

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. E. CANCELIER

J.-Y. CHEMIN

C. J. XU

Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 22,
p. 1-14

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992__A22_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1991-1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)

Tél. (1) 69 33 40 91

Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

CALCUL DE WEYL ET OPERATEURS SOUS-ELLIPTIQUES

C.E. CANCELIER J.-Y. CHEMIN C.J. XU

Introduction

Dans cet exposé, on considère une suite $(p_j), 1 \leq j \leq q$, de symboles classiques réels de $S^1(\Omega \times \mathbf{R}^n)$, Ω étant un ouvert de \mathbf{R}^n . On suppose que la condition de sous-ellipticité de Hörmander est vérifiée à l'ordre 2 : pour tout compact K de Ω , il existe deux constantes $c, C > 0$, telles que tout $X = (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n, |\xi| > C$, l'on ait

$$(1) \quad \sum_{j=1}^q p_j^0(X)^2 + \sum_{i,j=1}^q \{p_i^0, p_j^0\}(X)^2 \geq c|\xi|^2,$$

p_j^0 désignant le symbole principal de $p_j, 1 \leq j \leq q$.

Soit P_j une réalisation proprement supportée de $p_j, 1 \leq j \leq q$, on considère l'opérateur laplacien généralisé

$$(2) \quad \Delta_H = \sum_{j=1}^q P_j^* P_j.$$

On sait que Δ_H est sous-elliptique ([7], [2], [5]). On se propose de démontrer que Δ_H admet localement une paramétrix qui est un opérateur pseudo-différentiel dont le symbole a une croissance régie par une métrique et un poids convenables. Cette démarche est bien connue lorsque les opérateurs $P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs réels réguliers ([7], [9], [10]). Elle nécessite ici le calcul de Weyl. Plus précisément :

Théorème A.—

Sous les hypothèses précédentes, il existe un symbole $b \in S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-1}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$ tel que, B étant une réalisation proprement supportée de b , $\text{Id} - \Delta_H B = \text{Id} - B \Delta_H$ soit un opérateur infiniment régularisant.

De plus, pour tout compact K de Ω , pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbf{N}^{2n}$, il existe une constante C telle que

$$(3) \quad \forall (x, \xi) \in K \times \mathbf{R}^n \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta b(x, \xi)| \leq C m(x, \xi)^{-2-|\beta|-|\alpha|} \langle \xi \rangle^{|\beta|}$$

$$\text{avec } m(x, \xi) = \left(\sum_{j=1}^q p_j^0(x, \xi)^2 + \langle \xi \rangle \right)^{1/2}.$$

Remarques :

• Aux points $X = (x, \xi)$ où le système est elliptique, on a alors $m(X) \geq Cte < \xi >$ et l'estimation (3) est du type $S_{1,0}^{-2}$.

• Un poids de ce type a été introduit par R. Beals dans [1].

Le texte sera organisé de la manière suivante : Dans la *section 1*, on décrit les classes de symboles de Hörmander que l'on utilisera et l'on rappelle quelques unes de leurs propriétés de base. Dans la *section 2*, on énoncera et on démontrera un théorème d'inversion exacte. La démonstration nécessite l'introduction de l'espace de Sobolev associé à un poids m et à une métrique g déterminés par le système d'opérateurs pseudo-différentiels considéré. Dans la *section 3*, on déduira le théorème A du théorème d'inversion exacte démontré dans la précédente section et enfin la *section 4* sera consacrée à des résultats d'inclusion dans L^p des espaces de Sobolev associés à un système sous-elliptique de champs de vecteurs.

Les démonstrations omises dans ce texte sont détaillées dans [7].

Remerciements :

Nous tenons à remercier J.-M. Bony, J. Camus, N. Lerner et G. Métivier pour de fructueuses discussions.

1 - Classes de symboles

On commencera par rappeler les résultats classiques du calcul de Weyl ([8]) repris dans l'article [4], puis on démontrera un lemme utilisé à la section 2.

1.1 Rappels

A une distribution tempérée a définie sur l'espace des phases $\mathbf{R}_X^{2n} = \mathbf{R}_x^n \times \mathbf{R}_\xi^n$, la quantification de Weyl associe un opérateur $a^w : \mathcal{S}(\mathbf{R}^n) \rightarrow \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ par la formule

$$(1.1) \quad a^w u(x) = (2\pi)^{-n} \int \int e^{i(x-y) \cdot \xi} a\left(\frac{x+y}{2}, \xi\right) u(y) dy d\xi.$$

L'opération $\#$ de composition des symboles, définie par $(a\#b)^w = a^w b^w$ conduit au moins dans le cas où a et b appartiennent à $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, au résultat :

$$(1.2) \quad a\#b(X) = \pi^{-2n} \int \int e^{-2i[Y-X, Z-X]} a(Y) b(Z) dY dZ,$$

où $[\cdot, \cdot]$ désigne la forme symplectique $[X, Y] = y \cdot \xi - x \cdot \eta$; $X = (x, \xi), Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n}$.

Soit g une métrique riemannienne, c'est-à-dire la donnée, pour tout $X \in \mathbf{R}^{2n}$, d'une forme quadratique définie positive $g_X(\cdot)$. On note g_X^σ la métrique duale de g_X pour la dualité définie par la forme symplectique. Alors

$$(1.3) \quad g_X^\sigma(T) = \sup_{W \neq 0} \frac{[T, W]^2}{g_X(W)} \quad T \in \mathbf{R}^{2n}.$$

On dira que g est une métrique de Hörmander si l'application $X \rightarrow g_X$ dépend mesurablement de X et si elle satisfait les trois propriétés suivantes :

g est une *métrique lente* : il existe une constante $C > 0$ telle que l'on ait

$$(1.4) \quad g_X(X - Y) \leq 1/C \Rightarrow (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \leq C.$$

g vérifie le *principe d'incertitude* : $g_X(\cdot) \leq g_X^\sigma(\cdot)$, ce qui revient à dire que

$$(1.5) \quad \lambda_g(Y) = \inf_{W \neq 0} (g_Y^\sigma(W)/g_Y(W))^{1/2} \geq 1.$$

g est une *métrique tempérée* : il existe une constante $C > 0$ et un entier N tels que l'on ait

$$(1.6) \quad (g_Y(\cdot)/g_X(\cdot))^{\pm 1} \leq C(1 + g_Y^\sigma(Y - X))^N.$$

Soit M une fonction strictement positive, définie sur \mathbf{R}^{2n} . On dira que M est un *poids admissible* pour g s'il existe une constante \tilde{C} et un entier \tilde{N} tels que l'on ait

$$(1.7) \quad \begin{aligned} g_X(X - Y) \leq 1/C &\Rightarrow (M(Y)/M(X))^{\pm 1} \leq \tilde{C} & X, Y \in \mathbf{R}^{2n}, \\ (M(Y)/M(X))^{\pm 1} &\leq \tilde{C}(1 + g_Y^\sigma(Y - X))^{\tilde{N}} & X, Y \in \mathbf{R}^{2n}. \end{aligned}$$

Une fonction a de classe $C^\infty(\mathbf{R}^{2n})$ appartient à la *classe de symboles* $S(M, g)$ si toutes les semi-normes suivantes sont finies :

$$(1.8) \quad \|a\|_{k; S(M, g)} = \sup_{\substack{\ell \leq k ; X \in \mathbf{R}^{2n} \\ g_X(T_j) \leq 1}} |\partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} a(X)| / M(X),$$

en notant ∂_T la dérivée directionnelle $d \rightarrow \langle da, T \rangle$.

Lorsque $a \in S(M, g)$, l'opérateur a^w est borné de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même, de $\mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même et, si $M = 1$, de $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans lui-même. De plus les classes $S(M, g)$ forment une algèbre graduée, par le groupe multiplicatif des poids, pour l'opération $\#$.

1.2 Enoncé et démonstration du lemme 1.2.1

Soit a un symbole classique, positif, de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$. Considérons les fonctions m et g_X définies par

$$(1.9) \quad m(X) = (a(X) + \langle \xi \rangle)^{1/2} \quad X \in \mathbf{R}^{2n},$$

$\langle \xi \rangle$ désignant $(1 + |\xi|^2)^{1/2}$,

$$(1.10) \quad g_X(dx, d\xi) = m^{-2}(X)(\langle \xi \rangle^2 dx^2 + d\xi^2) \quad X \in \mathbf{R}^{2n}.$$

Lemme 1.2.1.—

Soient a un symbole classique, positif de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$, m et g les fonctions définies en (1.9) et (1.10), alors

- 1) g est une métrique de Hörmander, m un poids admissible pour g ,
- 2) a appartient à $S(m^2, g)$.

Cette démonstration repose sur le fait que $S^1(\mathbf{R}^{2n})$ est inclus dans $S(m^2, g)$ et sur l'inégalité suivante, vérifiée pour toute fonction f positive de classe $C^2(\mathbf{R})$:

$$(1.11) \quad (\partial f / \partial x)^2 \leq 2 \sup(|\partial^2 f / \partial x^2|) f.$$

2 - Enoncé et démonstration du théorème global

Théorème 2.1.—

Soit a un symbole classique de $S^2(\mathbf{R}^{2n})$ dont la partie principale est positive. On suppose que a^w est inversible et que $a^w(x, D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$. Alors il existe un symbole $b \in S(m^{-2}, g)$ tel que $a \# b = b \# a = 1$ (m et g définis en (1.9) et (1.10)).

Avant de démontrer le théorème 2.1, on a besoin de plusieurs résultats démontrés dans [3] et [4], concernant en particulier les espaces de Sobolev associés à une métrique de Hörmander et l'inversibilité dans l'algèbre des opérateurs pseudo-différentiels d'opérateurs inversibles en tant qu'opérateurs entre espaces de Sobolev, vérifiés pour la métrique g du théorème 2.1. On a aussi besoin des deux lemmes 2.2 et 2.3 qui utilisent le concept de symboles confinés que nous allons rappeler.

Soit $U_{Y,r}$ la boule $\{X \mid g_Y(Y - X) < r^2\}$ où $r^2 < C^{-1}$ (C constante de l'entour (1.4)). Par définition, l'espace des symboles confinés dans $U_{Y,r}$ est l'espace $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ muni de la famille de semi-normes

$$(2.1) \quad \|d\|_{k;\text{Conf}(g,Y,r)} = \inf\{C \mid \partial_{T_1} \cdots \partial_{T_\ell} d(X) \leq C(1 + g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}))^{-k/2}\},$$

où les vecteurs T_j vérifient

$$g_Y(T_j) \leq 1, \ell \leq k \text{ et } g_Y^\sigma(X - U_{Y,r}) = \inf_{W \in U_{Y,r}} g_Y^\sigma(X - W).$$

Une famille de symboles d_Y est dite *uniformément confinée dans les boules $U_{Y,r}$* si les semi-normes $\|d\|_{k;\text{Conf}(g,Y,r)}$ sont majorées par des constantes C_k indépendantes de Y .

• Il existe une g -partition de l'unité (théorème 3.1.3 de [3]), c'est-à-dire une famille uniformément confinée de fonctions φ_Y à support dans $U_{Y,r}$ vérifiant

$$(2.2) \quad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \varphi_Y |g_Y|^{1/2} dY = 1,$$

où $|g|$ désigne le déterminant de g .

Si M est un poids admissible pour g , on peut alors décomposer tout symbole $d \in \mathcal{S}(M, g)$ sous forme intégrale en posant $d_Y = M^{-1}(Y)d\varphi_Y$ et

$$(2.3) \quad d(X) = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M(Y) d_Y(X) |g_Y|^{1/2} dY.$$

La famille d_Y est uniformément confinée et réciproquement si d_Y est une famille de symboles uniformément confinée, l'intégrale (2.3) converge et définit un élément de $\mathcal{S}(M, g)$.

• Comme la métrique g est dominée par la métrique de Hörmander \tilde{g} de type $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ((1.11), définition 7.1 de [4]), on a toutes les propriétés suivantes pour tous poids M et M_1 admissibles pour g et tout symbole $d \in \mathcal{S}(M, g)$:

- On peut définir l'espace de Sobolev $H(M)$ (théorème 7.8 de [4]). $H(M)$ est l'espace des distributions $u \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^n)$ vérifiant

$$(2.4) \quad \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) \|\varphi_Y^\psi u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY < \infty$$

(φ_Y partition de l'unité définie en (2.2)).

$H(M)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire

$$(2.5) \quad (u, v)_{H(M)} = \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) (\varphi_Y^w u, \varphi_Y^w v)_{L^2} |g_Y|^{1/2} dY.$$

On notera $\| \cdot \|_{H(M)}$ la norme associée.

- $H(1)$ est identique à $L^2(\mathbf{R}^n)$ (théorème 4.6 de [4]).

- Opérance dans les espaces de Sobolev (corollaire 4.5 de [4]) ; d^w applique continûment $H(M_1)$ dans $H(M_1/M)$.

- La condition suffisante d'inversibilité (corollaire 7.7 de [4]) : Pour qu'il existe $d' \in S(M^{-1}, g)$ tel que $d \# d' = d' \# d = 1$, il suffit que pour un poids admissible \widetilde{M} , l'opérateur d^w soit inversible en tant qu'opérateur de $H(\widetilde{M})$ dans $H(\widetilde{M}/M)$.

L'idée directrice de la démonstration du théorème 2.1 consiste à traiter le symbole a comme un symbole elliptique (de poids m^2) au sens suivant :

$$(2.6) \quad \exists (c, C) \in \mathbf{R}_+^2 \forall X \in \mathbf{R}^{2n} \lambda_g(X) \geq C \Rightarrow a(x) \geq cm^2(X).$$

Ceci suggère la décomposition de l'espace des phases \mathbf{R}^{2n} en la réunion d'une zone dite sous-elliptique

$$(2.7) \quad \mathcal{S} = \{Y = (y, \eta) \in \mathbf{R}^{2n} \mid m(Y) \leq A < \eta >^{1/2}\}$$

et d'une zone dite elliptique $\mathcal{E} = \mathcal{S}^c$ ($A > 0$ désigne une constante assez grande que l'on va choisir ultérieurement).

Le théorème 2.1 résulte alors des deux lemmes suivants ; nous ne démontrerons que le lemme 2.2.

Lemme 2.2.—

Soit φ_Y une g -partition de l'unité (2.2). Il existe deux familles δ_Y et R_Y uniformément confinées dans les $U_{Y,r}$ telles que l'on ait pour $Y \in \mathcal{E}$

$$(2.8) \quad \varphi_Y = m^{-2}(Y)\delta_Y \# a + \lambda_g^{-1}(Y)R_Y.$$

Lemme 2.3.—

Soit θ_Y une famille de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$ uniformément confinée. Alors pour tout poids M admissible pour g , il existe une constante $C > 0$ telle que

$$(2.9) \quad \int_{\mathbf{R}^{2n}} M^2(Y) \|\theta_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \leq C \|u\|_{H(M)}^2.$$

Démonstration du théorème 2.1

Comme $a \in S(m^2, g)$, a^w applique continûment $H(m^2)$ dans $L^2(\mathbf{R}^n)$. Donc en vertu de la condition suffisante d'inversibilité, il ne reste plus qu'à vérifier que

$$(2.10) \quad \|u\|_{H(m^2)} \leq \text{Cte} \|a^w u\|_{L^2}.$$

Or

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \|u\|_{H(m^2)} &= \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y) \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= \int_{\mathcal{S}} m^4(Y) \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY + \int_{\mathcal{E}} m^4(Y) \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &= I_1 + I_2. \end{aligned}$$

Comme par hypothèse : $a^w(x, D)^{-1}$ applique continûment $L^2(\mathbf{R}^n)$ dans $H^1(\mathbf{R}^n)$, on a pour le premier terme I_1 :

$$(2.12) \quad \begin{aligned} I_1 &\leq A^4 \int_{\mathbf{R}^{2n}} \langle \eta \rangle^2 \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq \text{Cte} \|u\|_{H^1(\mathbf{R}^n)}^2 \leq \text{Cte} \|a^w u\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Pour majorer I_2 on va décomposer φ_Y dans \mathcal{E} (lemme 2.2) :

On a donc en quantifiant

$$(2.13) \quad \varphi_Y^w = m^{-2}(Y) \delta_Y^w a^w + \lambda_g^{-1}(Y) R_Y^w$$

et donc

$$(2.14) \quad \begin{aligned} I_2 &= \int_{\mathcal{E}} m^4(Y) \|\varphi_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \\ &\leq \text{Cte} \left(\int_{\mathbf{R}^{2n}} \|\delta_Y^w a^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right. \\ &\quad \left. + \sup_{Y \in \mathcal{E}} \lambda_g^{-2}(Y) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^4(Y) \|R_Y^w u\|_{L^2}^2 |g_Y|^{1/2} dY \right) \\ &\leq \text{Cte} (a^w u\|_{L^2}^2 + \frac{1}{A^2} \|u\|_{H(m^2)}^2), \end{aligned}$$

d'après le lemme 2.3 d'une part, et du fait que $\lambda_g(\cdot) \geq A$ dans \mathcal{E} d'autre part.

Démonstration du lemme 2.2

Pour démontrer le lemme 2.2, il est nécessaire d'introduire la notion de biconfinement. On note $\Delta_r(X, Y)$ la quantité suivante qui mesure l'éloignement pour g^σ de deux g -boules.

$$(2.15) \quad \Delta_r(X, Y) = 1 + \sup\{g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}), g_Y^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r})\}$$

où

$$g_X^\sigma(U_{X,r} - U_{Y,r}) = \inf \{g_X^\sigma(X' - Y') \mid X' \in U_{X,r}, Y' \in U_{Y,r}\}.$$

Δ_r vérifie la propriété d'intégration (théorème 3.2.2 de [3], section 2.3 de [4]) :

$$(2.16) \quad \exists C, \exists N, \forall X \quad \int_{\mathbf{R}^{2n}} \Delta_r^{-N}(X, Y) |g_Y|^{1/2} dY \leq C.$$

Le théorème de biconfinement suivant (théorème 3.2.1 de [3]) donne une estimation du reste $d \# h - dh$ que l'on notera $\lambda_g^{-1}(Y)R(d, h)$:

Soient d et h deux fonctions de $\mathcal{S}(\mathbf{R}^{2n})$, on a alors l'estimation suivante pour le reste $R(d, h)$ défini ci-dessus :

$$(2.17) \quad \forall k \in \mathbf{N} \quad \forall N \in \mathbf{N} \quad \exists \ell \in \mathbf{N} \quad \exists C > 0 \quad \|R(d, h)\|_{k, \text{Conf}(g, Y, r)} \\ \leq C \|d\|_{\ell, \text{Conf}(g, Y, r)} \|h\|_{\ell, \text{Conf}(\delta, Z, r)} \Delta_r^{-N}(Y, Z).$$

En particulier si (d_Y) et (h_Y) sont deux familles de symboles uniformément confinées dans les boules $U_{Y,r}$, pour chaque entier N , la famille $\Delta_r^{-N}(Y, Z)R(d_Y, h_Z)$ est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$ et dans les $U_{Z,r}$.

Pour obtenir la décomposition (2.8) dans \mathcal{E} , on écrit φ_Y sous la forme du produit

$$(2.18) \quad \varphi_Y(X) = (\varphi_Y(X)/a(X))a(X) \quad X \in \mathbf{R}^{2n},$$

puis à l'aide de la forme intégrale (2.3) de a

$$(2.19) \quad \varphi_Y(X) = m^{-2}(Y)\tilde{\delta}_Y(X) \int_{\mathbf{R}^{2n}} m^2(Z)a_Z(X)|g_Z|^{1/2} dZ,$$

avec

$$(2.20) \quad \tilde{\delta}_Y(X) = (m^2(Y)\varphi_Y(X)/a(X)).$$

La famille a_Z est uniformément confinée dans les boules $U_{Z,r}$ (2.3) et la famille δ_Y définie par

$$\delta_Y = \begin{cases} \tilde{\delta}_Y & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les boules $U_{Y,r}$.

D'après le théorème de biconfinement (2.17) on a :

$$(2.21) \quad \delta_Y a_Z = \delta_Y \# a_Z + \lambda_g^{-1}(Y) \tilde{R}(\delta_Y, a_Z).$$

De plus la famille $\Delta_r^{-N}(Y, Z) \tilde{R}(\delta_Y, a_Z)$ est uniformément confinée pour tout N , Δ_r vérifie la propriété d'intégration (2.16), il s'ensuit alors que la famille définie pour tout $X \in \mathbb{R}^{2n}$ par

$$(2.22) \quad R_Y(X) = \begin{cases} m^{-2}(Y) \int_{\mathbb{R}^{2n}} m^2(Z) \tilde{R}(\delta_Y, a_Z)(X) |g_Z|^{1/2} dZ & \text{si } Y \in \mathcal{E} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

est uniformément confinée dans les $U_{Y,r}$, ce qui achève la démonstration du lemme 2.2.

3 - Localisation

Il s'agit de démontrer le théorème A qui n'est rien d'autre qu'une version locale du théorème 2.1. On va préalablement construire une paramétrix sur chaque compact de Ω .

Soit K un compact de Ω (on utilise les notations de l'introduction), on pose

$$(3.1) \quad A_K = \sum_{j=1}^q (\varphi_K P_j)(\varphi_K P_j^*) - \sum_{j=1}^n (1 - \tilde{\varphi}_K) \partial_j^2 (1 - \tilde{\varphi}_K),$$

où φ_K et $\tilde{\varphi}_K$ sont deux fonctions $C_0^\infty(\Omega)$ telles que $\tilde{\varphi}_K$ vaille identiquement 1 près de K et soit supportée à l'intérieur de l'ensemble où φ_K vaut 1.

L'opérateur A_K est un opérateur positif, globalement sous-elliptique avec perte d'une dérivée, donc il existe deux constantes c et C positives telles que

$$(3.2) \quad \|u\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C \|(A_K + c \text{ Id})u\|_{L^2}.$$

Le symbole principal $a_K + c$ de $A_K + c \text{ Id}$ est positif ; on peut lui appliquer le théorème 2.1 avec m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10). Donc il existe un symbole $p_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que

$$(3.3) \quad (a_K + c) \# p_K = p_K \# (a_K + c) = 1.$$

De (3.3) on obtient

$$\begin{aligned}
 (3.4) \quad u &= p_K^w A_K u + c p_K^w u \\
 &= p_K^w A_K u + c p_K^w (p_K^w A_K u + c p_K^w u) \\
 &= p_K^w A_K u + c (p_K^w)^2 A_K u + c^2 (p_K^w)^2 u,
 \end{aligned}$$

ainsi de suite, d'où pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$ un symbole b_j défini par

$$b_j = c^{j-1} p_K^{\#j} \in S(m_K^{-2j}, g_K).$$

Admettons un instant le lemme suivant :

Lemme 3.1.—

Soient g une métrique de Hörmander, M un poids admissible pour cette métrique, (b_j) une suite de symboles telle que $b_j \in S(M^{k_j}, g)$ où k_j est une suite strictement décroissante tendant vers $-\infty$ lorsque j tend vers $+\infty$. Alors il existe un symbole $b \in S(M^{k_0}, g)$ tel que $b - \sum_{j < N} b_j \in S(M^{k_N}, g)$.

Il en résultera l'existence d'un symbole $\tilde{b}_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que :

$$(3.5) \quad A_K \tilde{b}_K^W(x, D) - \text{Id} \text{ et } \tilde{b}_K^W A_K - \text{Id} \text{ opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega).$$

Le théorème 18.5.10 de [8] assure par ailleurs l'existence du symbole b'_K de $S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K^W = b'_K(x, D)$. Soit alors b_K défini par $b_K(x, \xi) = \varphi(x) b'_K(x, \xi)$, il est clair que

$$(3.6) \quad \Delta_H b_K(x, D) - \text{Id} \text{ et } b_K(x, D) \Delta_H - \text{Id} \text{ opèrent de } \mathcal{E}'_K \text{ dans } C_0^\infty(\Omega).$$

Considérons maintenant un recouvrement (Ω_j) localement fini (de Ω) tel que $K_j = \bar{\Omega}_j$ soit un compact de Ω . Soient $(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une partition de l'unité associée à ce recouvrement et $(\chi_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions $C_0^\infty(\Omega_j)$ telles que, pour tout j , χ_j vaille 1 près du support de φ_j . On pose $B = \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j b_{K_j}(x, D) \varphi_j$.

Il est évident que le symbole b de B appartient à $S_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}^{-1}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$. Reste à vérifier que $\Delta_H B - \text{Id}$ est un opérateur infiniment régularisant. On a :

$$(3.7) \quad \Delta_H B = \sum_{j \in \mathbb{N}} \chi_j \Delta_H B \varphi_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} (1 - \chi_j) \Delta_H B \varphi_j.$$

Le symbole de $\sum_j (1 - \chi_j) \Delta_H B \varphi_j$ appartient à $S^{-\infty}(\Omega \times \mathbf{R}^n)$, il est donc infiniment régularisant ; alors

$$\begin{aligned}
(3.8) \quad \Delta_H B &\equiv \sum_{j,k \in \mathbf{N}} \chi_j \Delta_H \chi_k b_{K_k}(x, D) \varphi_k \varphi_j \\
&\equiv \sum_{j,k \in \mathbf{N}} \chi_j \Delta_H b_{K_k}(x, D) \varphi_k \varphi_j \\
&\equiv \sum_{j,k \in \mathbf{N}} \chi_j \text{Id} \varphi_k \varphi_j \\
&\equiv \text{Id}
\end{aligned}$$

(où l'on a noté $A \equiv B$ si et seulement $A - B$ opère de $\mathcal{D}'(\Omega)$ dans $C^\infty(\Omega)$).

Les estimations (3) de l'introduction résultent immédiatement de l'unicité des paramétrixes $b_K(x, D)$ (3.6) modulo un opérateur infiniment régularisant.

Démontrons alors l'unicité annoncée, ce qui achèvera la démonstration du théorème A :

Pour tout compact K de Ω , $A \equiv B_{(K)}$ signifie $A - B$ opère de \mathcal{E}'_K dans C^∞ . Soient b_K et c_K deux paramétrixes vérifiant (3.6), alors

$$\begin{aligned}
b_K - c_K &\equiv b_K \Delta_H c_K - c_K \Delta_H b_K \\
&\equiv c_K - b_K,
\end{aligned}$$

d'où l'unicité.

Pour conclure, reste à démontrer le lemme 3.1 qui prouvera l'existence d'un symbole $b_K \in S(m_K^{-2}, g_K)$ tel que $b_K - \sum_{j < N} b_j \in S(m_K^{-2N}, g_K)$.

Démonstration du lemme 3.1

Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ égale à 0 dans un petit voisinage de l'origine, et à 1 pour $|x| \geq 1$. On pose $\tilde{b}_j = \chi(M/t_j) b_j$ où (t_j) est une suite de nombres réels > 0 vérifiant la condition (3.3). On se propose de démontrer que $b = \sum_{j \in \mathbf{N}} \tilde{b}_j$ répond à la question. t_j doit être choisi vérifiant la condition $\forall \alpha, \beta \in \mathbf{N}^n \quad |\alpha| + |\beta| \leq j$

$$(3.10) \quad |\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \tilde{b}_j(X)| \leq 2^{-j} M^{k_j-1}(X) < \xi >^{|\beta|} M^{-|\alpha|-|\beta|}(X)$$

Or

$$\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\chi(M(X)/t_j) b_j(X)) = \sum_{\substack{\alpha' \leq \alpha \\ \beta' \leq \beta \\ \alpha', \beta' \in \mathbb{N}^n}} C_{\alpha'}^{\alpha} C_{\beta'}^{\beta} \partial_{\xi}^{\alpha - \alpha'} \partial_x^{\beta - \beta'} (\chi(M(X)/t_j) \partial_{\xi}^{\alpha'} \partial_x^{\beta'} b_j(X)),$$

$$\begin{aligned} & \partial_{\xi}^{\alpha - \alpha'} \partial_x^{\beta - \beta'} (\chi(M(X)/t_j) = \\ & \sum_{q \geq 1} \sum_{\substack{\gamma_1 + \dots + \gamma_q = \alpha - \alpha' + \beta - \beta' \\ |\gamma_i| \geq 1 \\ \gamma_i \in \mathbb{N}^n}} t^{-q} \partial^{\gamma_1} M(X) \dots \partial^{\gamma_q} M(X) \chi^{(q)}(M(X)/t_j), \end{aligned}$$

alors tout d'abord

$$|\partial_{\xi}^{\alpha - \alpha'} \partial_x^{\beta - \beta'} (\chi(M(X)/t_j) \leq \text{Cte}_{\alpha, \beta} t_j^{-q} M^q(X) < \xi >^{|\beta - \beta'|} |M^{-|\alpha - \alpha'| - |\beta - \beta'|}(X)$$

puis

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (\chi(M(X)/t_j) b_j(X)) \leq \text{Cte}_{\alpha, \beta} M^{k_j - |\alpha| - |\beta|}(X) < \xi >^{|\beta|}$$

car $M \leq t_j$ sur le support de $\chi^{(q)}$

$$\begin{aligned} & \leq \text{Cte}_{\alpha, \beta} M^{k_j - 1} M^{k_j - k_j - 1 - |\alpha| - |\beta|} < \xi >^{|\beta|} \\ & \leq \text{Cte}_{\alpha, \beta} M^{k_j - 1} t^{k_j - k_j - 1} M^{-|\alpha| - |\beta|} < \xi >^{|\beta|} \end{aligned}$$

car $M \geq \frac{1}{2} t_j$ sur le support de $\chi(M(X)/t_j) p_j(X)$.

La condition (3.3) se trouve alors réalisée si $t^{k_j - k_j - 1} \leq \text{Cte} 2^{-j}$. Par ailleurs la somme $\sum_{j \in \mathbb{N}} \tilde{b}_j$ est localement finie, donc $b \in C^{\infty}$.

Et enfin pour tout triplet (α, β, ℓ) , on peut choisir N de telle sorte que $N \geq |\alpha| + |\beta|$, $k_{N-1} \leq k_{\ell}$, d'où

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (b - \sum_{j < N} \tilde{b}_j)| \leq M^{k_{\ell}}(X) < \xi >^{|\beta|} M^{-|\alpha| - |\beta|}(X)$$

$$b - \sum_{j \leq \ell} b_j = b - \sum_{j < N} \tilde{b}_j + \sum_{\ell+1 \leq j < N} \tilde{b}_j + \sum_{j \leq \ell} (b_j - \tilde{b}_j)$$

vérifie

$$|\partial_{\xi}^{\alpha} \partial_x^{\beta} (b - \sum_{j \leq \ell} b_j)| \leq \text{Cte}_{\alpha, \beta, \ell} M^{k_{\ell}}(X) < \xi >^{|\beta|} M^{-|\alpha| - |\beta|}$$

puisque $b_j \in S(M^{k_j - 1}, g)$ et que pour $j \leq \ell$, $b_j - \tilde{b}_j \in S(M^{k_{\ell}}, g)$.

4 - Inclusion dans les espaces L^p

On se propose de démontrer, dans le cas d'une somme de carrés de champs de vecteurs, le théorème 4.1 d'inclusion dans les espaces L^p . On utilisera les résultats de la section 4.6 de [4] que nous allons rappeler après avoir énoncé le théorème 4.1.

Théorème 4.1.—

On suppose que les opérateurs $P_j, 1 \leq j \leq q$, sont des champs de vecteurs à coefficients C^∞ . On note Ω_ℓ l'ouvert

$$(4.1) \quad \Omega_\ell = \{x \in \mathbf{R}^n ; \text{le système } P_1(x, \xi), \dots, P_q(x, \xi) \text{ est de rang } \ell \text{ en } x\}.$$

Soit $p > 2$; on pose

$$(4.2) \quad h_{s,p}(x) = \left(\int (1 + p_j^0(x, \xi)^2 + \langle \xi \rangle)^{-sp/(p-2)} d\xi \right)^{(p-2)/2p}.$$

Pour tout compact K de Ω , pour tous s, p, ℓ tels que $s > (n - \ell/2)(1 - 2/p)$, il existe $c > 0$ tels que l'on ait :

$$(4.3) \quad \|h_{s,p}^{-1}u\|_{L^p(\Omega_\ell \cap K)} \leq C \|u\|_{H(m_K^s)}$$

pour m_K et g_K définis par (1.9) et (1.10).

Démonstration

La métrique g_K est scindée c'est-à-dire qu'il existe des formes quadratiques définies positives $g_{1,X}$ et $g_{2,X}$ sur \mathbf{R}^n telles que

$$(4.4) \quad g_K(dx, d\xi) = g_{1,X}(dx) + g_{2,X}(d\xi).$$

On a alors le théorème suivant (théorème 4.7 de [4]) que l'on rappelle pour la commodité du lecteur :

Soient M un poids admissible pour g et $p \in]2, +\infty[$. On note Ω_p l'ensemble des $x \in \mathbf{R}^n$ tels que la quantité

$$h_p(x) = \|M^{-1}(x, \xi)\|_{L^{2p/(p-2)}(d\xi)}$$

soit finie.

Si la mesure de Ω_p est > 0 , alors l'application $u \rightarrow h_p^{-1}u|_{\Omega_p}$ définie sur $\mathcal{S}(\mathbf{R}^n)$ se prolonge en une application définie sur $H(M)$ vérifiant

$$\|h_p^{-1}u\|_{L^p(\Omega_p)} \leq \text{Cte} \|u\|_{H(M)}.$$

On observe alors qu'un changement de variable ramène, via le théorème 4.7 de [4] ci-dessus, à l'étude évidente de la convergence de l'intégrale

$$\int (1 + \xi_1^4 + \dots + \xi_\ell^4 + \xi_{\ell+1}^2 + \dots + \xi_n^2)^{-sp/(2(p-2))} d\xi.$$

Bibliographie :

- [1] R. Beals, Characterization of pseudodifferential operators and applications, *Duke Math. J.* 44 (1977), 45-57.
- [2] P. Bolley, J. Camus, J. Nourrigat, La condition de Hörmander-Kohn pour les opérateurs pseudo-différentiels, *Comm. in P.D.E.*, 7 (1982), 197-221.
- [3] J.-M. Bony et N. Lerner, Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur I, *Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 4e série t. 22*, 1989, p.377 à 433.
- [4] J.-M. Bony et J.-Y. Chemin, Espaces fonctionnels associés au calcul de Weyl-Hörmander, à paraître.
- [5] C.E. Cancelier et J.-Y. Chemin, Sous-ellipticité d'opérateurs intégral-différentiels vérifiant le principe du maximum, Preprint n°1016, octobre 1991, Ecole Polytechnique.
- [6] C.E. Cancelier, J.-Y. Chemin et C.-J. Xu, Calcul de Weyl et opérateurs sous-elliptiques, à paraître.
- [7] L. Hörmander, Hypoelliptic second order differential equations, *Acta Math.* 119 (1967), 147-171.
- [8] L. Hörmander, *The analysis of partial differential operators III*, Springer-Verlag (1985).
- [9] L. Rothschild and E.M. Stein, Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups, *Acta Math.* 137 (1977), 247-320.
- [10] C.-J. Xu, Opérateurs sous-elliptiques et régularité des solutions d'équations aux dérivées partielles non linéaires du second ordre en deux variables, *Comm. in P.D.E.*, 11 (1986), 1575-1603.
- [11] C.-J. Xu, Subelliptic variational problems, *Bull. Soc. Math. France*, 118 (1990) 147-159.