Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

J.-M. Delort

Microlocalisation simultanée et problème de Cauchy ramifié

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1992-1993), exp. nº 11, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1992-1993____A11_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1992-1993

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

MICROLOCALISATION SIMULTANEE ET PROBLEME DE CAUCHY RAMIFIE

J.-M. DELORT

Exposé n° XI

23 Mars 1993

0. Introduction et notations

Cet exposé est consacré à l'application de la théorie microlocale des faisceaux à un problème de Cauchy holomorphe à données et seconds membres ramifiés.

Nous rappelons d'abord un certain nombre de résultats dans ce domaine, dont celui de Leichtnam [10], [11], ainsi que l'approche de ces questions par les techniques d'analyse algébrique due à D'Agnolo-Schapira [1], [2]. Le but de l'exposé est de décrire une méthode analogue à celle de [1], [2], permettant d'obtenir un résultat abstrait de type Cauchy-Kovalewski, qui fournit une nouvelle preuve d'un cas particulier du théorème de Leichtnam [10].

Le théorème est énoncé dans la seconde section. La troisième est destinée à une esquisse de sa preuve. Pour cela, nous sommes conduits à utiliser une microlocalisation simultanée des faisceaux, jouant vis à vis de la microlocalisation de [7] le même rôle que la deuxième microlocalisation simultanée de [4] relativement à la deuxième microlocalisation de Sjöstrand et Lebeau [12], [8].

Précisons les notations que nous utiliserons. Si X est une variété analytique réelle (resp. complexe) on note T^*X son fibré cotangent réel (resp. complexe) et pour Z sous-variété analytique réelle (resp. complexe) de X, on désigne par T^*_ZX le fibré conormal à Z dans X et par $\dot{T}^*_ZX$ le complémentaire de la section nulle dans T^*_ZX. Lorsque $\pi : E \to X$ est un fibré vectoriel, on désigne par $\dot{\pi}$ la restriction de π au complémentaire de la section nulle, et par $E_{|Z}$ la restriction de E à la sous-variété Z de X (i.e. le produit fibré de E et Z sur X). Nous noterons pour Z fermé de X $\mathbf{C}_Z$ le faisceau constant sur Z et, lorsque X est une variété complexe, $\mathcal{O}_X$ (resp. $\mathcal{D}_X$) le faisceau des fonctions (resp. des opérateurs différentiels) holomorphes sur X. Si X est une variété analytique réelle $D^b(X)$ désignera la catégorie dérivée de la catégorie des complexes (à l'homotopie près) de faisceaux de $\mathbf{C}$-espaces vectoriels sur X à cohomologie bornée (cf. [7]).

Si $f : Y \to X$ est une application analytique entre variétés analytiques réelles, on note Rf_* (resp. $Rf_!$) le foncteur dérivé de l'image directe (resp. de l'image directe à support propre) et f^{-1} (resp. $f^!$) le foncteur d'image inverse (resp. le dual de $Rf_!$: cf.[7] chapitre 3). Si M est une partie de X, on note $R\Gamma_M(.)$ le foncteur dérivé de la cohomologie à support dans M et $R\mathcal{H}om(.,.)$ le bifoncteur dérivé du foncteur des germes d'homomorphismes.

Si F est un objet de $D^b(X)$, on notera $SS(F) \subset T^*X$ son microsupport [7]. Enfin, si Λ_1 et Λ_2 sont deux parties d'un cotangent, on notera d'après [7] $\Lambda_1 \underset{\infty}{\hat{+}} \Lambda_2$ l'ensemble défini en coordonnées locales par :

$$\Lambda_1 \underset{\infty}{\hat{+}} \Lambda_2 = \{(x,\xi) \in T^*X \ ; \quad \text{il existe des suites} \quad (x_n^1,\xi_n^1) \in \Lambda_1, (x_n^2,\xi_n^2) \in \Lambda_2$$

$$\text{avec} \quad x_n^1 \to x, x_n^2 \to x, \xi_n^1 + \xi_n^2 \to \xi \ |\xi_n^1| \to +\infty, |x_n^1 - x_n^2||\xi_n^1| \to 0\} \ .$$

1. Problème de Cauchy ramifié.

Commençons par rappeler un certain nombre de résultats concernant le problème de Cauchy à données ramifiées.

Soient X un ouvert de $\mathbf{C}^n, Y$ une hypersurface complexe de X, Z une hypersurface complexe de Y. Notons P un opérateur différentiel holomorphe d'ordre m sur X tel que :

- Y est non caractéristique pour P
- P est à caractéristique de multiplicité constante
- Les caractéristiques de P sont transversales à Y.

Soit Car $P \subset T^*X$ la variété caractéristique de P. La fibre de Car $P \cap T^*_Z X$ en un point $z \in Z$ contient p directions complexes distinctes, et la réunion des bicaractéristiques complexes du symbole réduit de P est la réunion des fibrés conormaux à p hypersurfaces complexes lisses $Z_1, \cdots, Z_p$, se coupant transversalement suivant Z, et coupant Y transversalement suivant Z. L'étude du problème de Cauchy ramifié consiste à se donner en un point $x_0 \in Y - Z$ des germes $u_0, \cdots, u_{m-1}$ de fonctions holomorphes sur Y et un germe f de fonction holomorphe sur X. Supposons que $u_0, \cdots, u_{m-1}$ se prolongent en fonctions holomorphes ramifiées sur $Y - Z$ et que f se prolonge en une fonction holomorphe ramifiée sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$. Par le théorème de Cauchy-Kowalevski il existe un germe de fonction holomorphe sur X en x_0, u, solution de $Pu = f$ près de x_0 et vérifiant $\frac{\partial^k u}{\partial \nu^k}|_Y = u_k$ $k = 0, \cdots, m-1$ au voisinage de x_0($\frac{\partial}{\partial \nu}$ désignant une dérivée normale à Y). Il s'agit alors de prouver que la solution u se prolonge en une fonction holomorphe ramifiée sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$, quitte à se placer dans un voisinage assez petit d'un point z_0 de Z. Le premier résultat concernant ce problème est le suivant (cf.[6]).

Théorème 1.1 ([6]).— *Supposons que le germe de f en x_0 s'écrive $f = f_1 + \cdots + f_p$ où pour $j = 1, \cdots, p, f_j$ est un germe de fonction holomorphe en x_0, se prolongeant au voisinage de Z en fonction holomorphe ramifiée sur $X - Z_j$. Alors le germe de u en x_0 se prolonge en une fonction ramifiée sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$ au voisinage de z_0. De plus, il existe pour $j = 1, \cdots, p$ u_j, fonction ramifiée sur $X - Z_j$ au voisinage de z_0 telle que $u = u_1 + \cdots + u_p$.*

Le cas général, où le second membre f est une fonction ramifiée quelconque sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$ a été traité par Leichtnam ([10], [11]) :

Théorème 1.2 ([10]).— *Supposons que f se prolonge en une fonction holomorphe ramifiée sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$ au voisinage de z_0. Alors le germe u se prolonge également en une fonction holomorphe ramifiée sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$ au voisinage de z_0.*

Il est également possible de préciser ce résultat lorsque le second membre f a une ramification d'un type particulier (cf [10], [11]).

Fonctions ramifiées et théorie des faisceaux

Les problèmes précédents ont été repris dans le cadre de la théorie microlocale des faisceaux par D'Agnolo et Schapira ([1], [2]). Rappelons d'abord comment s'interprétent dans ce cadre les fonctions holomorphes ramifiées. Soient Ω un ouvert de $X = \mathbf{C}^n$ et S un revêtement de Ω. On notera q la composée de la projection de S sur Ω et de l'injection de Ω dans $X, q : S \to X$. Si $\mathcal{O}_X$ désigne le faisceau des fonctions holomorphes sur X,

$$q_* q^{-1} \mathcal{O}_X \tag{1.1}$$

est un faisceau de fonctions ramifiées sur Ω, qui, lorsque S est le revêtement universel de Ω, est le faisceau de toutes les fonctions ramifiées sur Ω.

Notons K_S le faisceau $K_S = q_! q^{-1} \mathbf{C}_X$. Alors, si G est un objet de $D^b(X)$, on sait d'aprés [7] que :

$$Rq_* q^{-1} G \simeq R\mathcal{H}om(K_S, G) \ . \tag{1.2}$$

Cette égalité, appliquée au cas particulier $G = \mathcal{O}_X$, montre, compte-tenu de (1.1), que le faisceau K_S permet de décrire la ramification associée au revêtement S. Cette remarque est à la base du travail [1] de D'Agnolo-Schapira. Décrivons quelques exemples de cette situation :

Exemple 1.3 : i) Prenons pour S le revêtement universel de $\Omega = X - Z_j$. Si q_j est la projection associée, le faisceau $K_j = q_{j!} q_j^{-1} \mathbf{C}_X$ permet de décrire les fonctions ramifiées sur $X - Z_j$.

ii) Soient Y hypersurface complexe de X coupant Z_j transversalement le long de Z. Si $\widetilde{Y}$ est le revêtement universel de $Y - Z$ et si $p : \widetilde{Y} \to Y$ est l'application naturelle.

$$L \stackrel{\text{def}}{=} f^{-1} K_j = p_! p^{-1} \mathbf{C}_Y \tag{1.3}$$

permet de décrire les fonctions ramifiées sur $Y - Z$.

iii) Rappelons la construction du faisceau de [1] permettant de caractériser les sommes de fonctions ramifiées le long de chacune des hypersurfaces Z_j. Le morphisme canonique $q_{j!} q_j^! \to Id$ et le fait que $q_j^{-1} = q_j^!$, permettent de construire une flèche.

$$K_j \longrightarrow \mathbf{C}_X . \tag{1.4}$$

Si l'on considére le morphisme $\overset{p}{\underset{1}{\oplus}} \mathbf{C}_X \to \overset{p-1}{\underset{1}{\oplus}} \mathbf{C}_X$ donné par $(a_1, \cdots, a_p) \to (a_2 - a_1, \cdots, a_p - a_{p-1})$ et si on le compose à gauche par (1.4), on obtient une flèche $\overset{p}{\underset{1}{\oplus}} K_j \to \overset{p-1}{\underset{1}{\oplus}} \mathbf{C}_X$. D'Agnolo et Schapira définissent alors un faisceau K' comme troisième terme du triangle

$$K' \to \overset{p}{\underset{1}{\oplus}} K_j \to \overset{p-1}{\underset{1}{\oplus}} \mathbf{C}_X \overset{+1}{\to}$$

et montrent qu'il décrit les sommes de fonctions ramifiées le long de $Z_1, \cdots, Z_p$.

iv) Prenons pour S le revêtement universel de $X-(Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$. Alors le faisceau $K = K_S$ associé décrit les fonctions holomorphes ramifiées sur $X - (Z_1 \cup \cdots \cup Z_p)$.

v) Notons $\widetilde{X}_j$ le revêtement universel de $X - Z_j$ pour $j = 1, \cdots, p$ et soit S le produit fibré de $\widetilde{X}_1, \cdots, \widetilde{X}_p$ sur X. Alors K_S n'est autre que le produit tensoriel $K_S = K_1 \otimes \cdots \otimes K_p$. Ce faisceau décrit alors les fonctions ramifiées qui sont sections de $q_* q^{-1} \mathcal{O}_X$, où $q : S \to X$. Il s'agit donc des fonctions ramifiées admettant localement une représentation sous la forme.

$$F(\log k_1(z), \cdots, \log k_p(z), z)$$

où F est holomorphe en ses arguments et k_j est une équation de Z_j $j = 1, \cdots, p$.

Dans le cas $p = 2$, on notera que les faisceaux iv) et v) coïncident i.e. $K = K_1 \otimes K_2$. Cela découle du fait que dans ce cas, le revêtement universel de $X-(Z_1 \cup Z_2)$ est le produit fibré des revêtements de $X - Z_1$ et $X - Z_2$.

Rappelons maintenant comment D'Agnolo et Schapira formulent le problème de Cauchy dans le cadre précédent. Soit $\mathcal{M}$ un $\mathcal{D}_X$-module cohérent à gauche (par exemple $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P$ avec P opérateur différentiel holomorphe). Supposons Y non caractéristique pour $\mathcal{M}$ et notons $\mathcal{M}_Y$ le $\mathcal{D}_Y$-module induit par $\mathcal{M}$ sur Y (cf [7]) (dans le cas $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X / \mathcal{D}_X P, \mathcal{M}_Y = \mathcal{D}_Y^m$ où m est l'ordre de P).

Le théorème de Cauchy-Kowalevski-Kashiwara s'énonce alors sous la forme d'un isomorphisme naturel,

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)|_Y \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y) \; . \tag{1.5}$$

Considérons alors le faisceau K' de l'exemple (1.3 iii). Le complexe des solutions de $\mathcal{M}$ qui sont somme de fonctions ramifiées sur $X - Z_1, \cdots, X - Z_p$ est

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, R\mathcal{H}om(K', \mathcal{O}_X)) \simeq R\mathcal{H}om(K', R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)) \tag{1.6}$$

De même, si L désigne le faisceau (1.3) sur Y, les solutions de $\mathcal{M}_Y$ ramifiées sur $Y - Z$ sont données par

$$R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_Y)) \simeq R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)). \tag{1.7}$$

Si l'on pose $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ et si $f : Y \hookrightarrow X$ est l'injection, on a d'après (1.5) $f^{-1}F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$. Il existe une flèche

$$f^{-1}R\mathcal{H}om(K', F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(f^{-1}K', f^{-1}F) \tag{1.8}$$

et on peut construire une flèche naturelle (cf [1]) $L \to f^{-1}K'$ d'où un morphisme

$$R\mathcal{H}om(f^{-1}K', f^{-1}F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)\ . \tag{1.9}$$

Par composition de (1.1.8) et (1.1.9) on a donc une flèche

$$f^{-1}R\mathcal{H}om(K', F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F) \tag{1.10}$$

et le résultat principal de [1] affirme que sous des hypothèses convenables, satisfaites lorsque $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ avec P vérifiant les hypothèses du début de cette section, (1.10) est un isomorphisme au dessus de Z. Compte-tenu de (1.6) (1.7) on a donc un isomorphisme entre les restrictions à Z des membres de gauche de ces deux formules. On a ainsi une extension du théorème 1.1.

Le but de cet exposé est d'obtenir une extension analogue du théorème 1.2 *dans le cas particulier* $p = 2$. La raison de cette restriction réside dans le fait que pour $p = 2$, les faisceaux des exemples 1.3 iv) et v) coïncident, et que l'on dispose donc d'une représentation de K sous la forme du produit tensoriel $K_1 \otimes K_2$ de deux faisceaux vérifiant $SS(K_j) = T^*_{Z_j}X$.

Nous allons tout d'abord construire une flèche analogue à (1.10)

$$f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F). \tag{1.11}$$

Pour interprèter (1.11), choisissons des coordonnées locales centrées en 0 $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n)$ telles que $Z_j = \{z_j = 0\}$ $j = 1,2$ et $Y = \{z_1 = z_2\}$. Si $r > 0$ est donné, un revêtement universel de $X = \{z \in \mathbf{C}^n\ ; |z_k| < r\} \setminus Z_j$ est donné respectivement par

$$\begin{aligned} \widetilde{X}_1 &= \{(w_1, z_2, \cdots, z_n); Re\ w_1 < \log r, |z_k| < r \quad k = 2, \cdots, n\} \\ \widetilde{X}_2 &= \{(z_1, w_2, z_3, \cdots, z_n); Re\ w_2 < \log r, |z_k| < r \quad k \neq 2\}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

les applications $q_j : \widetilde{X}_j \longrightarrow X$ étant de la forme :

$$\begin{aligned} &q_1 : (w_1, z_2, \cdots, z_n) \longrightarrow (e^{w_1}, z_2, \cdots, z_n) \\ &q_2 ; (z_1, w_2, z_3, \cdots, z_n) \longrightarrow (z_1, e^{w_2}, z_3, \cdots, z_n). \end{aligned} \tag{1.13}$$

Le revêtement universel de $\{z; \forall k = 1, \cdots, p \mid z_k| < r\} \setminus (Z_1 \cup Z_2)$, qui coïncide avec $\widetilde{X}_1 \underset{X}{\times} \widetilde{X}_2$, est donc

$$\widetilde{X} = \{(w_1, w_2, z_3, \cdots, z_n); Re\ w_k < \log r \quad k = 1, 2, |z_k| < r \quad k = 3, \cdots, n\} \tag{1.14}$$

avec l'application $q : \widetilde{X} \to X$ donnée par

$$(1.15) \qquad (w_1, w_2, z_3, \cdots, z_n) \to (e^{w_1}, e^{w_2}, z_3, \cdots, z_n).$$

La restriction d'une fonction ramifiée sur $X - (Z_1 \cup Z_2)$ à Y s'identifie à une fonction holomorphe sur $\widetilde{X}|_Y = \widetilde{X} \underset{X}{\times} Y$ qui d'après (1.14), (1.15) n'est autre que

$$(1.16) \quad \{(w_1, w_1 + 2i\ell\pi, z_3, \cdots, z_n); \mathrm{Re}\, w_1 < \log r, |z_k| < r \quad k = 3, \cdots, n \quad \ell \in \mathbf{Z}\}.$$

Evidemment, les valeurs prises par cette restriction sur les diverses composantes connexes de (1.16) sont déterminées par celles prises sur l'une de ces composantes, par prolongement analytique le long de chemins de $X - (Z_1 \cup Z_2)$. En outre, chacune des composantes connexes de (1.16) est un revêtement universel de $Y \cap \{|z_k| < r \; k = 1, \cdots, n\} \setminus Z$.

Pour formuler le problème de Cauchy ramifié, on devra donc considérer m données de Cauchy, chacune d'entre elles étant une fonction ramifiée sur $Y - Z$, et exiger que la restriction à Y (des dérivées normales) de la solution coïncide avec la donnée correspondante sur l'une des composantes connexes de (1.16) fixée à l'avance, par exemple celle correspondant à $\ell = 0$. La formulation du problème de Cauchy de manière analogue à (1.1.10) se fera alors en procédant comme suit. On a d'abord une flèche de restriction.

$$(1.17) \qquad f^{-1} R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(f^{-1}K_1 \otimes f^{-1}K_2, f^{-1}F)$$

où F désigne $R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$ ou, plus généralement, un objet de $D^b(X)$. D'après l'exemple 1.3 ii) $f^{-1}K_1 \simeq L, f^{-1}K_2 \simeq L$ et le membre de droite de (1.17) est donc $R\mathcal{H}om(L \otimes L, f^{-1}F)$. Cet objet est donc l'analogue des fonctions holomorphes sur (1.16). Comme nous l'avons indiqué ci-dessus, il nous faut prendre comme données de Cauchy l'analogue des fonctions ramifiées sur $Y - Z$ i.e. construire une deuxième flèche.

$$(1.18) \qquad R\mathcal{H}\mathrm{om}(L \otimes L, f^{-1}F) \longrightarrow R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F).$$

Il suffit pour cela de définir un morphisme $\delta : L \longrightarrow L \otimes L$. Or, on a un isomorphisme

$$(1.19) \qquad \begin{aligned} L \otimes L &= p_! p^{-1} \mathbf{C}_Y \otimes p_! p^{-1} \mathbf{C}_Y \\ &\simeq p_!(p^{-1}\mathbf{C}_Y \otimes p^{-1} p_! p^{-1} \mathbf{C}_Y) \\ &= p_! p^{-1} p_! p^{-1} \mathbf{C}_Y = p_! p^! p_! p^! \mathbf{C}_Y \end{aligned}$$

La flèche canonique $Id \to p^! p_!$ et (1.19) permettent alors de construire

$$(1.20) \qquad \delta \; : L \longrightarrow L \otimes L.$$

(On notera que si l'on inverse dans (1.19) le rôle joué par les deux facteurs L dans $L \otimes L$ la flèche obtenue est la même). Le résultat que l'on désire obtenir va alors affirmer que, sous des hypothèses convenables, la composée de (1.17) et (1.18).

$$(1.21) \qquad f^{-1} R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F) \longrightarrow R\mathcal{H}\mathrm{om}(L, f^{-1}F)$$

est un isomorphisme au-dessus de Z.

2 Enoncé du théorème

Nous allons énoncer le théorème sous une forme abstraite, puis montrer qu'il contient le cas particulier du théorème 1.2 correspondant à $p = 2$.

Désignons désormais par X un ouvert de $\mathbf{R}^N$ et donnons-nous Y une sous variété analytique réelle fermée de X et Z une sous-variété analytique réelle fermée de Y. Notons f l'injection de Y dans X.

Soient K_1, K_2, F trois objets de $D^b(X)$. Nous ferons les hypothèses suivantes ;

i) $T_Y^*X \cap SS(F) \subset T_X^*X, T_X^*X \cap SS(K_j) \subset T_X^*X$ au voisinage de Z.

ii) $SS(K_j) \subset T_{Z_j}^*X \cup T_X^*X$ où Z_1 et Z_2 sont deux sous-variétés de X se coupant transversalement suivant Z.

iii) $SS(F) \cap \dot{T}_Z^*X \subset SS(K_1) \cup SS(K_2)$.

iv) $SS(F) \underset{\infty}{\hat{+}} SS(K_j)|_Z$ ne rencontre ni $SS(K_i)^a$ pour $i \neq j$ ni T_Y^*X hors de la section nulle.

v) $f^{-1}K_1$ et $f^{-1}K_2$ sont isomorphes à un même complexe L et L est faiblement cohomologiquement constructible (cf [1]).

vi) Il existe un morphisme $\tau : L \to \mathbf{C}_Y$ induisant pour tout $z \in Z$ un isomorphisme $R\Gamma_{\{z\}}L \xrightarrow{\sim} R\Gamma_{\{z\}}(\mathbf{C}_y)$.

vii) Il existe une flèche $\delta : L \longrightarrow L \overset{L}{\otimes} L$ telle que les composés $L \xrightarrow{\delta} L \overset{L}{\otimes} L \xrightarrow{\tau \otimes Id} L$ et $L \xrightarrow{\delta} L \overset{L}{\otimes} L \xrightarrow{Id \otimes \tau} L$ coïncident avec l'identité.

Le théorème s'énonce alors :

Théorème 2.1.— *Supposons satisfaites les hypothèses i) à vii). Alors la flèche construite comme (1.1.21) induit un isomorphisme*

$$f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F)|_Z \longrightarrow R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F)|_Z. \tag{2.1}$$

Vérifions que le résultat précédent s'applique au problème de Cauchy ramifié. Dans ce cas X est un ouvert de $\mathbf{C}^n$, Y une hypersurface complexe de X, Z une hypersurface complexe de Y. On considère un opérateur P vérifiant les hypothèses du début de la section 1, tel que de plus $\mathrm{Car}P \cap T_Z^*X$ contienne exactement $p = 2$ directions complexes distinctes. On note Z_1 et Z_2 les deux hypersurfaces caractéristiques issues de Z. On note alors K_1 et K_2 les faisceaux de l'exemple 1.3.i) et si $\mathcal{M} = \mathcal{D}_X/\mathcal{D}_X P$ on pose $F = R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}_X)$. On sait alors (cf [7], [1]) que $SS(F) = \mathrm{Car}P$ et $SS(K_j) = T_{Z_j}^*X \cup T_X^*X$. L'hypothèse i) résulte donc du fait que Y est non caractéristique pour P et l'hypothèse ii) est clairement vérifiée. De même l'hypothèse iii) qui s'écrit ici $\mathrm{Car}P \cap \dot{T}_Z^*X \subset T_{Z_1}^*X \cup T_{Z_2}^*X$ est satisfaite. On remarque que $\mathrm{Car}P \hat{\underset{\infty}{+}} T^*_{Z_j}X|_Z$ n'est autre que le plan tangent à la fibre de $\mathrm{Car}P$ en chaque point, le long de la fibre de $T^*_{Z_j}X$. Il ne rencontre donc ni $T^*_Y X$ ni $T^*_{Z_i}X$ pour $i \neq j$; l'hypothèse iv) est donc satisfaite. Pour vérifier v), on remarque que $f^{-1}K_1$ et $f^{-1}K_2$ sont isomorphes au faisceau L de l'exemple 1.3 ii). En outre, comme $SS(L) = T^*_Z Y$, L est faiblement $\mathbf{R}$-constructible, donc faiblement cohomologiquement constructible. D'après (1.3), $L = p_!p^!\mathbf{C}_Y$ et utilisant la flèche naturelle $p_!p^! \to Id$ on définit un morphisme $\tau : L \to \mathbf{C}_Y$, et d'après [1] Lemme 3.11, τ induit un isomorphisme $R\Gamma_Z(L) \xrightarrow{\sim} R\Gamma_Z(\mathbf{C}_Y)$ d'où vi).

La flèche δ de vii) a été construite dans (1.20). Pour vérifier vii), il suffit de montrer que les composées $(\tau \otimes Id) \circ \delta$ et $(Id \otimes \tau) \circ \delta$ coïncident avec l'identité sur chaque fibre de L. Or, la fibre de L en un point $z \in Z$ est réduite à 0 et la fibre de L en $z \in Y - Z$ s'identifie à $\mathbf{C}^{(\mathbf{Z})}$ espace vectoriel des suites de nombres complexes tous nuls sauf un nombre fini. En outre, grâce à (1.19), la fibre de $L \otimes L$ en un point $z \in Y - Z$ s'identifie à $\mathbf{C}^{(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})}$. Les flèches δ , $\tau \otimes Id$ et $Id \otimes \tau$ sont alors données dans les fibres par :

$$\begin{aligned} \delta\ : \mathbf{C}^{(\mathbf{Z})} &\longrightarrow \mathbf{C}^{(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})} \\ (z_\ell)_{\ell\in\mathbf{Z}} &\longrightarrow (z_\ell\delta_{\ell,h})_{(\ell,h)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} \end{aligned} \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned} \tau \otimes Id : \mathbf{C}^{(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})} &\longrightarrow \mathbf{C}^{(\mathbf{Z})} \\ (z_{\ell,h})_{(\ell,h)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} &\longrightarrow (\Sigma_\ell z_{\ell,h})_{h\in\mathbf{Z}} \end{aligned} \tag{2.3}$$

$$\begin{aligned} Id \otimes \tau : \mathbf{C}^{(\mathbf{Z}\times\mathbf{Z})} &\longrightarrow \mathbf{C}^{(\mathbf{Z})} \\ (z_{\ell,h})_{(\ell,h)\in\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}} &\longrightarrow (\Sigma_h z_{\ell,h})_{\ell\in\mathbf{Z}} \end{aligned} \tag{2.4}$$

où $\delta_{\ell,h}$ est le symbole de Kronecker. Les composées de (2.3) ou (2.4) et (2.2) coïncident donc avec l'identité.

Le théorème 2.1 s'applique donc dans ce cadre. Si l'on note $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_1\cup Z_2} = R\mathcal{H}om\ (K_1 \otimes K_2, \mathcal{O}_X)$ (resp. $\mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_Z = R\mathcal{H}om(L, \mathcal{O}_Y)$) le faisceau des fonctions ramifiées sur $X - (Z_1 \cup Z_2)$ (resp. $Y - Z$), l'isomorphisme (2.1) donne ici

$$f^{-1}R\mathcal{H}om_{D_X}(\mathcal{M}, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_{Z_1\cup Z_2})|_Z \xrightarrow{\sim} R\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}^{\mathrm{ram}}_Z)|_Z, \tag{2.5}$$

qui affirme donc que l'on peut résoudre le problème de Cauchy ramifié au voisinage de tout point de z, dans les germes de fonctions ramifiées sur $X - (Z_1 \cup Z_2)$.

3 Microlocalisation simultanée et preuve du théorème

L'idée de base dans la preuve du théorème consiste à raisonner par analogie avec la technique qui permet d'estimer le front d'onde de distributions obtenues à partir de distributions connues par des opérations nonlinéaires et des convolutions avec la solution élémentaire de l'équation des ondes (cf.[9], [4]). Rappelons cela dans le cas de l'estimation du front d'onde d'un produit de trois distributions assez régulières k_1, k_2 et φ. On écrit d'abord (cf [4])

$$k_1 k_2 \varphi(x) = \int \delta(x - x_1)\delta(x - x_2)\delta(x - x_3)k_1(x_1)k_2(x_2)\varphi(x_3)dx_1dx_2dx_3 \tag{3.1}$$

où δ est la masse de Dirac en 0. Pour estimer $WF(k_1k_2\varphi)$, il suffit donc d'estimer celui de l'intégrant de (3.1). Pour cela on écrit celui-ci comme la trace d'un produit tensoriel.

$$\delta(x - x_1)\delta(x - x_2)\delta(x - x_3)k_1(y_1)k_2(y_2)\varphi(y_3)|_{M_1\times M_2\times M_3} \tag{3.2}$$

où M_j désigne la diagonale $\{x_j = y_j\}$. On estime alors le front d'onde de (3.2) en faisant intervenir une deuxième microlocalisation simultanée le long des conormaux aux sous-variétés M_1, M_2, M_3.

Pour le problème qui nous intéresse ici, l'étude de $f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F)$, commençons par désigner par X_1, X_2, X_3 trois copies de X et notons $q_j^X : X_1 \times X_2 \times X_3 \longrightarrow X_j$ la j$^{\text{ième}}$ projection ($j = 1, 2, 3$). Si Δ_X est la diagonale de $X_1 \times X_2 \times X_3$, on a

$$R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F) = R\mathcal{H}om(\mathbf{C}_{\Delta_X}, R\mathcal{H}om(q_1^{X-1}K_1 \overset{L}{\otimes} q_2^{X-1}K_2, q_3^{X!}F))|_{\Delta_X} \tag{3.3}$$

expression qui est l'analogue de (3.1). L'analogue de (3.2) va alors s'obtenir en considérant $(X_1 \times X_2 \times X_3)^2$, en notant R_1^X et R_2^X les deux projections de cet ensemble sur $X_1 \times X_2 \times X_3$ et en écrivant, grâce à (3.3) :

$$R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F) = \tag{3.4}$$

$$R\Gamma_{M_1\times M_2\times M_3}(R\mathcal{H}om(R_2^{X-1}\mathbf{C}_{\Delta_X}, R_1^{X!}R\mathcal{H}om(q_1^{X-1}K_1 \overset{L}{\otimes} q_2^{X-1}K_2, q_3^{X!}F)))|_{\Delta_X}$$

où M_j est la diagonale de $X_j \times X_j$ $\quad(M_1 \times M_2 \times M_3$, diagonale de $(X_1 \times X_2 \times X_3)^2$, s'identifie donc à $X_1 \times X_2 \times X_3)$.

C'est pour étudier le membre de droite de (3.4) que l'on introduit la microlocalisation simultanée. Il s'agit d'une généralisation de la microlocalisation des faisceaux de [7], qui va jouer vis à vis de cette dernière le même rôle que la deuxième microlocalisation simultanée de [4] vis à vis de la deuxième microlocalisation de Lebeau et Sjöstrand ([12], [8]). Nous n'allons pas rappeler la définition de la microlocalisation simultanée donnée dans [5], mais seulement un certain nombre de ses propriétés.

Considérons trois variétés analytiques réelles $\bar{X}_1, \bar{X}_2, \bar{X}_3$ et $M_j \subset \bar{X}_j$ une sous-variété de $\bar{X}_j$ $j = 1, 2, 3$. Si H est un objet de $D^b(\bar{X}_1 \times \bar{X}_2 \times \bar{X}_3)$, on construit le microlocalisé simultané de H le long de (M_1, M_2, M_3)

$$\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H) \tag{3.5}$$

qui est un objet de $D^b(T^*_{M_1}\bar{X}_1 \times T^*_{M_2}\bar{X}_2 \times T^*_{M_3}\bar{X}_3)$ vérifiant les propriétés suivantes :

• $\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H)$ est 3-conique i.e. est invariant pour l'action naturelle de $(\mathbf{R}^*_+)^3$ sur $T^*_{M_1}\bar{X}_1 \times T^*_{M_2}\bar{X}_2 \times T^*_{M_3}\bar{X}_3$.

• On a l'inclusion

$$SS(\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H)) \subset C_{(T^*_{M_1}\bar{X}_1, T^*_{M_2}\bar{X}_2, T^*_{M_3}\bar{X}_3)}(SS(H)) \tag{3.6}$$

où $C_{(T^*_{M_1}\bar{X}_1, T^*_{M_2}\bar{X}_2, T^*_{M_3}\bar{X}_3)}(\cdot)$ désigne le cône normal simultané défini dans [4].

• Notons $\pi_j\ : T^*_{M_j}\bar{X}_j \longrightarrow M_j$ la projection et $\pi = \pi_1 \times \pi_2 \times \pi_3$. Alors

$$R\pi_*\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H) = R\Gamma_{M_1 \times M_2 \times M_3}(H)|_{M_1 \times M_2 \times M_3}. \tag{3.7}$$

Nous appliquerons ici ces propriétés avec $\bar{X}_j = X_j \times X_j$ et $M_j =$ diagonale de $X_j \times X_j$. Dans ce cas $T^*_{M_j}\bar{X}_j$ s'identifie à T^*X_j, π_j est la projection $\pi^X_j\ :\ T^*X_j \longrightarrow X_j$ et d'après (3.1.4) et (3.1.7), on a

$$R\mathcal{H}om(K_1 \otimes K_2, F) = R\pi^X_*\,\mu_{(M_1 M_2,M_3)}(H)|_{\Delta_X} \tag{3.8}$$

où $\pi^X = \pi^X_1 \times \pi^X_2 \times \pi^X_3$ et

$$H = R\mathcal{H}om(R_2^{X-1}\mathbf{C}_{\Delta_X}, R_1^{X!}R\mathcal{H}om(q_1^{X-1}K_1 \overset{L}{\otimes} q_2^{X-1}K_2, q_3^{X!}F)). \tag{3.9}$$

Pour simplifier les notations, nous poserons aussi

$$\widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F) = \mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H). \tag{3.10}$$

Soit pour tout $j = 1, 2, 3$ Y_j une copie de la sous-variété Y de $X, f_j\ :\ Y_j \hookrightarrow X_j$ l'injection et $\underline{f} = f_1 \times f_2 \times f_3$. On notera

$$\begin{aligned} f_{j\pi} &: T^*X_j|_{Y_j} \hookrightarrow T^*X_j \\ {}^tf'_j &: T^*X_j|_{Y_j} \to T^*Y_j \end{aligned} \tag{3.11}$$

les injections et projections naturelles et $\underline{f}_\pi = f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi}$, ${}^t\underline{f}' = {}^tf'_1 \times {}^tf'_2 \times {}^tf'_3$.

D'après (3.1.8) l'étude de $f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F)$ se ramène à celle de

$$\underline{f}^{-1}R\pi^X_*\widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F) = R\pi^Y_*\,R^t\underline{f}'_*\underline{f}_\pi^{-1}\widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F) \tag{3.12}$$

où π^Y est le produit $\pi^Y_1 \times \pi^Y_2 \times \pi^Y_3$ avec π^Y_j projection de T^*Y_j sur Y_j. La preuve du théorème consiste alors à étudier la possibilité de commuter $R^t\underline{f}'_*\underline{f}_\pi^{-1}$ à $\widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}$, en utilisant les hypothèses i) à vii) de la section 2.

Le théorème 2.1 étant un résultat local, il suffit de le prouver au voisinage d'un point $z_0 \in Z$. On commence par découper microlocalement le faisceau F :

Lemme 3.1.— *Il existe au voisinage de z_0 dans X trois objets F_0, F_1, F_2 de $D^b(X)$ et un triangle $F_0 \to F_1 \oplus F_2 \to F \overset{+1}{\to}$ tels que l'on ait, près de z_0 :*

i) $SS(F_j) \cap \dot{T}^*_Z X \subset SS(K_j)$ $j = 1,2$, $SS(F_j) \cap SS(K_i) \subset T^*_X X$ si $i \neq j$

ii) $SS(F_j) \underset{\infty}{\hat{+}} SS(K_j) = SS(F) \underset{\infty}{\hat{+}} SS(K_j)$

iii) $SS(F_0) \cap T^*_Z X \subset T^*_X X$.

Le lemme précédent s'obtient en appliquant un résultat de D'Agnolo-Schapira [3] qui permet de tronquer F microlocalement près de la fibre en z_0 de $T^*_{Z_j} X$, ce qui donne F_j $j = 1,2$, le troisième complexe F_0 étant obtenu en complétant le triangle.

Appliquant le lemme 3.1, il suffit de voir que l'on a au voisinage de z_0 un isomorphisme.

$$f^{-1} R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F_j)|_Z \tilde{\to} R\mathcal{H}om(L, f^{-1}F_j)|_Z \quad j = 0,1,2. \tag{3.13}$$

Nous traiterons le cas $j = 2$. On a alors de manière semblable à (3.18) :

$$R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F_2) \simeq R\pi^X_* \widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F_2)|_{\Delta_X}. \tag{3.14}$$

Une remarque essentielle est alors la suivante :

Lemme 3.2.— *le support de $\widetilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F_2)$ est contenu, au voisinage de z_0, dans l'ensemble*

$$\begin{aligned} &\{(x_1, x_2, x_3; \xi_1, \xi_2, \xi_3) \ ; \ x_1 = x_2 = x_3, \xi_1 = 0, \xi_2, \xi_3 \text{ colinéaires}, \\ &(x_2, \xi_2) \in SS(K_2), (x_3 \xi_3) \in SS(F_2)\}. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Idée de la preuve : On utilise le fait que le support est l'intersection du microsupport avec la section nulle et la majoration (3.6) du microsupport du microlocalisé simultané à l'aide du cône normal simultané. On est alors conduit à considérer des triplets de points.

$$(x_1, \omega_1) \in SS(K_1), (x_2, \omega_2) \in SS(K_2), (x_3, \omega_3) \in SS(F_2)$$

vérifiant $x_1 = x_2 = x_3 \in Z, \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0$.

Grâce à l'hypothèse ii) du thèorème $(x_j, \omega_j) \in T^*_Z X$ $j = 1,2$, d'où $(x_3, \omega_3) \in SS(F_2) \cap T^*_Z X \subset SS(K_2) \cup T^*_X X$ d'après le lemme 3.1 i). Alors $(x_1, \omega_1 = -\omega_2 - \omega_3) \in T^*_{Z_2} X \cap T^*_{Z_1} X \subset T^*_X X$ donc $\omega_1 = 0$. Ce renseignement, combiné à l'hypothèse iv) du théorème permet d'obtenir la conclusion du lemme.

Si G est un complexe $\mathbf{R}^*_+$-conique sur T^*X_1, on a un triangle

$$R\pi^X_{1!} G \to R\pi^X_{1*} G \to R\dot{\pi}^X_{1*} G \overset{+1}{\to} \tag{3.16}$$

d'où en particulier, lorsque le support de G est contenu dans la section nulle, un isomorphisme $R\pi_{1!}^{X} G \tilde{\rightarrow} R\pi_{1*}^{X} G$. Le lemme 3.2 entraine donc

$$(3.17) \qquad R\pi_{1*}^{X}\pi_{2*}^{X}\pi_{3*}^{X}\tilde{\mu}\hom(K_1, K_2; F_2) \tilde{\leftarrow} R\pi_{1!}^{X}\pi_{2*}^{X}\pi_{3*}^{X}\tilde{\mu}\hom(K_1, K_2; F_2).$$

Si l'on désigne par H_2 le complexe défini comme (3.9) en remplaçant F par F_2, et si l'on utilise la notation (3.10), on peut montrer que

$$(3.18) \qquad R\pi_{1!}^{X}\mu_{(M_1,M_2,M_3)}(H_2) \simeq \mu_{(\tilde{X}_1,M_2,M_3)}(H_2)|_{M_1\times T^*X_2\times T^*X_3} \otimes \omega_{X_1}^{\otimes -1}$$

où ω_{X_1} est le complexe dualisant sur X_1. En d'autres termes, le fait d'avoir remplacé relativement à la première variable l'image directe par l'image directe à support propre, permet d'éliminer la microlocalisation relativement à cette variable.

Le point clef de la preuve du théorème 2.1 réside alors dans la proposition suivante :

Proposition 3.3.— *Sous les hypothèses du théorème, on a un isomorphisme*

$$(3.19) \quad R\pi_{1!}^{Y} R\pi_{2*}^{Y} R\pi_{3*}^{Y} R^{t}(f_1' \times f_2' \times f_3')_!(f_{1\pi} \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}\tilde{\mu}\hom(K_1, K_2; F_2)|_Z \tilde{\rightarrow}$$

$$R\pi_{1!}^{Y} R\pi_{2*}^{Y} R\pi_{3*}^{Y}\tilde{\mu}\hom(L, L; f^{-1}F_2)|_Z$$

où Z est considérée comme sous-variété de $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$ par l'injection diagonale.

Pour prouver la proposition, on commence par écrire le terme de gauche de (3.19) en utilisant (3.18) sous la forme.

$$(3.20) \qquad \begin{array}{l} R\pi_{2*}^{Y} R\pi_{3*}^{Y} R^{t}(Id \times f_2' \times f_3')_!(Id \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1}(\delta_1^{Y} \times Id \times Id)^{-1} \\ ((f_1 \times f_1) \times Id \times Id)^{-1}\mu_{(\tilde{X}_1,M_2,M_3)}(H_2) \otimes \omega_{X_1}^{\otimes -1} \end{array}$$

où $f_1 \times f_1$ est l'injection de $Y_1 \times Y_1$ dans $\tilde{X}_1 = X_1 \times X_1, \delta_1^{Y}$ l'injection diagonale de Y_1 dans $Y_1 \times Y_1$ et Id désigne l'identité sur divers espaces. On démontre ensuite que l'on a un isomorphisme
(3.21)

$$((f_1 \times f_1) \times Id \times Id)^{-1}\mu_{(\tilde{X}_1,M_2,M_3)}(H_2) \tilde{\rightarrow} \mu_{(\tilde{Y}_1,M_2,M_3)}(((f_1 \times f_1) \times Id \times Id)^{-1}H_2).$$

On prouve (3.21) en établissant un résultat d'image inverse pour la microlocalisation simultanée, analogue au théorème 6.7.1. de [7] dans le cadre de la microlocalisation usuelle. L'obtention de ce résultat nécessite l'utilisation des hypothèses i) à iv) du théorème 2.1.

On constate ensuite que

$$((f_1 \times f_1) \times Id \times Id)^{-1}H_2 \tilde{\rightarrow}$$

$$(3.22) \qquad R\mathcal{H}om(\bar{R}_2^{-1}(f_1 \times Id \times Id)^{-1}\mathbf{C}_{\Delta_X}, \bar{R}_1^! R\mathcal{H}om(\bar{q}_1^{-1} L \overset{L}{\otimes} \bar{q}_2^{-1} K_2, \bar{q}_3^! F_2)) \otimes \omega_{Y_1 \times Y_1 / X_1 \times X_1}^{\otimes -1}$$

où $\bar{q}_j$ est la j$^{\text{ième}}$ projection définie sur $Y_1 \times X_2 \times X_3, j = 1, 2, 3$, $\bar{R}_j$ la j$^{\text{ième}}$ projection de $(Y_1 \times X_2 \times X_3)^2$ sur $Y_1 \times X_2 \times X_3 \quad j = 1, 2$ et où on a utilisé que $f^{-1}K_1 \simeq L$. Or $(f_1 \times Id \times Id)^{-1}\mathbf{C}_{\Delta_X} = (Id \times f_2 \times f_3)_! \mathbf{C}_{\Delta_Y}$ où Δ_Y désigne la diagonale de $Y_1 \times Y_2 \times Y_3$.

Reportant cette égalité dans (3.22), (3.22) dans (3.21) et (3.21) dans (3.20) on est conduit à étudier

$$(3.23) \qquad R(Id \times {}^t f_2' \times {}^t f_3')_! \, (Id \times f_{2\pi} \times f_{3\pi})^{-1} \quad \mu_{(\bar{Y}_1, M_2, M_3)}(\bar{H})$$

avec

$$(3.24) \qquad \bar{H} = R\mathcal{H}om(\bar{R}_2^{-1}(Id \times f_2 \times f_3)_! \, \mathbf{C}_{\Delta_Y}, \bar{R}_1^!(\bar{q}_1^{-1} L \overset{L}{\otimes} \bar{q}_2^{-1} K_2, \bar{q}_3^! F_2)).$$

Un deuxième théorème d'image inverse d'un microlocalisé simultané permet alors d'obtenir un isomorphsime de (3.1.23) avec

$$(3.25) \qquad \mu_{(\bar{Y}_1, N_2, N_3)}(R\mathcal{H}\mathrm{om}(R_2^{Y-1}\mathbf{C}_{\Delta_Y}, R_1^{Y!} R\mathcal{H}om(q_1^{Y-1} L \overset{L}{\otimes} q_2^{Y-1} L, q_3^{Y!} f^! F_2))$$

où R_j^Y est la j$^{\text{ième}}$ projection de $(Y_1 \times Y_2 \times Y_3)^2$ sur $Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \quad j = 1, 2$ et q_j^Y la j$^{\text{ième}}$ projection sur $Y_1 \times Y_2 \times Y_3 \quad j = 1, 2, 3$. La proposition 3.3 en découle.

Fin de la preuve du théorème 2.1 : Considérons le diagramme commutatif suivant :

$$
\begin{array}{ccccc}
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}R^t\underline{f}'_!\underline{f}_\pi^{-1}\tilde{\mu}\hom(K_1K_2;F)|_Z & \xrightarrow[(a)]{\sim} & R\pi^Y_* R^t \underline{f}'_! f_\pi^{-1}\tilde{\mu}\mathcal{H}om(K_1,K_2;F)|_Z & \xleftarrow{\sim} & f^{-1}R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2, F)|_Z \\
(1')\Big\downarrow\wr & & (1)\Big\downarrow & & (1'')\Big\downarrow \\
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\tilde{\mu}\hom(L,L;f^{-1}F)|_Z & \xrightarrow[(b)]{} & R\pi^Y_*\tilde{\mu}\hom(L,L;f^{-1}F)|_Z & \xleftarrow{\sim} & R\mathcal{H}om(L\overset{L}{\otimes}L, f^{-1}F)|_Z \\
(2')\Big\uparrow\wr & & (2)\Big\uparrow & & \nearrow(2'') \qquad \searrow(3) \\
R\pi^Y_{1!}R\pi^Y_{2*}R\pi^Y_{3*}\tilde{\mu}\hom(\mathbf{C}_Y,L;f^{-1}F)|_Z & \xrightarrow[(c)]{\sim} & R\pi^Y_*\tilde{\mu}\hom(\mathbf{C}_Y,L;f^{-1}F)|_Z & \xleftarrow{\sim} & R\hom(L,f^{-1}F)|_Z = R\hom(L,f^{-1}F)|_Z
\end{array}
$$

Diagramme (3.26)

La flèche (a) est un isomorphisme d'après (3.17) et la deuxième flèche de la première ligne horizontale s'obtient en raisonnant comme dans (3.8) - (3.12) (on remarquera que la propriété de support de $\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(K_1, K_2; F_2)$ permet de remplacer dans l'analogue de (3.12) $R^t \underline{f}'_*$ par $R^t \underline{f}'_!$).

La flèche (b) n'est autre que la flèche naturelle $R\pi^Y_{1!} \to R\pi^Y_{1*}$, et la deuxième flèche de la deuxième ligne s'obtient comme (3.8).

La flèche (c) est un isomorphisme car $SS(\mathbf{C}_Y) \subset T^*_Y Y$ entraine que le support de $\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}(\mathbf{C}_Y, L; f^{-1}F_2)$ est contenu dans la section nulle par rapport à la première variable.

La flèche (1') provient de la proposition 3.3 : c'est donc un isomorphisme. Les flèches (2'), (2) et (2") proviennent de $\tau : L \to \mathbf{C}_Y$ et (3) est la flèche induite par $\delta : L \to L \otimes L$. L'hypothèse vii) du théorème entraine donc que (3) o (2") coïncide avec l'identité.

Le fait que (2') agisse sur des complexes obtenus après application de $R\pi^Y_{1!}$ permet, comme dans (3.18), de supprimer la microlocalisation par rapport à la première variable, ce qui autorise un calcul explicite de la fibre en un point des deux complexes (cf [1], [2]). En particulier celle-ci ne dépend des faisceaux $\mathbf{C}_Y$ et L qui interviennent dans le premier argument de $\tilde{\mu}\,\mathrm{hom}$ que par l'intermédiaire de leur cohomologie à support en un point $R\Gamma_{\{z\}}(\mathbf{C}_Y)$ et $R\Gamma_{\{z\}}(L)$ respectivement. Comme l'hypothèse vi) affirme que τ induit un isomorphisme sur ces dernières, on en déduit que (2') est un isomorphisme.

La composée (3) o (1"), qui est par définition (2.11) est alors un isomorphisme comme composée de (a), (1'), (2') (c). Cela achève la preuve du théorème 2.1.

Pour terminer remarquons que le fait que l'on se soit restreint au cas de deux hypersurfaces a été utilisé de deux manières. D'abord, cela nous a permis d'écrire le faisceau de l'exemple 1.3 iv) sous la forme d'un produit tensoriel $K_1 \otimes K_2$.

Ensuite nous avons utilisé le fait que les fibres des microsupports de K_1 et K_2 sont en somme directe, en particulier pour prouver le lemme 3.2. C'est cela qui permet en dernière analyse de remplacer le foncteur $R\pi_{1*}$ par $R\pi_{1\,!}$ ce qui est essentiel pour prouver la proposition 3.3 et également pour établir l'isomorphisme (2') du diagramme (3.26).

On pourrait vouloir étendre le théorème à un complexe de la forme $R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2 \overset{L}{\otimes} K_3, F)$ avec $SS(K_j) = T^*_{Z_j} X, Z_1, Z_2, Z_3$ étant trois hypersurfaces complexes se coupant dense à deux transversalement suivant Z. Bien entendu la méthode précédente ne pourrait s'appliquer, puisque le lemme 3.2 n'a aucune chance de s'étendre à ce cas. Mais remarquons que de toute manière la flèche

$$f^{-1} R\mathcal{H}om(K_1 \overset{L}{\otimes} K_2 \overset{L}{\otimes} K_3, F)|_Z \to R\,\mathrm{hom}(L, f^{-1}F)|_Z$$

ne saurait être un isomorphisme. En effet, dans un tel cas, compte tenu de l'exemple 1.3 v), on pourrait résoudre le problème de Cauchy ramifié dans la classe des fonctions holomorphes sur le produit fibré S des revêtements universels du complémentaire des Z_j pour $j = 1, 2, 3$.

Indiquons un exemple montrant que ceci est en général impossible. Considérons $X = \mathbf{C}^2$ muni des coordonnées $z = (z_0, z_1)$ et notons Z_1, Z_2, Z_3 les trois hypersurfaces de $\mathbf{C}^2$ d'équations respectives $z_0 = 0, z_1 = 0, z_1 = z_2$. Dans [10] Leichtnam construit un opérateur P sur $\mathbf{C}^2, P = \frac{\partial^2}{\partial z_0 \partial z_1}(\frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{\partial}{\partial z_1})$, une fonction f ramifiée à monodromie abélienne sur $X - (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ et une solution u de $Pu = f$ à données de Cauchy holomorphes, qui n'est pas à monodromie abélienne. Dans la mesure où je ne sais pas prouver que la classe des fonctions ramifiées à monodromie abélienne coïncide avec celle des fonctions holomorphes sur le produit fibré S des revêtements universels des $X - Z_j$ $j = 1, 2, 3$ nous ne pouvons utiliser directement cet exemple. Toutefois, la construction de Leichtnam s'adapte aisément. En effet, S est donné par

$$S = \{(w_0, w_1, w_2); (w_0, w_1, w_2) \in \mathbf{C}^3; e^{w_0} = e^{w_1} + e^{w_2}\} \tag{3.27}$$

avec la projection $q : S \longrightarrow \mathbf{C}^2 - (Z_1 \cup Z_2 \cup Z_3)$ définie par $q(w_0, w_1, w_2) = (e^{w_0}, e^{w_1})$. Soit

$$M = \{(x_1, x_2) \in \mathbf{C}^2; e^{x_1} + e^{x_2} = 1\}$$

et posons $S' = \mathbf{C} \times M$ et pour $(x_0, x_1, x_2) \in S', q'(x_0, x_1, x_2) = (e^{x_0}, e^{x_1})$.

Alors l'isomorphisme

$$\begin{aligned} S &\longrightarrow S' \\ (w_0, w_1, w_2) &\longrightarrow (w_0, w_1 - w_0, w_2 - w_0) \end{aligned}$$

induit sur la base le changement de coordonnées

$$\begin{aligned} \mathbf{C}^2 - \{z_0 \cdot z_1(z_0 + z_1) = 0\} &\longrightarrow \mathbf{C}^* \times (\mathbf{C} - \{0, 1\}) \\ (z_0, z_1) &\longrightarrow (z_0, z_1/z_0) \end{aligned}$$

Pour pouvoir construire un contre-exemple en suivant la méthode de [10] §8, il suffit de s'assurer que $H^1(M) \neq \{0\}$ (Pour prouver que les fonctions holomorphes sur S coïncident avec les fonctions à monodromie abélienne, il faudrait montrer que $\pi_1(M)$ est le groupe dérivé du groupe fondamental de $\mathbf{C} - \{0, 1\}$). Notons

$$M_j = \{(x_1, x_2) \in M; e^{x_j} \notin \mathbf{R}_-\} \; j = 1, 2 \; .$$

Si log désigne la détermination usuelle du logarithme sur $\mathbf{C} - \mathbf{R}_-$, et si V est l'ouvert de $\mathbf{C}$

$$V = \{x \in \mathbf{C}; \mathrm{Im} x \notin 2\pi\mathbf{Z} \text{ si } \mathrm{Re} x \geq 0\},$$

chacun des M_j s'écrit comme une réunion disjointe de composantes connexes données par

$$(3.28)\qquad \begin{aligned} M_1 &= \bigcup_{k\in\mathbf{Z}} M_1^k \quad M_1^k = \{(\log(1-e^{x_2})+2i\pi k, x_2); x_2 \in V\} \\ M_2 &= \bigcup_{\ell\in\mathbf{Z}} M_2^\ell \quad M_2^\ell = \{(x_1, \log(1-e^{x_1})+2i\pi\ell); x_1 \in V\} \end{aligned}$$

et $M_1 \cap M_2$ est réunion disjointe des composantes connexes $M_{12}^{k,\ell}$ avec :

$$(3.29)\qquad \begin{aligned} M_{12}^{k,\ell} &= \{(\log(1-e^{x_2})+2i\pi k, x_2); x_2 \in I_\ell\} \\ &= \{(x_1, \log(1-e^{x_1})+2i\pi\ell); x_1 \in I_k\} \end{aligned}$$

où $I_k = \{x \in \mathbf{C}; (2k-1)\pi < \mathrm{Im}x < (2k+1)\pi \text{ et } \mathrm{Re}x < 0 \text{ si } \mathrm{Im}x = 2k\pi\}$.

Ecrivons la suite de Mayer-Victoris pour le recouvrement de M par les ouverts M_1 et M_2 :

$$0 \longrightarrow H^0(M) \longrightarrow H^0(M_1) \oplus H^0(M_2) \longrightarrow H^0(M_1 \cap M_2) \longrightarrow H^1(M)\ .$$

La troisième flèche associe à la donnée d'une fonction localement constante sur M_1 et d'une fonction localement constante sur M_2, la différence de leurs restrictions à $M_1 \cap M_2$. D'après (3.28), (3.29) elle associe donc à une suite $(\alpha_k)_{k\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ et à une suite $(\beta_\ell)_{\ell\in\mathbf{Z}}$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ la suite $\gamma_{k,\ell} = \alpha_k - \beta_\ell$ de $\mathbf{C}^{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$. Elle n'est donc pas surjective de $H^0(M_1) \oplus H^0(M_2) = \mathbf{C}^{\mathbf{Z}} \oplus \mathbf{C}^{\mathbf{Z}}$ dans $H^0(M_1 \cap M_2) = \mathbf{C}^{\mathbf{Z}\times\mathbf{Z}}$ d'où $H^1(M) \neq \{0\}$.

Bibliographie

[1] A. D'Agnolo et P. Schapira : *An inverse image theorem for sheaves with applications to the Cauchy problem*, Duke Math.J., vol **64**, n°3, (1991), 451-472.

[2] A. D'Agnolo et P. Schapira : *Problème de Cauchy ramifié en théorie des faisceaux*, Séminaire d'équations aux dérivés partielles de l'Ecole Polytechnique, (1991-1992), Exposé n°VII.

[3] A. D'Agnolo et P. Schapira : en préparation

[4] J.-M. Delort : *Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits*, Ann. Sc. Ec. Norm. Sup. 4ième série, **23**, (1990), 257-310.

[5] J.-M. Delort : *Microlocalisation simultanée et problème de Cauchy ramifié*, manuscrit.

[6] T. Hamada, J. Leray et C. Wagshal : *Systèmes d'équations aux dérivées partielles à caractéristiques multiples : problème de Cauchy ramifié, hyperbolicité partielle*, J. Math. Pures Appl. (9) **55** (1976), 297-352.

[7] M. Kashiwara et P. Schapira : *Sheaves on manifolds*, Grundlehren Math. Wiss. **292**, Springer Verlag, Berlin, 1990.

[8] G. Lebeau : *Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol **35**, (2), (1985), 145-216.

[9] G. Lebeau : *Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires*, Inv. Math. **95**, (1989), 277-323.

[10] E. Leichtnam : *Le problème de Cauchy ramifié*, Ann. scient. Ec. Norm. Sup. 4ème série, **23** (1990), 369-443.

[11] E. Leichtnam : *Le problème de Cauchy ramifié I*, Séminaire d'équations aux dérivées partielles de l'Ecole Polytechnique, (1989-1990), exposé n°10.

[12] J. Sjöstrand : *Singularités analytiques microlocales*, Astérisque **95**, (1982).

Université Paris Nord

Institut Galilée

Avenue Jean-Baptiste Clément

93430 Villetaneuse