir de la même hypothèse sur V :

$$\inf_x(\mathrm{Hess}\Phi)(x) \geq (\inf_x \lambda_{\mathrm{Hess}V(x)})^{\frac{1}{2}} \tag{6.2}$$

où $\lambda_{\mathrm{Hess}V(x)}$ est la plus petite valeur propre de Hess$V$ au point x.

En travaillant à partir de la même équation, on obtient aussi dans [16] une condition suffisante sur V pour que Φ vérifie la condition (5.11) qui semble nouvelle.

Proposition 6.2 :
Si

$$0 < r_0 \leq \inf_x \mathrm{Hess}V(x)\ , \tag{6.3}$$

et si Hess$V(x)$ *est majoré et vérifie la condition (5.11), alors* Hess$\Phi(x)$ *a la même propriété.*

Ces deux propositions nous permettent donc de développer des applications à l'équation de Schrödinger qui semblent nouvelles.
Dans le cas de l'aimantation, on peut partir du potentiel :

$$V^{(m)}(x,B) = \frac{1}{2}\sum_\ell (x_\ell - B)^2 + V^{(m)}(x).$$

L'aimantation qui est alors naturellement définie par $(\partial\lambda_1^{(m)}/\partial B)(B)/m$ où $\lambda_1^{(m)}(B)$ est la première valeur propre apparait en utilisant la formule de Feynmann-Heilman comme la moyenne : $< x_1 - B >_m$, associée à la mesure $u_1^{(m)}(x)^2 dx$. Compte-tenu de la Proposition 6.1, les résultats obtenus dans la Section 3 s'appliquent donc à cette situation.

7 Questions sur l'opérateur de Kac

Comme on l'a déjà mentionné en sous-section (2.2), il est intéressant de regarder les problèmes posés initialement concernant l'opérateur de Kac. Notons tout d'abord que la formule :

$$u_1(x)^2 = \lim_{p\to\infty} (\mu_1)^{-p} K_V^{(p)}(x,x) \tag{7.1}$$

où $K_V^{(p)}(x,y)$ est le noyau distribution de l'opérateur de Kac

$$K_V^p = K_V \circ \ldots\ldots \circ K_V \ ,$$

permet de retrouver, sous l'hypothèse de stricte convexité de V, la logconcavité de la première fonction propre de l'opérateur de Kac à partir des résultats de logconcavité de certaines intégrales obtenus dans [2]. C'est d'ailleurs dans le même esprit que Brascamp et Lieb [2] obtenaient la logconcavité de la première fonction propre de l'opérateur de Schrödinger en s'appuyant sur la formule :

$$u_1(x)^2 = \lim_{p\to\infty} \exp(p\lambda_1)(\exp -pS_V)(x,x) \tag{7.2}$$

et la formule de Feynmann-Kac. Notons qu'un contrôle de la vitesse de convergence dans (7.1) devrait donner une majoration du rapport μ_2/μ_1 de caractère analogue à la minoration universelle de l'écart entre les deux premières valeurs propres de l'opérateur de Schrödinger obtenues dans [29] (cf aussi [14]):

$$\lambda_2 - \lambda_1 \geq (\inf_x \lambda_{\mathrm{Hess}V(x)}/2)^{\frac{1}{2}}. \tag{7.3}$$

Nous espérons revenir bientôt sur ce point qui semble considéré comme "clair" dans les travaux de M.Kac et C.Thompson [20]. Le point le plus intéressant qui reste ouvert tant pour l'opérateur de Schrödinger que pour l'opérateur de Kac serait de traiter le cas non convexe ($\nu > 1/4$ pour l'exemple 3.3) correspondant à une situation de double puits. On attend une convergence exponentiellement rapide avec m de $\mu_2^{(m)}/\mu_1^{(m)}$ vers 1. Cette attente est d'autant plus forte que Kac et Thompson avaient bien cru en avoir une démonstration (cf [20]) qui s'était révélée incorrecte (cf Erratum publié peu après). Notons pour conclure qu'un pas important dans cette direction a été franchi dans le cas de l'équation de Schrödinger. On obtient dans ([15]) dans le cadre semi-classique une majoration du splitting pour m grand, mais sous une condition de contrôle de m par rapport à une puissance négative de h.

Références

[1] P.Billingsley : Convergence of probability measures, John Wiley&Sons, Inc New York (1968).

[2] H.J.Brascamp et E.Lieb : On extensions of the Brunn-Minkovski and Prékopa-Leindler Theorems, including inequalities for Log concave functions, and with an application to diffusion equation, *Journal of Functional Analysis* 22 (1976).

[3] E.Brézin : Cours de DEA (1989), Ecole Doctorale de Physique de l' ENS.

[4] M.Brunaud et B.Helffer : Un problème de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase (ou relecture d'un cours de M.Kac), *prépublication*, Mars 1991.

[5] P.Cartier : Inégalités de corrélation en mécanique statistique, Séminaire Bourbaki 25ème année, 1972-73, n^0 431, *Lecture Notes in Mathematics* n^0 383.

[6] R.S.Ellis : Entropy, large deviations, and statistical mechanics *Grundlehren der mathematischen Wissenschaften* $n^0$271, Springer, New York, (1985).

[7] C.Fortuin, P.Kasteleyn et J.Ginibre : Correlation inequalities on some partially ordered sets, *Comm. Math. Phys.22*, (1971), p.89-103.

[8] J.Glimm et A.Jaffe : Quantum physics (a functional integral point of view), Springer Verlag, Second edition.

[9] B.Helffer: On Schrödinger equation in large dimension and connected problems in statistical mechanics. *Proceedings of the Atlanta conference (March 1992).* in Differential equations with applications to mathematical physics (edited by W.F.Ames, E.M.Harrell II and J.V.Herod), p.153-166, Mathematics in science and engineering, Vol.192, Academic Press.

[10] B.Helffer: Around a stationary phase theorem in large dimension, *(à paraître au Journal of Functional Analysis).*

[11] B.Helffer: Problèmes de double puits provenant de la théorie statistico-mécanique des changements de phase, II Modèles de Kac avec champ magnétique, étude de modèles près de la température critique. *prépublication du LMENS*, Mars 1992.

[12] B.Helffer: Décroissance exponentielle des fonctions propres pour l'opérateur de Kac : le cas de la dimension > 1, in Operator calculus and spectral theory, *Symposium on operator calculus and spectral theory*, Lambrecht (Germany), December 1991, edited by M.Demuth, B.Gramsch and B.-W.Schulze, *Operator Theory : Advances and Applications*, Vol.57; Birkhäuser Verlag Basel, (1992).

[13] B.Helffer et J.Sjöstrand : Multiple wells in the semi-classical limit,
I *Comm. in PDE* , 9(4), p.337-408, (1984),
II *Annales de l'IHP (section Physique théorique)* Vol.42, $n^0 2$, 1985, p.127-212.

[14] B.Helffer et J.Sjöstrand : Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation. Actes du colloque Méthodes semi-classiques à l'université de Nantes, 24 Juin-30 Juin 1991. (Sous presse *Astérisque*).

[15] B.Helffer et J.Sjöstrand : Semiclassical expansions of the thermodynamic limit for a Schrödinger equation II, *Helvetica Physica Acta*, Vol.65, (1992), p.748-765.

[16] B.Helffer et J.Sjöstrand : On the correlation for Kac like models in the convex case ,*prépublication de l'institut Mittag-Leffler*, Mars 1993.

[17] M.Kac : Statistical mechanics of some one-dimensional systems, Studies in mathematical analysis and related topics : essays in honor of Georges Polya, *Stanford University Press*, Stanford, California (1962), p.165-169.

[18] M. Kac : Mathematical mechanisms of phase transitions, Brandeis lectures (1966), *Gordon and Breach.*

[19] M.Kac et E.Helfand : *J. Math. Phys.* 4, 1078 (1963)

[20] M.Kac et C.J.Thompson : On the mathematical mechanism of phase transition *Proc. N.A.S* , Vol 55, (1966) p.676 -683 et Erratum Vol 56, (1966) p.1625.

[21] D.Ruelle : Statistical mechanics, Math. Physics monograph series, W.A.Benjamin, Inc. (1969).

[22] D.Ruelle : Is our mathematics natural ? The case of equilibrium statistical mechanics, *Bulletin of the AMS*, Vol.19, number 1, July 1988.

[23] B.Simon : The $P(\phi)_2$ Euclidean quantum field theory, Princeton Series in Physics (1974).

[24] B.Simon : Functional integration and quantum physics, *Pure and Applied mathematics* $n^0$86, Academic press , New york, (1979).

[25] B.Simon : The statistical mechanics of lattice gases, Princeton university press (à paraître probablement en 1993).

[26] I.M.Singer, B.Wong, S.T.Yau et S.S.T. Yau : An estimate of the gap of the first two eigenvalues of the Schrödinger operator, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa* (4), 12 (1985), P.319-333.

[27] J.Sjöstrand: Potential wells in high dimensions I, *Ann. Inst. Poincaré*, Section Physique théorique, 58 (1)(1993).

[28] J.Sjöstrand: Potential wells in high dimensions II, more about the one well case. prépublication Mars1991, *Ann. Inst. Poincaré*, Section Physique théorique, 58 (1)(1993).

[29] J.Sjöstrand: Exponential convergence of the first eigenvalue divided by the dimension, for certain sequences of Schrödinger operator. *prépublication* , Juin 1991. Sous presse *Astérisque* (1992).

[30] J.Sjöstrand: Schrödinger in high dimensions, asymptotic constructions and estimates. Proceeding of the french-japanese symposium on algebraic analysis and singular perturbations, CIRM, Luminy, France (Octobre 1991), à paraître.

[31] J.Sjöstrand: Evolution equations in a large number of variables, *prépublication*, Décembre 1992.

[32] A.D.Sokal: Mean field bounds and correlation inequalities, *J. Statist. Phys.* 28, p.431-439, (1982).