Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

JOHANNES SJÖSTRAND

# Majoration du nombre de résonances près de l'axe réel (d'après un travail avec M. Zworski)

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1991-1992), exp. n° 3, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A3_0>

*CENTRE*
*DE*
*MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

---

# EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

# MAJORATION DU NOMBRE DE RESONANCES PRES DE L'AXE REEL

(d'après un travail avec M. Zworski)

Johannes SJÖSTRAND

Exposé n° I I I

26 Novembre 1991

# Majoration du nombre de résonances près de l'axe réel.

(d'après un travail avec M.Zworski)

Johannes Sjöstrand

0. Introduction et énoncé du résultat. Ce travail [SZ2] fait suite à [SZ1] (voir aussi Vodev [V]). Nous obtenons une majoration du nombre de résonances dans un angle $\{z\in\mathbb{C};\ |z|\le\lambda,\ 0\le -\arg z<\theta\}$, $\lambda\to\infty$, avec $\theta$ petit, exprimée à l'aide de la fonction de comptage des valeurs propres positives d'un problème de référence.

Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ un compact convexe. Nous supposerons dans la suite que n est impair, bien qu'il semble clair que notre résultat principal reste valable à des modifications mineures près, dans le cas où n est pair. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe avec une décomposition orthogonale:

(0.1) $\mathcal{H}=\mathcal{H}_K\oplus L^2(\mathbb{R}^n\setminus K)$, formellement: $u=u_{|K}+u_{|\mathbb{R}^n\setminus K}$, $u\in\mathcal{H}$.

Soit P un opérateur auto-adjoint $\mathcal{H}\to\mathcal{H}$ de domaine $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$. On suppose

(0.2) $u\in\mathcal{D}\Rightarrow u_{|\mathbb{R}^n\setminus K}\in H^2(\mathbb{R}^n\setminus K)$,

(0.3) Si $u\in\mathcal{H}$, $u_{|\mathbb{R}^n\setminus K}\in H^2$ et $u=0$ dans un voisinage de K, alors $u\in\mathcal{D}$,

(0.4) Si $u\in\mathcal{D}$, alors $(Pu)_{|\mathbb{R}^n\setminus K}=-\Delta(u_{|\mathbb{R}^n\setminus K})$,

où $\Delta=\Sigma_1^n\,\partial_{x_j}^2$ est le laplacien,

(0.5) $\mathcal{H}\ni u\mapsto(P+i)^{-1}u_{|K}\in\mathcal{H}_K$ est compact.

Sous ces hypothèses, si $\chi\in C^2(\mathbb{R}^2)$ est borné avec toutes ses dérivées d'ordre $\le 2$ et $\chi=$const. dans un voisinage de K, on peut définir l'opérateur de multiplication $u\mapsto\chi u$ de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$ et de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}$. On peut aussi définir les éspaces $\mathcal{H}_{comp}$, $\mathcal{H}_{loc}$, $\mathcal{D}_{comp}$, $\mathcal{D}_{loc}$ de façon naturelle. Il résulte de [SZ1] que la résolvante $(k^2-P)^{-1}$, initialement définie dans $\{k\in\mathbb{C};\ \mathrm{Im}\,k>0,$

$k^2 \notin \sigma(P)\}$, admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$ en tant qu'opérateur $\mathcal{H}_{comp} \rightarrow \mathcal{D}_{loc}$. On comptera les pôles de $(k^2-P)^{-1}$ (aussi appelés résonances) avec leur multiplicité algébrique ([ZS1]), et on s'intéresse ici à la fonction de comptage

(0.6) $N_\theta(\lambda)=$ nombre de pôles dans $|z|\leq\lambda$, $0\leq -\arg z\leq\theta$,

quand $\theta>0$ est petit. Pour formuler notre résultat nous avons besoin de certains problèmes de référence. On pose $K_\varepsilon=\{x\in\mathbb{R}^n;\ d(x,K)\leq\varepsilon\}$, où d désigne la distance euclidienne, et on pose $\mathcal{H}_{K_\varepsilon}=\mathcal{H}_K\oplus L^2(K_\varepsilon\setminus K)$ (décomposition orthogonale). On peut alors définir un opérateur autoadjoint $P^\#{}_\varepsilon:\mathcal{H}_{K_\varepsilon}\rightarrow\mathcal{H}_{K_\varepsilon}$ de domaine $\mathcal{D}^\#{}_\varepsilon=\{u\in\mathcal{H}_{K_\varepsilon};\ \chi u\in\mathcal{D}$, $(1-\chi)u\in H^2(K_\varepsilon)\cap H_0{}^1(K_\varepsilon)\}$, par $P^\#{}_\varepsilon u=P(\chi u)+(-\Delta)((1-\chi)u)$, $u\in\mathcal{D}^\#{}_\varepsilon$, où $\chi\in C_0{}^\infty$(Interieur de $K_\varepsilon$) vaut 1 dans un voisinage de K, et on peut montrer que le spectre de cet opérateur est discrèt. Soit $\Phi_\varepsilon(\lambda)$ la fonction de comptage pour les valeurs propres positives:

(0.7) $\Phi_\varepsilon(\lambda)=\#([0,\lambda^2]\cap\sigma(P^\#{}_\varepsilon))$.

On suppose que pour $\varepsilon>0$ assez petit,

(0.8) $\Phi_\varepsilon(\lambda)=(1+o_\varepsilon(1))\,\Phi^\#{}_\varepsilon(\lambda)$, $\lambda\rightarrow\infty$, $\Phi^\#{}_\varepsilon(\lambda)=\int_0^\lambda\varphi_\varepsilon(t)\,dt$,

où pour tout $C\geq1$:

(0.9) $\tilde{C}(C)^{-1}\leq\varphi_\varepsilon(\lambda_1)/\varphi_\varepsilon(\lambda_2)\leq\tilde{C}(C)$, quand $C^{-1}\leq\lambda_1/\lambda_2\leq C$, $\lambda_j\geq\hat{C}(\varepsilon,C)$.

Ici $\tilde{C}(C)>0$ est indépendant de $\varepsilon$.

Notre résultat principal est alors:

<u>Théorème 0.1.</u> Il existe $C>0$ tel que pour $\theta>0$ assez petit et pour $\lambda\geq\lambda(\theta)$ assez grand:

(0.10) $N_\theta(\lambda)\leq(1+C\varepsilon)\,\Phi_\varepsilon(\lambda)+C\,\varepsilon\,\lambda^n$, où $\varepsilon=\theta^{2/7}$. Dans le cas où K est strictement convexe à bord $C^\infty$, on peut même prendre $\varepsilon=\theta^{2/5}$.

Exemple 1. Soit P la réalisation de Dirichlet de $-\Delta$ dans $\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est un convexe borné à bord $C^\infty$. Alors $N_\theta(\lambda)\le C\,\theta^{2/7}\lambda^n$, $\lambda\ge\lambda(\theta)$, et dans le cas strictement convexe on a même $N_\theta(\lambda)\le C\,\theta^{2/5}\lambda^n$.

Exemple 2. Plus généralement, soit P la réalisation de Dirichlet de $-\Delta+V$ dans $\mathbb{R}^n\backslash\mathcal{O}$, où $\mathcal{O}$ est borné à bord $C^\infty$ et $V\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$. Alors pour $\lambda\ge\lambda(\theta)$: $N_\theta(\lambda)\le(2\pi)^{-n}\omega_n\,\mathrm{vol}((\mathrm{ch}(\mathrm{supp}\,V\cup\mathcal{O}))\backslash\mathcal{O})(1+\mathcal{O}(\theta^{2/7}))\,\lambda^n$, où "ch"="enveloppe convexe de" et où $\omega_n$ est le volume de la boule d'unité dans $\mathbb{R}^n$.

Grâce à un résultat récent de Vodev, notre théorème donne aussi une bonne estimation sur le nombre de résonances dans le disque de centre 0 et de rayon $\lambda$ dans le cas où P est un opérateur hypoélliptique, non-élliptique ([SZ2]).

1. Esquisse de la démonstration. Comme dans [SZ1] il y a trois ingrédients: des dilatations analytiques, du calcul fonctionnel, et une inégalité de H.Weyl.

On peut ici se contenter de dilater peu, mais on doit mieux respecter les données géométriques, et on ne peut plus comme dans [SZ1] faire simplement une dilatation radiale. Soit $K\subset\mathbb{R}^n$ un convexe compact. On montre alors qu'il existe $f_\varepsilon:\mathbb{R}^n\longrightarrow\mathbb{R}$, pour $\varepsilon>0$ assez petit, de classe $C^\infty$ avec les propriétés suivantes:

(1.1) Si $\Gamma_\varepsilon=\{x+i\nabla f_\varepsilon(x);\ x\in\mathbb{R}^n\}$, alors $K_\varepsilon\subset\Gamma_\varepsilon$,

(1.2) $\nabla f_\varepsilon(x)=\varepsilon x$ pour $|x|\ge C$,

(1.3) L'opérateur $\tilde{P}_\varepsilon=-\Delta_{|\Gamma}$ est uniformément elliptique et son symbole principal $\tilde{p}_\varepsilon$ vérifie

(a) $d(x,K)\le C\varepsilon \Rightarrow -\theta_0 \le \arg \tilde{p}_\varepsilon \le 0$, où $\operatorname{tg}\theta_0 = 2(2)^{\frac{1}{2}}$,

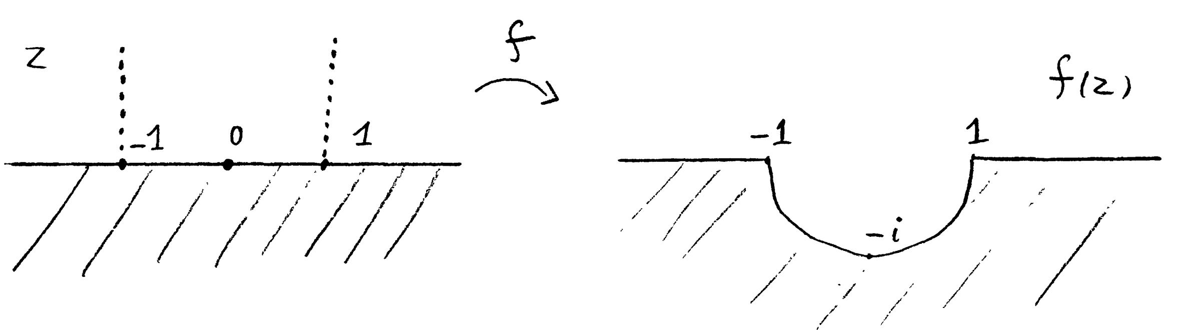
(b) $C\varepsilon \le d(x,K) \le C \Rightarrow -\theta_0 \le \arg \tilde{p}_\varepsilon \le -\varepsilon^2/C$,

(c) $d(x,K)\ge C \Rightarrow \arg \tilde{p}_\varepsilon = -\theta_1$, où $\operatorname{tg}\theta_1 = 2\varepsilon/(1-\varepsilon^2)$.

Dans le cas où K est strictement convexe à bord $C^\infty$ on peut remplacer "$-\varepsilon^2/C$" dans (b) par "$-\varepsilon/C$". Pour construire $f_\varepsilon$, on cherche à construire $f_\varepsilon$ le plus convexe possible avec $\|\nabla^2 f_\varepsilon\| \le 2^{-\frac{1}{2}}$, tout en respectant (1.2) et la condition $f_{\varepsilon|K_\varepsilon}=0$.

$P_\varepsilon$ n'a pas de spectre dans le demi-plan supérieur ouvert et le spectre dans $-\theta_1 < \arg z \le 0$ coincide avec l'ensemble des carrés des pôles dans ce secteur. Si F est holomorphe et à croissance tempérée à l'infini dans un domaine $\mathbb{C}\setminus\{z\in\mathbb{C};\ |z|>\delta,\ \delta<\arg z<\pi-\delta\}$, alors on peut introduire et étudier $F(h^2P_\varepsilon)$ par des intégrales de Cauchy comme dans [SZ1].

Soit $f(z)=z+(z^2-1)^{\frac{1}{2}}$ (branche convenable), d'inverse $z=\frac{1}{2}(f+1/f)$:




Posons $F_0(z)=f(2z-3)$, $F_\varepsilon(z)=F_0(z-ig(\varepsilon))$, où $0<g(\varepsilon)<<\varepsilon^2$. L'image réciproque par $F_\varepsilon$ de $\{z;\ -\pi\le\arg z\le 0,\ 1\le|z|\le 1+\delta\}$ est alors l'intersection entre le demi-plan $\operatorname{Im} z\le g(\varepsilon)$ et le domaine elliptique de points focaux $1+ig(\varepsilon)$, $2+ig(\varepsilon)$ dont le bord passe par $3/2+ig(\varepsilon)\pm\frac{1}{2}\operatorname{ch}\tilde{\delta}$ et

$3/2+ig(\varepsilon)\pm\frac{1}{2}i\,\mathrm{sh}\,\tilde{\delta}$, $\tilde{\delta}=\log(1+\delta)$. Le nombre de valeurs propres de $P_\varepsilon$ dans ce dernier domaine est alors égal au nombre de valeurs propres de $F_\varepsilon(P_\varepsilon)$ dans $\{z;\ -\pi\leq\arg z\leq 0,\ 1\leq|z|\leq 1+\delta\}$. Avec $\hat{P}_\varepsilon=e^{-i\theta_1}(-\Delta)$, on pose:

$B_\varepsilon=F_\varepsilon(h^2P_\varepsilon)^*F_\varepsilon(h^2P_\varepsilon)$, $\tilde{B}_\varepsilon=F_\varepsilon(h^2\tilde{P}_\varepsilon)^*F_\varepsilon(h^2\tilde{P}_\varepsilon)$,

$B^{\#}_\varepsilon=F_\varepsilon(h^2P^{\#}_\varepsilon)^*F_\varepsilon(h^2P^{\#}_\varepsilon)$, $\hat{B}_\varepsilon=F_\varepsilon(h^2\hat{P}_\varepsilon)^*F_\varepsilon(h^2\hat{P}_\varepsilon)$.

Soient $1=\chi_0+\chi_1+\chi_2$, $\chi_0,\chi_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_0=1$ près de K et supp $\chi_2$ assez loin de K, $\psi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $=1$ près de K, $\psi_0=1$ près de supp $\chi_0$, $\psi_j\cap\operatorname{supp}\chi_j=\emptyset$, $j=1,2$. Alors ([SZ1]) si $f\in C_0^\infty(]-\infty,\varepsilon^2/C[)$

(1.4) $f(B_\varepsilon)=\psi_0 f(B^{\#}_\varepsilon)\chi_0+(1-\psi_1)f(\tilde{B}_\varepsilon)\chi_1+(1-\psi_2)f(\hat{B}_\varepsilon)\chi_2+R$,

où R est de classe trace et de norme trace $\mathcal{O}(h^\infty)$.

<u>Lemme 1.1.</u> Pour $h>0$ assez petit, $(B_\varepsilon u|u)\geq\|u\|^2$.

<u>Preuve.</u> Soit $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 près de $[0,1]$ et à support dans $]-\infty,1+\varepsilon_1[$ pour $\varepsilon_1>0$ assez petit. Alors $f(B^{\#}_\varepsilon)=0$, $f(\hat{B}_\varepsilon)=0$, et si on analyse $f(\tilde{B}_\varepsilon)$ comme un opérateur h-pseudodifférentiel, on voit aussi que $f(\tilde{B}_\varepsilon)=0$ pour h assez petit. D'après (1.4), la norme trace de $f(B_\varepsilon)$ est $\mathcal{O}(h^\infty)$, donc pour h assez petit, $B_\varepsilon$ n'a pas de spectre dans $[0,1]$. □

On pose $\theta_1(\varepsilon)=\varepsilon^2/C$ pour $C>>1$.

<u>Lemme 1.2.</u> Si $f\in C_0^\infty(]-\infty,1+\theta_1(\varepsilon)[)$, alors pour h assez petit:

$|\operatorname{tr} f(\tilde{B}_\varepsilon)\,\chi_1|\leq C\varepsilon h^{-n}$.

<u>Idée de la démonstration.</u> $f(\tilde{B}_\varepsilon)$ est un opérateur h-pseudodifférentiel de symbole principal $f(|F_\varepsilon(\tilde{p}_\varepsilon)|^2)$, donc

symbole principal $f(|F_\varepsilon(\tilde{p}_\varepsilon)|^2)$, donc

$\mathrm{tr} f(\tilde{B}_\varepsilon)\chi_1 \approx (2\pi h)^{-n}\iint f(|F_\varepsilon(\tilde{p}_\varepsilon)|^2)\,\chi_1(x)\,dx\,d\xi = \mathcal{O}(\varepsilon\, h^{-n})$, où la dernière estimation résulte de (1.3) et du choix de $F_\varepsilon$. □

Soient $\mu_1 \le \mu_2 \le \ldots$ les valeurs caractéristiques de $F_\varepsilon(h^2 P_\varepsilon)$, et soit $N^*(\delta)$ le nombre de valeurs caractéristiques $\le 1+\delta$.

<u>Lemme 1.3.</u> Pour $\delta \le \varepsilon^2/C$ on a:

$$N^*(\delta) \le \#(\sigma(h^2 P^\#_\varepsilon) \cap [1-C\delta^2, 2+C\delta^2]) + \mathcal{O}(\varepsilon)\,h^{-n},\ h \le h(\delta,\varepsilon).$$

<u>Idée de la démonstration.</u> On applique le lemme 1.2 et (1.4) avec un $f$ convenable. □

Soit $N(\delta)$ le nombre de valeurs propres de $F_\varepsilon(P_\varepsilon)$ de module $\le 1+\delta$. Soient $\delta_1 < \delta_2 < \varepsilon^2/C$, $N = N(\delta_1)$. Rappelons l'inégalité de Weyl:

(1.5) $\mu_1\mu_2 \ldots \mu_N \le |z_1|\,|z_2|\ \ldots\ |z_N|$,

où $z_1$, $z_2$ désignent les valeurs propres de $F_\varepsilon(P_\varepsilon)$ rangées avec $|z_{j+1}| \ge |z_j|$. Si $N(\delta_1) \ge N^*(\delta_2)$, cette inégalité et le Lemme 1.1 donnent:

(1.6) $\quad (1+\delta_2)^{N(\delta_1)-N^*(\delta_2)} \le (1+\delta_1)^{N(\delta_1)}$,

et si $\delta_1/\delta_2 << 1$ on en déduit

(1.7) $\quad N(\delta_1) \le (1+C\,\delta_1/\delta_2)\,N^*(\delta_2)$.

Le Lemme 1.3 donne alors:

(1.8) $\quad N(\delta_1) \le (1+C\delta_1/\delta_2)(\#(\sigma(h^2 P^\#_\varepsilon) \cap [1-C\delta^2, 2+C\delta^2]) + \mathcal{O}(\varepsilon)\,h^{-n})$.

Comme remarqué au début de cette section, (1.8) entraine une majoration du nombre de valeurs propres de $P_\varepsilon$ à l'intérieur d'un ellipse à points focaux $1+ig(\varepsilon)$, $2+ig(\varepsilon)$ et "d'épaisseur" $\sim\delta_1$. En jouant avec les divers paramêtres, on recouvre un angle par une réunion d'images homothétiques de ce domaine elliptique, et on arrive à terminer la démonstration.

## Réferences.

(Voir les articles ci-dessous pour une bibliographie plus complète).

[SZ1] J.Sjöstrand, M.Zworski, Complex scaling and the distribution of scattering poles, à paraître dans Journal of the AMS

[SZ2] J.Sjöstrand, M.Zworski, Distribution of scattering poles near the real axis, à paraître dans Comm. P.D.E.

[V] G.Vodev, Sharp bounds for the number of scattering poles for perturbations of the Laplacian. Préprint.

Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
Bât. 425
91405 ORSAY CEDEX