Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Tristan Rivière

# Applications harmoniques de $B^3$ dans $S^2$ partout discontinues

*Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)* (1991-1992), exp. n° 19, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A19_0>

*CENTRE*
*DE*
*MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

---

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

# APPLICATIONS HARMONIQUES DE $B^3$ DANS $S^2$ PARTOUT DISCONTINUES

**Tristan RIVIERE**

Exposé n° XIX

21 Avril 1992

## I - Introduction

Soit $\Omega$ un domaine borné régulier de $\mathbf{R}^n$ et $S^{m-1}$ la sphère unité de $\mathbf{R}^m$ . On considère l'espace de Sobolev

$$H^1(\Omega, S^{m-1}) = \{u \in H^1(\Omega, \mathbf{R}^m) \quad \text{tel que} \quad |u| = 1 \quad \text{presque partout}\}.$$

Soit $\varphi$ une application $C^\infty$ de $\partial\Omega$ dans $S^{m-1}$, on note

$$H^1_\varphi(\Omega, S^{m-1}) = \{u \in H^1(\Omega, S^{m-1}) \quad \text{tel que} \quad u = \varphi \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\}.$$

Pour $u \in H^1(\Omega, S^{m-1})$, $E(u)$ désigne l'énergie de Dirichlet de $u$

$$E(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx\,.$$

On appelle application faiblement harmonique de $\Omega$ dans $S^{m-1}$ toute application $u$ de $H^1(\Omega, S^{m-1})$ point critique de $E$ pour les variations dans la variété d'arrivée, c'est-à-dire précisément $u$ est faiblement harmonique si

$$\forall\, \xi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbf{R}^m) \quad \frac{d}{dt} E\left(\frac{u + t\zeta}{|u + t\xi|}\right)\Bigg|_{t=0} = 0$$

ce qui est équivalent au fait que $u$ vérifie l'équation d'Euler-Lagrange associée

$$\begin{cases} -\Delta u = u|\nabla u|^2 & \text{dans } \mathcal{D}'(\Omega) \\ \quad |u| = 1 & \text{presque partout} \end{cases}$$

l'interprétation géométrique de cette équation lorsque $u$ est régulière, est

$$u \quad \text{harmonique si et seulement si} \quad \Delta u \perp T_{S^{m-1}}\,.$$

Nous nous intéressons ici à la régularité ou l'absence de régularité de telles applications. Par Sing $u$ on désigne le plus petit fermé de $\overline{\Omega}$ sur le complément duquel $u$ est $C^\infty$.

En fait cet ensemble coïncide avec l'ensemble des points où $u$ n'est pas continue ; ceci est une conséquence directe d'un théortème de Hildebrandt, Kaul et Widman [9] qui affirme que toute application faiblement harmonique d'une boule de $\mathbf{R}^n$ à valeurs strictement dans un hemisphère de $S^{m-1}$ est analytique réelle.

L'étude de la majoration de l'ensemble singulier des applications faiblement harmoniques a suscité un intérêt particulier au cours de ces vingt dernières années, et des résultats ont été obtenus, notamment pour certaines sous-classes des applications faiblement harmoniques : on désigne généralement

1°) *Les applications minimisantes*, qui sont les applications minimisant l'énergie de Dirichlet, et donc faiblement harmoniques.

2°) *Les applications stationnaires*, qui sont les applications faiblement harmoniques, qui sont aussi points critiques pour des variations sur l'ensemble de départ, c'est-à-dire précisément

$u$ est stationnaire si $u$ est faiblement harmonique

et si

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega, \mathbf{R}^n) \quad \frac{d}{dt} E\left(u \circ [\mathrm{Id} + t\varphi]\right)|_{t=0} = 0.$$

**Remarque :** Les applications minimisantes sont évidemment stationnaires.

Nous rappelons dans le tableau ci-dessous les principaux résultats obtenus sur la majoration de Sing $u$ pour les différentes classes d'applications faiblement harmoniques. dim Sing $u$ désigne la dimension de Hausdorff de l'ensemble singulier de $u$ et $\mathcal{H}^k(\text{Sing } u)$ la valeur de la kième mesure de Hausdorff de cet ensemble. Les noms des auteurs de chacune des preuves sont indiqués en italique suivis des références.

| | Appl. minimisantes | Appl. stationnaires | Appl. faiblement harmon. |
|---|---|---|---|
| $n = 2$ | Sing $= \emptyset$ | Sing $= \emptyset$ | Sing $= \emptyset$ |
| | *Morrey*[10][11] | *Grüter*[6] *Schoen*[15] | *Hélein*[8] |
| $n \geq 3$ | $\dim \text{Sing} \leq n - 3$ | $\mathcal{H}^{n-2}(\text{Sing}) = 0$ | ? |
| | *Schoen* et *Uhlenbeck*[16] | *Evans*[4] | ? |

**Remarques :**

1°) Les résultats précédents restent valables si on remplace le domaine de départ par une variété Riemannienne avec bord de même dimension et la sphère d'arrivée par une variété Riemannienne sans bord, excepté le résultat de Evans qui est ouvert dans le cas général.

2°) En dimension 3, Schoen et Uhlenbeck prouvent en fait que l'ensemble singulier d'une application harmonique minimisante est constitué, lorsqu'il est non vide, de points isolés ; ce résultat est optimal : Brézis, Coron et Lieb prouvent en effet dans [3] que $\frac{X}{|X|}$ est harmonique minimisante.

Comme l'indique le tableau, aucun résultat général n'a été obtenu concernant une éventuelle majoration de l'ensemble singulier d'une application faiblement harmonique quelconque en dimension supérieure ou égale à 3.

Nous montrons ici l'existence, pour toute donnée au bord non constante, d'une application faiblement harmonique de $B^3$ dans $S^2$ dont l'ensemble singulier est la boule toute entière.

## II - Préliminaires

Les notions présentées ci-dessous sont principalement introduites dans [1], [3] et [5].

Soit $a$ un point de $\mathbf{R}^3$ et $u$ une application $C^\infty$ sur la boule de rayon $r$ et de centre $a$, excepté peut-être en $a$ et à valeurs dans $S^2$ ; on appelle degré de $u$ en $a$ le degré topologique de la restriction de $u$ à n'importe quelle sphère de centre $a$ incluse dans $B_r(a)$. (Il ne dépend pas de la sphère choisie : toutes ces restrictions de $u$ sont homotopiquement équivalentes).

Soient $(P_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $B^3$ (un même point pouvant être répété plusieurs fois) et soit $(N_i)_{1\leq i\leq n}$ une famille de points de $B^3$ ; on appelle connexion minimale entre les $(P_i)$ et les $(N_i)$ la valeur

$$\min_{\sigma\in\mathcal{S}_n}\left\{\sum_{i=1}^{n} d(P_i;N_{\sigma(i)})\right\}$$

où $\mathcal{S}_n$ est l'ensemble des permutations de $\{1,\ldots,n\}$.

Lorsque $(P_i)_{1\leq i\leq p}$ et $(N_i)_{1\leq i\leq n}$ sont deux familles de points de $B^3$ avec $p\neq n$ (on prend ici par exemple $n>p$), les points supplémentaires sont connectés au bord de $B^3$ et la connexion minimale entre les $(P_i)$ et les $(N_i)$ devient alors

$$\min_{\sigma\in\mathcal{I}_{pn}}\left\{\sum_{i=1}^{p} d(P_i;N_{\sigma(i)})+\sum_{k\notin\sigma(\mathbf{N}_p)} d(N_k;\partial B^3)\right\}$$

où $\mathcal{I}_{pn}$ est l'ensemble des injections de $\mathbf{N}_p=\{1,\ldots,p\}$ dans $\mathbf{N}_n$.

Les applications de $H^1(B^3,S^2)$ ayant un nombre fini de singularités vont nous être très utiles du fait, d'une part, de la simplicité de leur ensemble singulier et surtout, d'autre part, du fait de leur densité dans $H^1(B^3,S^2)$ démontrée dans [2] par F. Bethuel et X. Zheng.

On s'intéressera particulièrement à l'ensemble $R(B^3,S^2)$ des applications de $H^1(B^3,S^2)$ ayant un nombre fini de singularités de degré $\pm1$ pour lequel on a toujours $\overline{R}^{H^1}(B^3,S^2)=H^1(B^3,S^2)$.

Soit $u \in R(B^3, S^2)$, on note $L(u)$ la connexion minimale entre les singularités de degré +1 et ses singularités de degré -1.

Soit $\varphi \in C^\infty(\partial B^3, S^2)$, soient $u$ et $v$ dans $R_\varphi(B^3, S^2)$ on note $L(u,v)$ la connexion minimale entre les singularités de degré +1 de $u$ unies aux singularités de degré -1 de $v$ et les singularités de degré -1 de $u$ unies aux singularités de degré +1 de $v$.

Dans [1], F. Bethuel, H. Brézis et J-M. Coron étendent la notion de connexion minimale à toutes les applications de $H^1(B^3, S^2)$ et introduisent la notion d'énergie relaxée :

* $\forall u \in H^1(B^3, S^2)$ on note $F(u) = E(u) + 8\pi L(u)$ l'énergie relaxée de $u$.

* $\forall \varphi \in C^\infty(\partial B^3, S^2) \forall u \in H^1_\varphi(B^3, S^2)$ et $\forall v \in H^1_\varphi(B^3, S^2)$

on note $F_v(u) = E(u) + 8\pi L(u,v)$ l'énergie relaxée de $u$ relativement à $v$.

L'intérêt de ces énergies est multiple

a) $F(u)$ et $F_v(u)$ sont semi-continues inférieurement pour la topologie faible séquentielle $H^1$, ce qui permet facilement de conclure à l'existence d'applications minimisantes.

b) Les points critiques des énergies relaxées sont des applications faiblement harmoniques : on s'en convainc en remarquant que pour $u$ dans $R(B^3, S^2)$, pour tout $\xi \in C_c^\infty(B^3, \mathbf{R}^3)$ et pour tout $t$ suffisamment petit $u$ et $\frac{u+t\xi}{|u+t\xi|}$ ont même ensemble singulier avec les mêmes degrés , donc $L(u) = L(\frac{u+t\xi}{|u+t\xi|})$ ; on conclut en utilisant la densité de $R(B^3, S^2)$ dans $H^1(B^3, S^2)$.

c) Les minimum des énergies relaxées sont des applications faiblement harmoniques qui ne sont pas nécessairement minimisantes pour l'énergie de Dirichlet, ni même stationnaires (voir un exemple dans [12]).

Les applications faiblement harmoniques singulières que nous construisons dans la partie suivante vont être des applications minimisantes d'énergies relaxées. La raison principale qui nous a fait choisir de telles énergies peut s'énoncer approximativement de la manière suivante :

Les applications minimisantes de $F_v(u)$ à $v$ fixé "tendent" à réaliser $L(u,v) = 0$, c'est-à-dire à adopter les singularités de $v$. Dans le cas de la symétrie axiale lorsque $v$ a un nombre fini de singularité, et dans ce cas seulement, l'énoncé précédent a une formulation rigoureuse (voir [7]).

## III - Applications harmoniques de $B^3$ dans $S^2$ partout discontinues

### III - 1) Enoncé du théorème principal

**Théorème 1.**— *Soit $\varphi$ une application de $C^\infty(\partial B^3, S^2)$ non constante ; il existe $v \in H^1_\varphi(B^3, S^2)$ telle que pour toute application $u$ minimisante de $F_v(u) = E(u) + 8\pi L(u,v)$ Sing $u = \overline{B}^3$.*

### III - 2) Démonstration du théorème 1

a) *Notations*

On est amené à considérer le sous-ensemble de $R_\varphi(B^3; S^2)$ suivant :

$\mathcal{R}_\varphi(B^3; S^2) = \{u \in R_\varphi(B^3; S^2)$ tel que $u$ admette une unique connexion minimale$\}$

pour $u$ dans $\mathcal{R}_\varphi(B^3; S^2)$ les singularités de $u$ sont reliées entre elles par la connexion minimale de façon univoque ; un couple de singularités ainsi relié constitue ce qu'on appelle désormais un dipôle de $u$, les autres dipôles de $u$ sont les couples constitués des points reliés au point de $\partial B^3$ qui leur est le plus proche.

Soit $u \in \mathcal{R}_\varphi(B^3; S^2)$ et $v \in R_\varphi(B^3; S^2)$ on appelle chaîne mixte $u - v$ une suite de points de $B^3$ $C_{u-v} = \{a; a_1; b_1; \cdots a_k, b_k, b\}$ où $(a_i; b_i)$ sont des dipôles de $u$ avec deg $a_i = -$deg $b_i = 1$ et $a$ et $b$ sont des singularités de $v$ avec deg $a = -$deg $b = 1$.

La longueur d'une chaîne mixte $C_{uv}$ est

$$L(C_{uv}) = |a - a_1| + \sum_{i=1}^{k-1} |b_i - a_{i+1}| + |b_k - b|.$$

On se donne $x_n \in B^3$ une suite de points dense dans $B^3$ et $\varphi_n$ une suite de réels strictement positifs tels que $\lim\limits_{n \to +\infty} \rho_n = 0$ et $B_{\rho_n}(x_n) \subset B^3$. On note alors $B_n = B_{\rho_n}(x_n)$.

b) *Construction d'une application $v$ de $H^1_\varphi(B^3, S^2)$ solution du* théorème 1.

Nous démontrons dans [14] le lemme suivant.

**Lemme 1.**— *Il existe $v_n \in \mathcal{R}_\varphi(B^3, S^2)$ et $v \in H^1_\varphi(B^3, S^2)$ vérifiant les hypothèses suivantes*

*a) $v_n \to v$ dans $H^1$ fort*

*b) Sing $v_{n+1} = Sing v_n \cup \delta_{n+1}$ où $\delta_{n+1}$ est un dipôle inclus dans $B_{n+1}$*

*c) $\forall\, u$ minimisant $F_v$ dans $H^1_\varphi(B^3, S^2)$ $\forall\, n \in \mathbf{N}\, \forall\, \delta$ dipôle de $v_n$*

$$L(u; v_n) < L(u; \tilde{v}_n^\delta) + L(\delta)$$

*où $L(\delta)$ désigne la longueur du dipôle $\delta$ et $\tilde{v}_n^\delta$ n'importe quelle application de $\mathcal{R}_\varphi(B^3, S^2)$ ayant le même ensemble singulier que $v_n$ excepté $\delta$.*

La démonstration de ce lemme repose essentiellement sur un résultat annoncé dans [13] sous le nom "d'insertion stricte du dipôle" :

**Théorème 2.**— *Soit $u \in C^\infty(\overline{B_\rho(x)}; S^2)$ tel que $\nabla u(x) \neq 0$, alors pour tout $r < \rho$ il existe $(p; n)$ bipoint de $B_r(x)$ de milieu $x$ et $\tilde{u} \in H^1(B_\rho(x), S^2)$ tels que*

*a) $\tilde{u} = u\,(\overline{B_\rho(x)}/B_r(x))$*

*b) Sing $\tilde{u} = \{p, n\}$ avec $deg(\tilde{u}, p) = -\ deg(\tilde{u}, n) = 1$*

*c) $E(\tilde{u}) < E(u) + 8\pi|p - n|$*

Ce théorème démontré dans [14] avait déjà été prouvé dans [7] par Hardt Lin et Poon dans le cas de la symétrie axiale ; il permettait alors de montrer que l'ensemble singulier des applications minimisantes de $F_v$ coïncide avec l'ensemble singulier de $v$ dans certains cas particuliers. Ce théorème joue aussi un rôle central dans [13] pour prouver l'existence d'une infinité d'applications harmoniques de $B^3$ dans $S^2$ pour une condition au bord fixée non constante.

c) Lemme 1 $\Longrightarrow$ Théorème 1

Soit $v_n$ une solution du lemme 1 et soit $u$ une application minimisante quelconque de $F_v$.

Montrons que Sing $u = \overline{B^3}$. D'après les remarques en introduction, Sing $u$ est un fermé de $\overline{B^3}$ et coïncide avec l'ensemble où $u$ n'est pas $C^\infty$ ; supposons que $u$ soit $C^\infty$ sur $B_r(x) \subset B^3$. D'après le résultat de densité énoncé plus haut, il existe $u_p \in R_\varphi(B^3, S^2)$ tel que $u = u_p$ sur $B_r(x)$ et $u_p \to u$ dans $H^1$ fort.

Les connexions sont continues pour la topologie forte $H^1$ donc, $\forall\, n\, \exists\, p_n$ tel que

$\forall\, \delta$ dipôle de $v_n$ $\quad L(u_{p_n}; v_n) < L(u_{p_n}; \tilde{v^\delta}_n) + L(\delta)$ avec $p_n \to +\infty$.

L'inégalité stricte précédente nous dit que tout dipôle de $v_n$ ne peut être connecté sur lui-même dans toute connexion minimale entre $u_{p_n}$ et $v_n$ ; d'autre part, le fait que $v_n$ soit dans $\mathcal{R}_\varphi$ empêche aussi qu'une partie des dipôles de $v_n$ soient connectés entre eux, en une chaîne fermée, sans être connectés à aucune singularité de $u_{p_n}$. Les remarques précédentes nous assurent que, dans toute connexion minimale entre $u_{p_n}$ et $v_n$, les singularités de $v_n$ sont reliées par des chaînes mixtes $v_n - u_{p_n}$ à des singularités de $u_{p_n}$. Il est aisé alors de vérifier que la nécessité de connecter les singularités de $v_n$, de plus en plus nombreuses dans $B_r(x)$, aux singularités de $u_{p_n}$ à l'extérieur de $B_r(x)$, sous forme de chaînes mixtes, impose $L(u_{p_n}, v_n) \to +\infty$, or $u_{p_n}$ et $v_n$ convergent fortement dans $H^1$, ce qui contredit la continuité forte $H^1 \times H^1$ de $L$.

## Références


[1] F. Bethuel, H. Brezis and J-M. Coron, *Relaxed energies for harmonic maps.* in *Variationel Problems* (H. Berestycki, J-M. Coron, I. Ekeland, eds.), Birkhauser (1990).

[2] F. Bethuel and X. Zheng, *Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces.* J. Funct. Analysis, **80** (1988), 60-75.

[3] H. Brezis, J-M. Coron and E. Lieb, *Harmonic maps with defects.* Comm. Math. Phys. **107** (1986), 649-705.

[4] L.C. Evans, *Partial regularity for stationary harmonic maps into the sphere.* Arch. Rationa. Mech. Anal. **116** (1991), 101-113.

[5] M. Giaquinta, G. Modica and J. Soucek, *The Dirichlet energy of mappings with values into the sphere.* Manuscripta Math., **65** (1989), 489-507.

[6] M. Grüter, *Regularity of weak h-surfaces.* J. Reine Angew. Math., **65** (1981), 1-15.

[7] R. Hardt, F.H. Lin and C. Poon, *Axially symmetric harmonic maps minimizing a relaxed energy.* à paraître, 1991.

[8] F. Hélein, *Régularité des applications harmoniques entre une surface et une sphère.* Note aux C.R.A.S., **311** (1990), 519-525.

[9] S. Hildebrandt, H. Kaul and K.O. Widman, *An existence theorem for harmonic mappings of Riemannian manifolds.* Acta Mathematica **138** (1977), 1-15.

[10] C.B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations.* springer-Verlag, New-York (1977).

[11] C.B. Morrey, *The problem of plateau on a Riemannian manifold.* Ann. of Math., **49** (1948), 807-851.

[12] T. Rivière, Harmonic maps from $B^3$ into $S^2$ having a line of singularities. Note aux C.R.A.S. **101** (1991), 583-587.

[13] T. Rivière, *Construction d'un dipôle.* à paraître, 1992.

[14] T. Rivière, *Everywhere discontinuous harmonic maps from $B^3$ into $S^2$.* to appear, 1992.

[15] R. Schoen, *Analytic aspect of the harmonic maps problem.* Sci. Res. Inst. publ. (Springer, Berlin) **2** (1984), 321-358.

[16] R. Schoen and K. Uhlenbeck, *A regularity theory for harmonic maps.* J. of Diff. Geom. **17** (1982), 307-335.

Tristan RIVIERE
Centre de Mathématiques
et leurs Applications
Ecole Normale Supérieure
61, Av. du Président Wilson
F-94235 CACHAN Cedex