Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

Yuri V. Egorov

Sur des estimations des valeurs propres d'opérateurs elliptiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. nº 16, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A16_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

SUR DES ESTIMATIONS DES VALEURS PROPRES D'OPERATEURS ELLIPTIQUES

Yuri V. EGOROV

Exposé n° XVI

19 Mai 1992

Sur des estimations des valeurs propres d'opérateurs elliptiques

Yuri V. Egorov

Nous continuons ici l'étude du spectre négatif d'opérateur elliptique d'ordre $2m$, qui a été initiée dans nos travaux avec le Prof. V.A. Kondratiev [1]-[4].

1. Evaluations du nombre de valeurs propres négatives.

Soit Ω un domaine de $\mathbf{R}^n$ et L un opérateur elliptique défini sur Ω, d'ordre $2m$, symétrique et positif, si on l'a pris avec les conditions de Dirichlet nulles

$$Lu = \sum_{|\alpha|\leq m, |\beta|\leq m} D^\alpha(a_{\alpha\beta}(x)D^\beta u(x)),$$

$$a_{\alpha\beta}(x) = \overline{a_{\beta\alpha}}(x),$$

$$\int Lu \cdot \overline{u} dx \geq a_0 \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u|^2 dx, \quad u \in C_0^\infty(\Omega), \quad a_0 = const > 0.$$

L'exemple le plus important est l'opérateur $-\Delta$. Le spectre de L se trouve sur la partie positive de l'axe réel.

Soit $H = L - V(x)$ l'opérateur de Schrödinger, la fonction V étant réelle positive. Alors le spectre de H est situé sur l'axe réel, mais il peut différer de celui de L. Par exemple, il peut devenir $\mathbf{R}$ tout entier, mais dans des cas réguliers, en particulier, lorsque la fonction V est bornée avec support compact, il peut comprendre seulement un nombre fini de valeurs propres, situées sur le demi-axe négatif. Le problème principal ici est d'évaluer leur nombre N. C'est un problème très important en mécanique quantique et c'est aussi un problème intéressant en théorie spectrale des opérateurs differentiels.

Un des nos résultats centraux de [4] est le suivant

Théorème 1. *Soit N_α le nombre de valeurs propres λ de l'opérateur H, telles que $\lambda < -\alpha$, $\alpha \geq 0$. Soit $V_\alpha(x) = max(V(x) - \alpha, 0)$ et soit x_0 un point arbitraire de $\mathbf{R}^n$.*

Si $n > 2m$, alors pour $p \geq n/2m$

$$N_\alpha \leq C_{n,m,p} \int V_\alpha(x)^p |x - x_0|^{2mp-n} dx.$$

Si $n < 2m$ et n est impair, alors pour $p > 1$

$$N_\alpha \leq C_{n,m,p}(\int V_\alpha(x)^p |x - x_0|^{2mp-n} dx + 1).$$

Si $n \leq 2m$ et n est pair, alors pour $p > 1$

$$N_\alpha \leq C_{n,m,p}(\int V_\alpha(x)^p |x - x_0|^{2mp-n} (1 + |ln|x - x_0||)^{2p-1} dx + 1).$$

Pour démontrer cela nous avons utilisé un lemme de Rosenblum sur une partition spéciale du cube de dimension n. Maintenant je voudrais donner une autre démonstration, basée sur la construction du travail de P. Li – S.T. Yau [8]. (Voir aussi [10] - [11].) Ce procédé permet de trouver de meilleurs valeurs des constantes. Elle donne aussi des évaluations des valeurs propres pour le problème suivant:

$$Lu = \mu V(x) u \quad dans \quad \Omega, \tag{1}$$

$$u = \partial u/\partial \nu = \ldots = \partial^{m-1} u/\partial \nu^{m-1} = 0 \quad sur \quad \partial\Omega. \tag{2}$$

Démonstration. Soit le domaine Ω borné avec frontière réguliere. (Plus tard nous pouvons facilement éliminer cette hypothèse utilisant un passage à la limite). Soit $\{u_i\}_{i \in N}$ l'ensemble des fonctions propres du problème (1)-(2), satisfaisant l'équation

$$Lu_i = \mu_i V(x) u_i \quad in \quad \Omega, \; i = 1, 2, \ldots$$

L'orthonormalité signifie ici que

$$\int_\Omega V(y) u_i(y) u_j(y) dy = \delta_{ij}.$$

Soit

$$H(t,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\mu_i t} u_i(x) u_i(y), \quad H_1(t,x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} e^{-\mu_i t} u_i(x) u_i(y),$$

$$h_1(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\mu_i} e^{-2\mu_i t}, \quad h_0(t) = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-2\mu_i t} = -\frac{1}{2} h_1'(t).$$

C'est évident que la fonction $H_1(t,x,y)$ satisfait les conditions de Dirichlet nulles en les variables x et y et

$$h_1(t) = \int_\Omega \int_\Omega H(t,x,y) H_1(t,x,y) V(x) V(y) dx dy.$$

Nous séparons trois facteurs dans l'expression sous le signe intégral et appliquerons l'inégalité de Hölder avec les exposants p, $p/(p-2)$ et p:

$$h_1(t) = \int_\Omega V(x) \int_\Omega [H_1(t,x,y)|y-x_0|^{-n/p+(n-2m)/2}]$$
$$\times [H(t,x,y)^{(p-2)/p} V(y)^{(p-1)/p} |y-x_0|^{n/p-(n-2m)/2}]$$
$$\times [H(t,x,y)^{2/p} V(y)^{1/p}] dx dy$$
$$\leq \int_\Omega V(x) [\int_\Omega H_1(t,x,y)^p |y-x_0|^{-n+p(n-2m)/2}\, dy]^{1/p}$$
$$\times [\int_\Omega H(t,x,y) V(y)^{(p-1)/(p-2)} |y-x_0|^{n/(p-2)-(n-2m)p)/2(p-2)}\, dy]^{(p-2)/p}$$
$$\times [\int_\Omega H^2(t,x,y) V(y) d\, y]^{1/p} dx.$$

Maintenant nous appliquerons dans l'intégrale par rapport à variable x l'inégalité de Hölder avec les exposants 2, $2p/(p-2)$ et p. Nous avons

$$h_1(t) \leq [\int_\Omega V(x) (\int_\Omega H_1(t,x,y)^p |y-x_0|^{-n+p(n-2m)/2} dy)^{2/p} dx]^{1/2}$$
$$\times [\int_\Omega V(x) (\int_\Omega H(t,x,y) V(y)^{(p-1)/(p-2)} |y-x_0|^{-n/2+mp/(p-2)} dy)^2 dx]^{(p-2)/2p}$$
$$\times [\int_\Omega V(x) \int_\Omega H^2(t,x,y) V(y) dy dx]^{1/p}.$$

Considérons séparement les trois facteurs obtenus. Le premier facteur peut être évalué à l'aide de l'inégalité de Sobolev:

$$(\int |u(y)|^p |y-x_0|^{-n+p(n-2m)/2} dy)^{2/p} \leq K^2_{m,n,p} \int \sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha_y u|^2 dy, \tag{3}$$

qui est vraie pour $n > 2m, 2 \leq p \leq 2n/(n-2m)$ quelles que soient les fonctions $u \in H^m(\mathbf{R}^n)$. Si $n \leq 2m$ et n est impair, alors l'inégalité (3) est valide sous les conditions suivantes:

$$u(x_0) = 0, D^\alpha u(x_0) = 0 \quad \textit{pour} \quad |\alpha| < m - n/2. \tag{4}$$

Par exemple, si $\Omega \neq \mathbf{R}^n$, on peut prendre pour x_0 un des points frontières. Alors

$$\int_\Omega V(x) (\int_\Omega H_1(t,x,y)^p |y-x_0|^{-n+p(n-2m)/2} dy)^{2/p} dx$$

$$\leq K^2_{m,n,p}\int_\Omega V(x)\int_\Omega \sum_{|\alpha|=m}|D^\alpha_y H_1|^2 dydx$$
$$\leq K^2_{m,n,p}a_0^{-1}\int_\Omega V(x)\int_\Omega H_1(t,x,y)LH_1(t,x,y)dydx$$
$$= -K^2_{m,n,p}a_0^{-1}\int_\Omega V(x)\int_\Omega V(y)H_1(t,x,y)\frac{\partial H_1(t,x,y)}{\partial t}dydx$$
$$= K^2_{m,n,p}a_0^{-1}\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\mu_i}e^{-2\mu_i t} = K^2_{m,n,p}a_0^{-1}h_1(t).$$

Ici nous avons utilisé le fait que la fonction $H_1(t,x,y)$ satisfait l'équation

$$V(y)\partial H_1(t,x,y)/\partial t = -LH_1(t,x,y).$$

Pour étudier le second membre, nous posons

$$\beta_i = \int V(y)^{(p-1)/(p-2)}|y-x_0|^{-n/2+mp/(p-2)}u_i(y)dy.$$

C'est le coefficient de Fourier de la fonction

$$w(y) = V(y)^{1/(p-2)}|y-x_0|^{-n/2+mp/(p-2)}.$$

Nous avons

$$\int_\Omega V(x)(\int_\Omega H(t,x,y)V(y)^{(p-1)/(p-2)}|y-x_0|^{-n/2+mp/(p-2)}dy)^2dx$$
$$= \int_\Omega V(x)(\int_\Omega H(t,x,y)V(y)w(y)dy)^2dx$$
$$= \int_\Omega V(x)(\int_\Omega \sum_{i=1}^{\infty}e^{-\mu_i t}u_i(x)u_i(y)w(y)V(y)dy)^2dx$$
$$= \int_\Omega V(x)(\sum_{i=1}^{\infty}e^{-\mu_i t}\beta_i u_i(x))^2dx = \sum_{i=1}^{\infty}e^{-2\mu_i t}\beta_i^2 \leq \sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^2$$
$$= \int_\Omega V(y)|w(y)|^2dy = \int_\Omega V(y)^{p/(p-2)}|y-x_0|^{-n+2mp/(p-2)}dy.$$

Soit $q = p/(p-2)$ et

$$I_q = \int_\Omega V(y)^q|y-x_0|^{-n+2mq}dy.$$

Enfin, le dernier facteur est la puissance $1/p$ de l'intégrale

$$\int_\Omega\int_\Omega H^2(t,x,y)V(x)V(y)dxdy = \sum_{i=1}^{\infty}e^{-2\mu_i t} = h_0(t).$$

C'est pourquoi

$$h_1(t) \leq K_{m,n,p} a_0^{-1/2} h_1(t)^{1/2} I_q^{(p-2)/2p} h_0(t)^{1/p}.$$

ou

$$h_1(t) \leq K_{m,n,p}^2 a_0^{-1} I_q^{(p-2)/p} h_0(t)^{2/p}.$$

Puisque $h_0(t) = -h_1'(t)/2$, nous avons obtenu une inégalité differentielle. En intégrant celle-ci, nous obtenons l'évaluation suivante:

$$h_1(t) \leq (p-2)^{2/(2-p)} K_{m,n,p}^{2p/(p-2)} a_0^{-p/(p-2)} I_q t^{2/(2-p)},$$

et parce que $h_1(t) \geq \ k\mu_k^{-1} e^{-2\mu_k t}$, choisissant $t = (p-2)^{-1}\mu_k^{-1}$, nous obtenons que

$$\mu_k^{2/(p-2)} I_q \geq a_0^{p/(p-2)} K_{m,n,p}^{-2p/(p-2)} \frac{k}{\mu_k} e^{-2/(p-2)},$$

i.e.

$$\mu_k \geq a_0 e^{-2/p} K_{m,n,p}^{-2} \left(\frac{k}{I_q}\right)^{(p-2)/p}. \tag{5}$$

Pour terminer la démonstration du Théorème 1 il suffit de remarquer que le nombre N_0 de valeurs propres négatives de l'opérateur H coïncide avec le nombre de valeurs propres du problème (1)-(2), qui sont inférieures à 1. Si μ_k est la plus grande d'entre elles, alors il s'ensuit de (5) que

$$N_0 \leq c_{m,n,q} I_q. \tag{6}$$

Si $n \leq 2m$ et n est pair, alors l'inégalité (3) sous les conditions (4) est remplacée par l'inégalité

$$\Big(\int |u(y)|^{2p}|y-x_0|^{-n+p(n-2m)}(1+|ln|y-x_0||)^{-p-1-2mp}dy\Big)^{2/p} \leq K^2 \int \sum_{|\alpha|=m} |D_y^\alpha u|^2 dy,$$

où $K = K_{m,n,p}$ et l'intégrale I_q est remplacée par l'intégrale

$$I_q = \int_\Omega V(y)^q |y-x_0|^{-n+2mq}(1+|ln|y-x_0||)^{2q-1}dy.$$

Si $n \leq 2m$ et x_0 n'est pas un point frontière, à la place de l'inégalité (6) on obtient l'inégalité

$$N_0 \leq c_{m,n,q} I_q + \gamma_{m,n},$$

où $\gamma_{m,n}$ est le nombre des conditions supplémentaires (4).

La démonstration est finie.

Remarque. *Adaptant la méthode de notre travail* [4] , *on peut remplacer la fonction* $V_\alpha(x)$ *du théorème 1 par la fonction* $(V(x) - C_{m,n}|x - x_0|^{-2m})_\alpha$, *où la constante* $C_{m,n}$ *ne dépend que de* m *et* n.

Appliquant les méthodes des travaux de Fefferman [5] et de Kerman, Sawyer [6], on peut démontrer le résultat suivant. Etant donné un cube dans $\mathbf{R}^n$, son double sera le cube de même centre et d'arête double.

Théorème 2. *Soit* $n > 2m$. *Il existe des constantes positives* c *et* C, *dépendant de* n *seulement, telles que les propositions suivantes sont vraies:*

(A) Soit $\alpha \geq 0$ *et* $Q_1, ..., Q_N$ *un ensemble de cubes ayant leur arêtes* $\leq \alpha^{-1/2m}$, *tels que leur doubles sont disjoints et* $F(V, Q_j) \geq C$, *où*

$$F(V,Q) = \frac{\int_Q \int_Q V(x)V(y)|x-y|^{2m-n}dxdy}{\int_Q V(x)dx}.$$

Alors l'opérateur H *a au moins* N *valeurs propres , qui sont inférieures à* $-\alpha$.

(B) Inversement, soit $\alpha \geq 0$ *et supposons que* H *ait au moins* CN *valeurs propres, qui sont* $\leq -\alpha$. *Alors il existe des cubes* $Q_1, ..., Q_N$ *de dimensions inférieures ou égales à* $\alpha^{-1/2m}$, *qui sont disjoints et pour lesquels* $F(V, Q_j) \geq c$, $j = 1, ..., N$.

2. Evaluations de la première valeur propre négative

Soit L et H les mêmes opérateurs qu'au §1. Considérons des estimations de la première valeur propre négative, qui est de grande importance pour beaucoup de problèmes, théoriques et appliqués.

Dans le travail [5], Fefferman a obtenu l'estimation suivante pour la première valeur propre négative de l'opérateur $H_0 = -\Delta - V(x)$:

$$c \cdot sup_{x,\delta}\{Av_{B(x,\delta)}V - C\delta^{-2}\} \leq -\lambda_1 \leq C \cdot sup_{x,\delta}\{(Av_{B(x,\delta)}V^p)^{1/p} - c\delta^{-2}\},$$

où $B(x, \delta)$ est la boule de rayon δ centrée au point x et

$$Av_{B(x,\delta)}f(x) = \delta^{-n}\int_{B(x,\delta)} f(x)dx,$$

$1 < p < \infty$, les constantes c et C ne dependant que de n et p.

Cette estimation à été ensuite ameliorée par Schechter [7] qu'a obtenu le résultat:

$$sup_{x,\delta}\{c \cdot Av_{B(x,\delta)}V - \delta^{-2}\} \leq -\lambda_1 \leq sup_{x,\delta}\{C \cdot (Av_{B(x,\delta)}V^p)^{1/p} - \delta^{-2}\}.$$

Kerman et Sawyer ont obtenu dans le travail [6] l'estimation suivante:

$$sup_Q\{q^{-2} : F(V,Q) \geq C_1\} \leq -\lambda_1 \leq sup_Q\{q^{-2} : F(V,Q) \geq C_2\},$$

où

$$F(V,Q) = \int_Q \int_Q V(x)V(y)|x-y|^{2-n}dxdy / \int_Q V(x)dx$$

et Q est un cube dont la longueur de l'arête est q. (Tout cela concerne le cas $m=1,\ L=-\Delta,\ n\geq 3$ seulement.)

Maintenant nous pouvons démontrer le théorème suivant pour toutes valeurs de m et n, quel est assez élémentaire.

Théorème 3. *Soit $m \geq 1$, $n > 2m$ et λ_1 la première valeur propre négative de l'opérateur H. Alors*

$$sup_Q\{\delta^{-2m} :\ Av_Q(V(x)) \geq C_1\delta^{-2m}\} \leq -\lambda_1$$

$$\leq sup_Q\{a_{m,n,p}\delta^{-2m} :\ \int_Q V(x)^p|x-x_0|^{2mp-n}dx \geq c_p\},$$

où $p \geq n/2m$, Q est le cube centré au point x_0 et dont la longueur de l'arête est δ.

Démonstration. Il s'ensuit du principe variationnel que

$$-\lambda_1 = \sup_u \frac{\int V(x)|u(x)|^2dx - (Lu,u)}{\int |u(x)|^2dx}.$$

C'est pourquoi $-\lambda_1 \geq C$, si C est une constante, telle que

$$\int V(x)|u_0(x)|^2dx = (Lu_0,u_0) + C\int |u_0(x)|^2dx$$

pour une fonction quelconque $u_0 \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$.

Soit Q' un cube de même centre que Q, et de longueur d'arête 2δ et soit $u_0(x)$ une fonction de $C_0^\infty(Q')$, égale à 1 dans Q. Alors

$$\int V(x)|u_0(x)|^2dx \geq C_1\delta^{n-2m},\ (Lu_0,u_0) \leq C_2\delta^{n-2m}$$

et

$$\int |u_0(x)|^2dx \leq C_3\delta^n.$$

Les constantes C_2 et C_3 sont indépendantes de δ et nous pouvons prendre C_1 égale à $C_2 + C_3$. Par conséquent, nous avons

$$-\lambda_1 \geq (C_1 - C_2)/C_3\delta^{-2m} = \delta^{-2m}.$$

Donc, la minoration de $-\lambda_1$ est démontrée.

D'autre part, le principe variationnel donne l'égalité

$$-\lambda_1 = inf\{\, \alpha > 0 : \int V(x)|u(x)|^2 dx \le (Lu,u) + \alpha \int |u(x)|^2 dx,\ u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)\}.$$

Par conséquent, $-\lambda_1 \le C_4$, si C_4 est une constante telle que

$$\int V(x)|u(x)|^2 dx \le (Lu,u) + C_4 \int |u(x)|^2 dx,\ \forall u \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n).$$

Soit $p \ge n/2m$ et

$$\mu = sup_Q\{\delta^{-2m} : \int_Q V(x)^p |x - x_0|^{2pm-n} dx \ge c_p\},$$

où Q est un cube de longueur d'arête δ et de centre le point x_0. C'est évident qu'en effet le signe $\ge$ dans la définition de μ peut être substitué par le signe d'égalité. Partionnons l'espace $\mathbf{R}^n$ en des cubes Q_j d'intérieurs disjoints et de longueur d'arête $\mu^{-1/2m}$. De la définition du nombre μ il résulte que

$$\int_{Q_j} V(x)^p |x - x_j|^{2pm-n} dx \le c_p,$$

où x_j est le centre du cube Q_j. Nous avons

$$\int V(x)|u(x)|^2 dx = \sum_j \int_{Q_j} V(x)|u(x)|^2 dx$$

$$\le \sum_j (\int_{Q_j} V(x)^p |x - x_j|^{2pm-n} dx)^{1/p} (\int_{Q_j} |u(x)|^{2p'} |x - x_j|^{-n+p'(n-2m)} dx)^{1/p'}$$

$$\le c_p^{1/p} \sum_j (\int_{Q_j} |u(x)|^{2p'} |x - x_j|^{-n+p'(n-2m)} dx)^{1/p'}.$$

Ici $p' = p/(p-1) \le n/(n-2m)$. Si Q_0 est le cube unité centré à l'origine, alors il existe une constante a_p telle que

$$(\int_{Q_0} |u(y)|^{2p'} |y|^{-n+p'(n-2m)} dy)^{1/p'} \le a_p \int_{Q_0} (\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(y)|^2 + |u(y)|^2) dy.$$

Après la substitution $x = x_j + \delta y$ nous obtenons l'inégalité

$$(\int_{Q_j} |u(x)|^{2p'} |x - x_j|^{-n+p'(n-2m)} dx)^{1/p'} \le a_p \int_{Q_j} (\sum_{|\alpha|=m} |D^\alpha u(x)|^2 + \delta^{-2m} |u(x)|^2) dx,$$

qui est valide pour toutes $u \in H_m(Q_j)$. Donc si $c_p^{1/p} = a_p^{-1} a_0$, alors

$$\int V(x)|u(x)|^2 dx \le (Lu,u) + a_p \delta^{-2m} \int |u(x)|^2 dx, u \in C_0^\infty(R^n).$$

Par conséquent, nous avons démontré que $-\lambda_1 \leq a_p \delta^{-2m}$. La démonstration est finie.

Conséquence. *Si* $V(x) \leq b_{m,n}|x-x_0|^{-2m}$ *et* $n > 2m$, *alors le spectre négatif de* H *est vide.*

Il est intéressant d'obtenir des estimations semblables dans le cas $n \leq 2m$. Il se trouve que le théorème suivant est vrai.

Théorème 4. *Soit* $m \geq 1$, *et* λ_1 *la première valeur propre négative de l'opérateur* H. *Alors*

$$-\lambda_1 \geq sup_Q\{\delta^{-2m} : Av_Q(V(x)|x-x_0|^{\alpha}) \geq C_{\alpha,m,n}\delta^{\alpha-2m}\},$$

où $\alpha > 2m-n$, Q *est un cube, centré au point* x_0 *et de longueur d'arête* δ.

La démonstration de ce théorème est assez élémentaire et analogue à celle du théorème 3.

Les raisonnements semblables permettent la généralisation suivante de nos résultats de [2].

Soit $V(x)$ un potentiel positif tel que

$$\int V(x)^p|x-x_0|^{2mp-n}dx < \infty, \quad n > 2m, \quad p \geq n/2m.$$

Soit Q un cube tel que

$$\int_{\mathbf{R}^n \setminus Q} V(x)^p|x-x_0|^{2mp-n}dx \leq a_p.$$

Utilisant des sections de Q par des plans, parallèles aux faces de Q et passant au centre de Q, nous pouvons diviser Q en 2^n petits cubes $Q_1, \ldots, Q_{2^n}$ et choisir parmi eux ceux pour lesquels

$$\int_{Q_j} V(x)^p|x-x_0|^{2mp-n}dx \leq a_p.$$

Après cela nous pouvons partager ces cubes de la même manière, choisir les plus petits cubes, pour lesquels les valeurs des intégrales sont strictement plus grandes que a_p; nous pouvons les partager de nouveau et arrêter ce procédé seulement quand les valeurs de toutes les intégrales sur les cubes obtenus sont $\leq a_p$. Soit K_α le nombre de cubes ainsi obtenus, dont la longeur d'arête est $\leq \alpha^{-1/2m}$.

Théorème 5. *Soit* $\alpha \geq 0, n > 2m$, $p \geq n/2m$, $\int V(x)^p|x-x_0|^{2mp-n}dx < \infty$, N_α *le nombre des valeurs propres de l'opérateur* H, *qui sont strictement inférieures à* $-\alpha$. *Alors*

$$N_\alpha \leq CK_\alpha.$$

Soit q_j la longueur de l'arête du cube Q_j. Alors

$$\sum_{\lambda_j \leq -\alpha} |\lambda_j| \leq C \sum_{q_k \leq \alpha^{-1/2m}} q_k^{-2m},$$

où la constante C ne dépend que de m, n, p.

3. Estimations de valeurs propres pour le problème de Sturm-Liouville

Considérons le problème de Sturm-Liouville suivant:

$$(p(x)y')' + \lambda q(x)y = 0, \quad y(0) = 0, \ y(1) = 0,$$

où

$$p(x) \geq 0, \ p(x) \in C[0,1], \int_0^1 p(x)^\alpha dx < \infty.$$

$$q(x) \geq 0, \ q(x) \in C[0,1], \int_0^1 q(x)^\beta dx < \infty,$$

α et β sont des paramètres réels.

Soit λ_k la k-ième valeur propre de ce problème et

$$\mu_k = \lambda_k \left(\int_0^1 p(x)^\alpha dx\right)^{-1/\alpha} \left(\int_0^1 q(x)^\beta dx\right)^{1/\beta}.$$

Théorème 6. *Si $\alpha \leq -1$ et $\beta \geq 1$, alors $\mu_1 \geq c_0$, où $c_0 > 0$. Pour toutes les autres valeurs des paramètres α, β la valeur μ_1 n'est pas minorée par une constante positive independant de p et q.*

Si $\alpha > 0$ et $\beta < 0$ ou $-1/2 < \alpha$ et $1/\beta \geq 1/\alpha + 2$, alors $\mu_1 \leq c_1$. Pour toutes les autres valeurs des paramètres α, β la valeur μ_1 n'est pas majorée par une constante independant de p et q.

Ce théorème est démontré à l'aide du principe variationnel et de l'analyse detaillée des inégalités obtenues pour toutes les valeurs des paramètres α et β.

Utilisant des propriétés des fonctions propres nous pouvons estimer aussi les autres valeurs propres λ_k pour tout $k \geq 1$.

Théorème 7. *Si $\alpha \leq -1$ et $\beta \geq 1$, alors*

$$\mu_k \geq c_0 k^{2+1/\alpha-1/\beta}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

où $c_0 > 0$. *Pour toutes les autres valeurs des paramètres* α, β *et pour tout* $k \geq 2$ *la valeur* μ_k *n'est pas minorée independamment de* p *et* q *par une constante positive.*

Si $\alpha > 0$ *et* $\beta < 0$, *alors*

$$\mu_k \leq c_1 k^{2+1/\alpha-1/\beta}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Pour toutes les autres valeurs des paramètres α, β *et pour tout* $k \geq 2$ *la valeur* μ_k *n'est pas majorée independamment de* p *et* q.

Bibliographie

1. Egorov Yu.V., Kondrat'ev V.A. "*On an estimate of the first eigen-value for a self-adjoint elliptic operator*", Vestnik Mosk. un-ta, Mathem., Mechanics, 3, 1983, 46-52.

2. Egorov Yu.V., Kondrat'ev V.A. "*On estimates of the first eigen-value of the Sturm-Liouville problem*", Russian Math. Survey, 39 (2), 1984, 151-152.

3. Egorov Yu.V., Kondrat'ev V.A. "*On an estimate for the first eigen-value of the Sturm-Liouville operator*", Vestnik Mosk. un-ta, Mathem., Mechanics, 6, 1990, 75-78.

4. Egorov Yu.V.,Kondrat'ev V.A. "*On the negative spectrum of an elliptic operator*", Mathem. sbornik, 181(2),1990, 147-166.

5. Fefferman Ch. " *The uncertainty principle*", Bulletin of the AMS, 9(2),1983, 129-206.

6. Kerman R.,Sawyer E. " *The trace inequality and eigenvalue estimates for Schrödinger operator*", Annal. de l'Institut Fourier, 26(4), 1986, 207-228.

7. Schechter M. " *The spectrum of the Schrödinger operator*", Trans. of the AMS, 312(1), 1989, 115-128.

8. Li P., Yau S.T. *"On the Schrödinger equation and the eigen-value problem"* , Commun. Math. Physics, 88, 1983, 309-318.

9. Birman M.S., Solomyak M.Z.," *Application of the interpolation to the estimates of the number of negative eigen-values of the Schrödinger operator*", 1989.

10. Blanchard Ph., Stubbe J., Rezende J." *New estimates on the number of bound states of Schrödinger operators*", Letters in Math. Physics, 14, 1987, 215-225.

11. Stubbe J. *"Bounds on the number of bound states for potentials with critical decay at infinity"*, J. Math. Physics, 31, 1990, 1177-1180.

Yuri V. EGOROV
Department of Mathematics
Moscow B-234
Russie