SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

MOUEZ DIMASSI

Développements asymptotiques des perturbations lentes de l'opérateur de Schrödinger périodique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1991-1992), exp. n° 10, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1991-1992____A10_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1991-1992

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES DES PERTURBATIONS LENTES DE L'OPERATEUR DE SCHRÖDINGER PERIODIQUE

Mouez DIMASSI

Exposé n° X

21 Janvier 1992

Introduction et énoncé des résultats

Nous allons ici étudier le spectre d'opérateurs du type suivant :

$$P_A,\varphi = \sum_{i=1}^{n}(D_{y_i} + A_i(hy))^2 + V(y) + \varphi(hy)(h \to \text{o}). \tag{1}$$

Où $A_1, \cdots, An, V, \varphi \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}) V \Gamma$-périodique, Γ étant un réseau de R^n, φ est bornée ainsi que toute ces dérivées. Les dérivées d'ordre non nul des $A_i, 1 \leq i \leq n$ sont bornées.

Buslaev [Bu], Guillot - Ralston - Trubowitz [Gu.R.T.] ont utilisé

$$\tilde{P}_{A\varphi} = (hDx + Dy + A(x))^2 + V(y) + \varphi(x) \tag{2}$$

pour l'étude des solutions de l'équation :

$$P_A, \varphi u = \lambda u \tag{3}$$

En considérant $\tilde{P}_A, \varphi$ comme opérateur h-pseudo-différentiel en x de symbole à valeur opérateurs, ils ont construit des solutions approchées (BKW) de l'équation (3).

C.Gérard - A. Martinez - J.Sjostrand [G.M.S.] ont utilisé la même idée pour une réduction spectrale de l'opérateur P_A, φ. Ils ont prouvé que l'étude du spectre $\sigma(P_A, \varphi)$ de P_A, φ au voisinage d'un point λo, se ramène à celui d'un système $N \times Nh$-pseudo-différentiel $E_{-+}^W(x, hD_x + A(x), \lambda, h)$ défini sur V_o^N où $V_o = \{u = \sum_{\gamma \in \Gamma} C_\gamma \delta(x - h\gamma), (C_\gamma)_{\gamma \in \Gamma} \in \ell^2(\Gamma\sigma)\}$

D'après la théorie de Floquet, $\sigma(P) = \bigcup_{k=0}^{+\infty} J_k \; J_k = \lambda_k(\mathbf{R}^n/p*)$, où $\lambda_k(\xi)$, sont les valeurs propres de Floquet associées à $P = -\Delta + V, \Gamma^*$; le réseau dual de Γ. On fixe un intervalle I qui ne rencontre pas le spectre de P.

Nencin [Ne], Avron-Simon ont démontré que pour tout compact $K \subset I$, il existe $h_K > o$ tel que $K \cap \sigma(P_{A_{1o}}) = \phi V h \in]o, h_K]$.

Donc, si J est l'ensemble des valeurs d'adhérences de φ à l'infini et si

$$K \cap (\sigma(P) + J) = \phi. \tag{4}$$

alors

$$\sigma(P_{A,\varphi}) \cap K \text{ est discret.}$$

Soit $f \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tel que supp$f \subset K$. Alors on va démontrer

Théorème 1.— *Si K est un compact vérifiant (4) alors :*

$$\operatorname{tr} f(P_A, \varphi) \sim h^{-n} \sum_{k=0}^{+\infty} a_k h^K (h \to o)$$

avec

$$a_0 = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} \sum_{k=0}^{+\infty} f(\varphi(x) + \lambda_k(\xi)) d\xi dx$$

Ici $\lambda_k(\xi), k \geq 0$ désignent les valeurs propres de Floquet associées à l'opérateur $P = -\Delta + V(g)$. $\sharp$

Dans le cas d'une bande simple, on donne explicitement les $(a_j)_{j\geq 0}$ du théorème 1. Plus précisément on suppose :

(H_1) Pour un $k = k_0$ fixé $\lambda(\xi) = \lambda_{k_0}(\xi)$ est simple pour $\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*$, et la bande d'énergie $j_{k_0} = \{\lambda_{k_0}(\xi), \xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*\}$ est disjointe des autres bandes, c'est à dire que $\lambda_j(\xi) \in \mathcal{I}_{k_0}$, si $j \neq k_0$ $\xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*$.

(H_2) On suppose que

$$S < \min \left\{ \inf_{\xi\in\mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0+1}(\xi) - \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0}(\xi), \inf_{\xi\in\mathbf{R}^n/\Gamma^*} - \sup_{\xi\in\mathbf{R}^n/\Gamma^*} \lambda_{k_0-1}(\xi) \right\}$$

où $S = \varphi_+ - \varphi_-$, $\varphi_+ = \sup_{x\in\mathbf{R}^n} \varphi(x) \varphi_- = \inf_{x\in\mathbf{R}^n} \varphi(x)$ Où on montre en particulier :

Théorème 2.— *Sous les hypothèses $(H_1)(H_2)$ on a :*

(7) $$\operatorname{tr} f(P_{A,\varphi)} = (2\Pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n_x} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k_0}(\xi)) d\xi dx + 0(h^{2-n})$$

(c'est à dire $a_1 = 0$)

Esquisse de la démonstration du théorème 1

On définit :

$$\Gamma^* = \{\gamma^* \in \mathbf{R}^n \backslash e^{i\gamma\gamma^*} = 1 \; \forall \gamma \in \Gamma\}$$

E resp E^* un domaine fondamental borné du réseau Γ resp $\Gamma^* V_0 = \{u \in S'(\mathbf{R}^n)$ *tq* $u(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f_\gamma \delta(x - h\gamma), (f_\gamma) \in \ell^2(\Gamma, \mathbf{C})\Big\}$ V_0 est donc un espace hilbertien unitairement équivalent à $\ell^2(\Gamma, \mathbf{C})$.

Rappelons maintenant qu'à un symbole $Q(x,\xi,h) \in S^0(\mathbf{R}^{2n})$ i.e. vérifiant : $\exists h_0 > 0$ tq $\forall \alpha,\beta \in \mathbf{N}^n, \exists C_{\alpha,\beta}$ tq $\forall (x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n} |O_x^\alpha D_\xi^\beta Q(x,\xi,h)|, \leq C_{\alpha\beta} \forall h \in]0,h_0]$ on peut associer un opérateur pseudo-différentiel (son h-quantifié de Weyl)

$$(8) \qquad \begin{array}{c}(Q^w(x,hD_x,h)u)(x) = (op_h^w Q(x,\xi)u)(x) = (2\Pi h)^{-n} \\ \int e^{i/n(x-y).\xi} Q(\frac{x+y}{2},\xi,h)u(y)dyd\xi.\end{array}$$

Pour $Q(x,\xi) \in S^0(\mathbf{R}^{2n})\Gamma^*$-périodique en ξ on démontre que les coefficients $Q(\alpha,\beta)$ de la matrice associée à $op_h^w Q(x,\xi)$ (en identifiant V_0 à $\ell^2(\Gamma,\mathbf{C})$) :

$$(9) \qquad Q(\alpha,\beta) = \int_{E^*} e^{i<\alpha-\beta.\xi>} Q(h\frac{\alpha+\beta}{2},\xi)\frac{d\xi}{\text{vol }(E^*)}$$

Si de plus $K = \Pi_x(\text{supp } Q)$ est compact alors $op_h^w Q$ est à trace et :

$$(10) \qquad \text{tr } Q^w(x,hD_x) = (2\Pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}_x^n} \int_{E^*} Q(x,\xi)d\xi dx + O(h^\infty)$$

(Par $0(h^\infty)$ on désigne une quantité qui est $0(h^N).h \to 0$ pour tout $N \geq 0$). On note :

$$H_0 = \{u \in L^2_{\text{loc}}(\mathbf{R}^n)/u(y+\gamma) = u(y)\ \forall \alpha \in \Gamma\} = L^2(\mathbf{R}^n/\Gamma)$$

$$Hm,\xi = \{u \in H_0/(Dy+\xi)^\alpha u \ \in H_0\ \forall |\alpha| \leq m\}.$$

Remarquons ici que simplement la norme de $H_{m,\xi}$ dépend de ξ, de plus on a :

$$||u||_{H_{m,\xi}} \leq C < \xi - \eta >^m ||u||_{H_{m,\eta}}\ \forall u \in H_{m,0}\ \xi,\eta \in \mathbf{R}^n \text{ (ici } < x >^2 = (| + |x|^2)).$$

Pour $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ fixé on pose :

$$(11) \qquad P(x,\xi) = (Dy+\xi)^2 + V(y) + \varphi(x),$$

l'opérateur auto-adjoint non borné sur H_0.

D'après la théorie des opérateurs pseudo-différentiels à valeurs opérateurs voir [Ba], [GMS], $P(x,\xi) \in S^0(\mathbf{R}^{2n},\mathcal{L}(K_{2,\xi},K_0))$. On fixe maintenant $z_\circ \in \mathbf{R}$.

Proposition 3.— *([GMS] voir aussi [He - Sj]) Il existe un entier $N \geq 0$, un voisinage complexe W de z_0, et des fonctions $\varphi_j(x,y,\xi) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}_{x,\xi},\ H_{2,0}) \cap C^\infty(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}^n_\xi \times \mathbf{R}^n)$ pour $j = 1,2,\cdots,N$ tels que pour tout $(x,\xi) \in \mathbf{R}^{2n}$ et pour tout $z \in \omega$ l'opérateur :*

$$\mathcal{P}(x,\xi,z) = \begin{pmatrix} P(x,\xi) - z & R_-(x,\xi) \\ R_+(x,\xi) & 0 \end{pmatrix} H_{2,\xi} \oplus \mathbf{C}^N \to H_0 \oplus \mathbf{C}^N$$

vérifie les propriétés suivantes :

i) $\mathcal{P}$ est bijectif, uniformément borné ainsi que toutes ces dérivées en x,ξ,z

ii) $\mathcal{P}(x,\xi,z) \in S^0(\mathbf{R}^{2n},\ j(H_{2,\xi} \oplus \mathbf{C}^N, H_0 \oplus \mathbf{C}^N))$

iii)

$$(R_+(x,\xi)\mu)_j =< \mu,\ \varphi_j(x,\cdots,\xi) > H_0\ 1 \leq j \leq N \tag{12}$$

$$R_-(x,\xi)\mu^- = \sum_{j=1}^{N} \mu_j\ \varphi_j(x,\cdots,\xi)\ \mu^- = (u^-,\cdots,\mu_N^-) \in \mathbf{C}^N. \tag{13}$$

De plus les fonctions φ_j *vérifient* $(*)$

$$(*) \qquad \begin{cases} ||\partial_x^\alpha\ \partial_\xi^\beta\ \varphi_j||_{H_{2,\xi}} \leq C_{\alpha,\beta}\ \forall_{\alpha,\beta} \\ \forall\gamma^* \in \Gamma^*\ \varphi_j(x,y,\xi+\gamma^*) = e^{-i<y,\gamma^*>}\varphi_j(x,y,\xi) \end{cases}$$

l'inverse

$$\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = \begin{pmatrix} E^0(x,\xi,z) & E_+^0(x,\xi,z) \\ E_-^0(x,\xi,z) & E_{-+}^0(x,\xi,z) \end{pmatrix}\ :\ H_0 \oplus \mathbf{C}^N \to H_{z,\xi} \oplus \mathbf{C}^N$$

de $\mathcal{P}(x,\xi,z)$*, vérifie (i) et appartient à* $S^0(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{L}(K_0 \oplus \mathbf{C}^N, K_{2,\xi} \oplus \mathbf{C}^N))$

Proposition 4.— *([GMS]) Pour* $z \in \omega, h$ *très petit, l'opérateur :*

$$\begin{pmatrix} P_{A,\varphi} - z & \hat{R}_- \\ \hat{R}_+ & 0 \end{pmatrix} : H_{2,A} \times \ell^2(\Gamma_1\mathbf{C}^N) \to \ell^2(\mathbf{R}^n) \times \ell^2(\Gamma_1\mathbf{C}^N)$$

est uniformément borné, bijectif, d'inverse $\widehat{\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \widehat{E} & \widehat{E}_+ \\ \widehat{E}_- & \widehat{E}_{-1} \end{pmatrix}$ *uniformément borné,* $\widehat{E}, \widehat{E}_+$, $\widehat{E}_-, \widehat{E}_{-+}$*, sont holomorphes en z, ici*

$$\widehat{R}_+\ \mathcal{H}_{2,A} = \{\mu \in L^2(\mathbf{R}^n)/(D_y + A(hy))^a\mu \in L^2 V|\alpha| \leq 2\} \to \ell^2(\Gamma, \mathbf{C}^N)$$

$$(\widehat{R}_+\mu)_j(\gamma) = \int \mu(\hat{y})\ W_{A,h,j}\ (h\frac{\gamma+\hat{y}}{2}, \tilde{y} - \tilde{\gamma})dy, \text{pour } \gamma \in \Gamma,$$

$$W_{A,h,j}(x,y) = e^{-i<y\cdot A(x)>} \int_{E^*} e^{i<y,\eta>}\ \varphi_j(x,y,\eta)\frac{d\eta}{\text{vol } E^*}, \widehat{R}_- = \widehat{R}_+^*$$

La matrice de $\widehat{E}_{-+}$ *est égale à la matrice de* $E_{-+}^W(x, hD_x + A(x), z, h)$ *définie sur* V_0^N*, où* $E_{-+}(x,\xi,+A(x),z,h) \sim \sum_{j=0}^{+\infty} h^j E_{-+}^j(x,\xi+A(x),z) \in S^0(\mathbf{R}^{2n}, \mathcal{L}(\mathbf{C}^N,\mathbf{C}^N))E_{-+}^0(x,\xi,z), \varphi j$ $1 \leq j \leq N$ *sont donnés par la proposition 3.*

Remarque 5

a- Les propositions 3.4 restent encore vraies si on remplace z_0 par un compact de $\mathbf{R}$.

b- De $\hat{\mathcal{P}}\hat{\mathcal{E}} = I$ et $\hat{\mathcal{E}}\hat{\mathcal{P}} = I$ on obtient

$$(P_{A,\varphi} - z)^{-1} = \hat{E} - \hat{E}_+ \ \hat{E}_{-+}^{-1} \ \hat{E}_- \tag{14}$$

$$\hat{E}_{-+}^{-1} = -\hat{R}_+ \ (P_{A,\varphi} - Z)^{-1} \hat{R}_- \tag{15}$$

$$\partial_z \ \hat{E}_{-+} = \hat{E}_- \ \hat{E}_+ \tag{16}$$

c- Observons que z appartient au spectre de $P(x,\xi)$ ssi "zéro" appartient au spectre de $E_{-+}^0(x,\xi,z)$.

d- Comme $\hat{R}_+, \hat{R}_-$ sont uniformément bornés en h alors :

$$||\hat{E}_{-+}^{-1}||\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma, \mathbf{C}^N)) = 0(|Imz|^{-2})$$

e- $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ est Γ^* périodique en ξ et $||(E_{-+}^w(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1}|| = 0(|Ims|^{-1})\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n), \mathbf{C}^N)$,

$$||E_{-1}^w(x, hD_x + A(x), z, h)||_{\mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^n))} = 0(|Imz|^{-1}). \ \sharp$$

Soit $\tilde{f} \in C_0^\infty(\mathbf{C})$ une extension de f telle que $\partial \tilde{f}(z) = 0(|Imz|^N)$ pour tout N. Alors

$$f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi) \int \bar{\partial}\tilde{f}(z)(z - P_{A,\varphi})^{-1} L(dz), \tag{18}$$

où L désigne la mesure de Leborgne sur $\mathbf{C} \simeq \mathbf{R}^2$.

La formule (14) et le fait que $\hat{E}$ est holomorphe en z dans un voisinage de supp $\tilde{f}$ donnent

$$f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi) \int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\hat{E}_+ \ \hat{E}_{-1}^{-1} \ \hat{E}_- \ \mathrm{L}(dz) \tag{19}$$

Soit $\tilde{\varphi}(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n, \mathbf{R})$ tel que :

i) $K \cap (\sigma(P) + \{\tilde{\varphi}(x), x \in \mathbf{R}^n\}) = \phi$

ii) $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(x)$ pour $|x| > R$ (R très grand).

On désigne par $\tilde{E}_{-+}^0(x,\xi,z)$ l'opérateur construit dans la proposition 3 associé à $\tilde{P}(x,\xi) = (Dy + \xi)^2 + v(y) + \tilde{\varphi}(x)$.

Posons $\tilde{E}_{-+}(x,\xi+A(x),z,h) = \tilde{E}^0_{-+}(x,\xi+A(x),z)+(E_{-+}(x,\xi+A(x),z,h)) - E^0_{-+}(x,\xi+A(x),z,h)$ où $E_{-+}(x,\xi,z,h)$ est donné par la proposition 4.

Il résulte de (i), (ii) et la remarque 5-c que ; $\tilde{E}_{-+}(x,\xi+A(x),z,h)$, appartient à $S^0(\mathbf{R}^{2n}, L(\mathbf{C}^N,\mathbf{C}^N))$ et que c'est un opérateur elliptique uniformément en z dans w (voisinage complexe de supp $\tilde{f}$), égal à $E_{-+}(x,\xi+A(x),z,h)$ pour $|x|>2R$, dépend holomorphiquement de z dans ω.

D'après un résultat de R. Beals [Be] pour les opérateurs pseudo-différentiels, traduit par [He - Sj]2 dans le cadre semi-classique, on peut trouver $G^w(x,hD_x+A(x),z,h) \in \mathcal{L}(L^2(\mathbf{R}^N,\mathbf{C}^N))$ holomorphe en $z\in\omega$ tel que $G(x,\xi+A(x),z,h)\in S^0(\mathbf{R}^{2n},L(\mathbf{C}^N,\mathbf{C}^N))$ et

$$\tilde{E}^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z,h)\circ G^w(x,hD_x+A(x),z,h) = G^w\circ\tilde{E}^w_{-+} = I.$$

On note $\tilde{E}_{-+}$, la matrice associée à l'opérateur $\tilde{E}^w_{-+}(x,hD_x+A(x),z,h)$ défini sur V_0^N, en identifiant V_0^N à $\ell^2(\Gamma,\mathbf{C}^N)$.

Maintenant nous pouvons appliquer la formule $\widehat{E}^{-1}_{-+} = \widehat{\widehat{E}}^{-1}_{-+} - \widehat{E}^{-1}_{-+}(\widehat{E}_{-+} - \widehat{\widehat{E}}_{-+})\ \widehat{\widehat{E}}^{-1}_{-+}$ et le fait que $\widehat{\widehat{E}}^{-1}_{-+}$ est holomorphe en z pour obtenir :

$$f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi)\int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \hat{E}_+\ \hat{E}^{-1}_{-+}\ (\hat{E}_{-1} - \hat{\hat{E}}_{-+})\ \hat{\hat{E}}^{-1}_{-+}\hat{E}_-\ L(dz).$$

Comme $(\hat{E}_{-+} - \hat{\hat{E}}_{-+})$ est a trace et que $\partial_z\hat{E}_{-+} = \hat{E}_-\ \hat{E}_+$ alors,

$$\mathrm{tr}\ f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi)\int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \mathrm{tr}[\partial_z\hat{E}_{-+}\hat{E}^{-1}_{-+}(\hat{E}_{-+} - \hat{\hat{E}}_{-+})\ \hat{\hat{E}}^{-1}_{-+}\ L(dz)].$$

Si $\psi(x)\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ vaut 1 sur un voisinage de π_x (supp $(E_{-1}-\hat{E}_{-1})$) alors :

Lemme 6.— tr $f(P_{A,\varphi}) = -(1/\pi)$ tr $[\int\bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \partial_z\ \hat{E}_{-+}\hat{E}^{-1}_{-+}\ L(dz)\hat{\psi}] + 0(h^\infty)$ *($\hat{\psi}$ est la matrice associée à l'opérateur de multiplication $c\psi(x)$ défini sur V_0^N)*

Preuve : Comme $\wedge = \pi_x$ (supp $E_{-1}(x,\xi,+A(x),z,h) - \tilde{E}_+(x,\xi+A(x),z,h))\cap$ supp $(1-\psi) = \phi_1$ alors à l'aide de (9), on démontre que les coefficients $N(\alpha,\beta)$ de la matrice $(\widehat{E}_+ - \widehat{\widehat{E}}_{-1})\widehat{\widehat{E}}^{-1}_{-+}(1-\hat{\psi})$ vérifient

$$N(\alpha,\beta) = 0(h^M\left(\frac{1}{1+\mathrm{dist}(\alpha,\frac{\wedge}{h})}\right)^N\left(\frac{1}{1+\mathrm{dist}(\beta,\frac{\wedge}{h})}\right)^N)\ \text{pour tous} \tag{22}$$

Donc tr $f(P_{A,\varphi}) = (1/\pi)$ tr $(\int\bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \partial_z\ \hat{E}_{-1}\ \hat{E}^{-1}_{-+}L(dz)\hat{\psi}) + 0(h^\infty)$ (on rappele que $\widehat{\widehat{E}}^{-1}_{-+}$ est holomorphe en z dans un voisinage de supp $\tilde{f}$).

Lemme 7.— *L'opérateur* $G(h) = -(1/\pi)\int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \partial_z\ E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z, h)(E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1}L(dz)$ *est h-admissible (c'est-à-dire il existe une suite* $aj \in S^\circ(\mathbf{R}^{2n}, \gamma(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ *et une suite* $R_N \in \gamma(L^2(\mathbf{R}^n, \mathbf{C}^N))$ *pour* $N \geq N_0, N_0$ *assez grand de sorte que* $G(h) = \sum_0^N h^j op^w_h a_j + h^{N+1}R_N$ *et* $\sup_{h\in]0,h_0]} ||R_N(h)|| < +s$. *Ici les* $a_j(x,\xi)$ *sont* Γ^* *périodiques en* ξ, *et*

$$(23) \qquad a_0(x,\xi) = -\frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\partial_z E^0_{-+}(x, \xi + A(x), z)(E^0_{-+}(x, \xi + A(x), z))^{-1}L(dz)$$

Preuve : Utilisant $\bar{\partial}\tilde{f}(z) = 0(|\mathrm{Im}\ z|^N)$ pour tout N, et la remarque 5-e, on obtient

$$(*) \qquad \begin{array}{c} G(h) = \int_{|Imz|^2\geq h} \bar{\partial}\tilde{f}(z)\ \partial_z\ E^w_{-1}(x, hD_x + A(x), z, h) \\ (E^w_{-+}(x, hD_x + A(x), z, h))^{-1}L(dz) + 0(h^\infty) \end{array}$$

à l'aide d'un résultat de Beals [Be] (voir aussi [Sj]) on démontre :

i) Il existe $r(x,\xi,z,h) \in C^\infty(\mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}\mathcal{L}(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N))$ pour z, h fixés dans $]0, h_0] \times \{z/|\mathrm{Im}\ z| \in]0, S_0], S_0$ assez petit$\}$ tq

$$(24) \qquad ||\partial^\alpha_x \partial^\beta_\xi \partial^M_h r(x,\xi,z,h)||_{\gamma(\mathbf{C}^N,\mathbf{C}^N)} \leq C_{\alpha,\beta,M}|Imz|^{-1-2M-|\alpha|-|\beta|}$$

dans la zone $|Imz|^2 \geq h$ et $\partial_z\ E^w_{-1}(x, hD_x + A(x), z, h)0(E^w_{-+})^{-1} = 0\rho^w_h r(x,\xi,z,h)$

ii) $r(x,\xi,z,h)$ admet un développement asymptotique en h.

Maintenant le lemme résulte de $(*)$ et (24) (la périodicité des $a_j(x,\xi)$ en ξ découle de celle de $E_{-1}(x, \xi + A(x), z, h)$).

Les lemmes 6, 7 combinés avec la formule (10) donnent (10) donnent (5) du théorème 1, (23) implique :

$$(25) \qquad \begin{array}{c} (2\pi h)^n\ \mathrm{tr}\ f(P_{A,\varphi}) = \int_{\mathbf{R}^n x}\int_{E^*} -1/\pi \int \bar{\partial}\tilde{\varphi}(z) \\ \hat{\mathrm{tr}}[\partial_z\ E^\circ_{-+}(x, \xi + A(x), z)(E^\circ_{-+}(x, \xi + A(x), z))^{-1}]\psi(x)L(dz)d\xi dx + 0(h) \end{array}$$

($\hat{\mathrm{tr}}$: désigne la trace au sens matricielle).

La formule de Liouville ($\hat{\mathrm{tr}}[(\partial_z A)A^{-1}] = \frac{\partial_z \det A(s)}{\det A(z)}$ où $A(z) \in \gamma(\mathbf{C}^N, \mathbf{C}^N)$) et la périodicité de $E^\circ_{-+}(x, \xi + A(x), z)$ en ξ entraînent :

$$(26). \qquad \begin{array}{c} (2\pi h)^n\ \mathrm{tr}\ f(P_{A,\varphi}) = \int_{\mathbf{R}^n x}\int_{E^*} -1/\pi \int \bar{\partial}\tilde{\varphi}(z)\psi(x) \\ \frac{\partial_z \det E^\circ_{-+}(x,\xi,z)}{\det E^\circ_{-+}(x,\xi,z)} L(dz)d\xi dx + 0(h) \end{array}$$

D'après la remarque 5-c

(27) $$\det E^{\circ}_{-+}(x,\xi,z) = 0 \text{ ssi il existe } k \geq 0 \text{ tq } z = \varphi(x) + \lambda_k(\xi)$$
$(\lambda_k(\xi)$, désignent les fonctions propres de Floquet associées à $-\Delta + V)$.

Rappelons que pour une fonction holomorphe $g(z)$, de racines $(z_k)_{k\geq s}$ comptées selon leur multiplicité on a :

(28) $$-\frac{1}{\pi}\int \bar{\partial}\tilde{f}(z)\frac{\partial_z g(z)}{g(z)}L(dz) = \sum_{k\geq 0} f(z_k)$$

Maintenant (26), (27) et (28), sans oublier que $\psi(x)$ vaut 1 sur $\bigcap_{k\geq 0} \pi_x$ Supp $(f(\varphi(x) + \lambda_t(z)))$, entraînent le théorème 1.

Esquisse de la démonstration du théorème 2

Dans le cas d'une bande simple $J_{k0} = \{\lambda_{k0}(\xi), \xi \in \mathbf{R}^n/\Gamma^*\}$ Nenciu [Ne]2, Helffer et Sjöstrand [He - Sj]3, ont construit une fonction $\psi(\xi) = \psi(y,\xi) \in Ker(P_\xi - \lambda_{k0}(\xi))$ $(P_\xi = (Dy+\xi)^2 + V(y)$; l'opérateur non borné sur H_0 de domaine $H_{2,\xi})$ tel que :

i) $\psi(\xi)$ est une fonction C^∞ en ξ à valeurs dans H_0.

ii) $||\psi(\xi)||_{H_0} = 1$ pour tout ξ dans $\mathbf{R}^n/\Gamma^*$.

iii) $\psi(\xi+\gamma^*) = e^{-ij\gamma^*}\psi(\xi)$ pour tout γ^* dans Γ^*.

iv) $\bar{\psi}(y,\xi) = \psi(y,-\xi)$.

On pose $R^{\circ}_{-}(\xi) \; : \; \mathbf{C} \to H_0, R^{\circ}_{+}(\xi) \; : \; H_0 \to \mathbf{C}$ défini par : $R^{\circ}_{-}(\xi)u_- = u_-\psi(y,\xi)$ $(R^{\circ}_{+}(\xi)u)_- = \int_E \bar{\psi}(y,\xi)u(y)dz$.

A l'aide des hypothèses $(H_1)(H_2)$ on démontre facilement :

Lemme 8.— *L'opérateur* $\mathcal{P}(x,\xi,z) = \begin{pmatrix} P(x,\xi)-z & R^{\circ}_{-}(\xi) \\ R^{\circ}_{+}(\xi) & 0 \end{pmatrix} : H_{2,\xi\oplus\mathbf{C}\to H_0\oplus\mathbf{C}}$ *est inversible pour* $(x,\xi,z) \in \mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}\times\omega$ *avec un inverse* $\mathcal{E}_0(x,\xi,z) = \begin{pmatrix} E_0(x,\xi,z) & E^0_{+}(x,\xi,z) \\ E^0_{-}(x,\xi,z) & E^0_{-+}(x,\xi,z) \end{pmatrix}$ *uniformément borné ainsi que toutes ces dérivés dans* $\gamma(H_0\oplus\mathbf{C}, H_{2,\xi}\oplus\mathbf{C})$ *en* $(x,\xi,z) \in \mathbf{R}^{2n}_{x,\xi}\times\omega$. *De plus on a :*

$$\begin{aligned}
E^0_{-+}(x,\xi,z) &= z - (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x)) \\
E^0_{+}(x,\xi,z) &= E^0_{+}(\xi) = R^0_{-}(\xi) \\
E^0_{-}(x,\xi,z) &= R^0_{+}(\xi) \\
E^0(x,\xi,z) &= (1 - R^0_{-}(\xi)R^0_{+}(\xi))(P(x,\xi)-z)^{-1}(1 - R^0_{-}(\xi)R^0_{+}(\xi)) \quad \sharp
\end{aligned}$$

Le lemme 8, donne explicitement $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ et d'après la démonstration du théorème 1 on peut calculer à l'aide de $E_{-+}(x, \xi + A(x), z, h)$ tous les termes du développement asymptotique (5).

Utilisant un calcul symbolique classique on obtient :

$$\operatorname{tr} f(P_{A,\varphi}) = \frac{1}{(2\pi h)^n} \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) d\xi dx + h(2\pi h)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f'(\varphi(x)$$

$$+\lambda_{k0}(\xi)) \int C(x,\xi)(y)\bar{\psi}(y,\xi)dy\ d\xi\ dx + 0(h^{2-n}) = (1) + h(2\pi h)^{-n}(2) + 0(h^{2-n})$$

avec $C(x,\xi)(y) = \frac{1}{2i} < \partial_\xi P(x,\xi), B(x)\partial_\xi R_-^0(\xi) > +\frac{1}{2i} < \lambda_\xi, B(x)\partial_\xi R_-^0(\xi) > -\frac{1}{i} < \partial_\xi R_-^0(\xi), \partial_x \varphi(x) >$, ou $B(x) = {}^t\partial_x A(x) - \partial_x A(x)$

$$(2) = \frac{1}{i} \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \int_E ((D_{y_i} + \xi_i)\partial_{\xi j}\psi(y,\xi))\bar{\psi}(y,\xi)dgd\xi dx$$

$$+\frac{1}{2i} \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)) \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (\partial_{x_i} A_j - \partial_{x_j} A_i)\lambda'_{\xi_i} \int_E \partial_{\xi j}\psi(y,\xi))\bar{\psi}(y,\xi)dgd\xi dx$$

$$+ \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi) - \frac{1}{i} \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}\varphi(x) \int_E \partial_{\xi j}\psi(y,\xi))\bar{\psi}(y,\xi)dgd\xi dx$$

$$= (3) + (4) + (5)$$

$(5) = -\frac{1}{i} \int_{E^*} \int_E \sum_{j=1}^n \partial_{x_j}\psi(y,\xi)\bar{\psi}(y,\xi)dy \int_{\mathbf{R}^n x} \partial_{\xi_j}(f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi)))dxd\xi$ est nulle (car $f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi))$ est à support compact en x).

Remarque 9 : Puisque $\bar{\psi}(y,\xi) = \psi(y,-\xi)$ alors : $(*)\partial_\xi\bar{\psi}(y,\xi) = -\partial_\xi\psi(y,-\xi)$. En utilisant $(*)$ et le fait que $B(x)$ est antisymétrique on montre que les fonctions :

$$\alpha(x,\xi) = \int_E < B(x)\partial_\xi\psi(y,\xi), \partial_\xi\bar{\psi}(y,\xi) > dy,$$

$$\beta(x,\xi) = \int_E < (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x) - P(x,\xi))B(x)\partial_\xi\psi(y,\xi), \partial_\xi\bar{\psi}(y,\xi) > dy$$

sont impaires en ξ.

Par intégration par parties en ξ, on démontre :

$$(4) = -\frac{1}{2i} \int_{\mathbf{R}^n x} \int_{E^*} f(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi))\alpha(x,\xi)d\xi dx$$

De même à l'aide de la formule

$$\frac{\partial P}{\partial \xi}(x,\xi)\psi(y,\xi) = \lambda'_\xi \psi(y,\xi) + (\lambda_{k0}(\xi) + \varphi(x) - P(x,\xi))\frac{\partial \psi}{\partial \xi}(y,\xi)$$

On obtient

$$(3) = (4) - \frac{1}{2i}\int_{\mathbf{R}^n x}\int_{E^*} f'(\varphi(x) + \lambda_{k0}(\xi))\ \gamma(x,\xi)d\xi dx$$

La remarque 9 entraîne que (3) = (4) = 0, ce qui achève la démonstration du théorème 2.

Bibliographie

[Ba] A. Balezard - Konlein : Calcul fonctionnel pour les opérateurs h-admissibles à symbole opérateur et application, Thèse 3ème cycle, Nantes (1985).

[Be] R. Beals : Characterization of pseudo-differential operators and applications Duke Math. J. Vol. 44 n°1 (1977) 45-47.

[Bu] V.S. Buslaev : Semi-classical approximation for equation with periodic coefficients Russian Math. Surveyes 42, 6 (1987) 97-125.

[G.M.S.] C. Gérard - A. Martinez - J. Sjöstrand : A mathematical approach to the effective Hamiltonien in perturbed periodic-problem. Comm. Math. Phy. Vol. 144, 2, (1991) 217-244.

[Gu. Ra. T.] Guillot - J. Rabiton - Trubowitz : Semi-classical method in solid state physics. Comm. Math. Phy. 116, (1988) 401-415.

[He. Sj.] B. Helffer - J. Sjöstrand :

[1] Equation de Schrödinger avec champ magnetique fort et equation de Harper. preprint juin (1988).

[2] Analyse semi-classique pour l'équation de Harper. Bull. S.M.F. Mémoire n°34, T 116, Fasc. 4 (1988).

[3] On diamagnetisme and de Haas - Van Alphem effect, Ann. Inst, Henri Poincarré (physique théorique) Vol 52, n°4, (1990). 303-375.

[Ne] C. Nencin

[1] Stability of energy gap under variation of the magnetic field letters in Mathematical physics 11 (1986), 127-132.

[2] Existence of the exponentially localised Wannik fonction. Comm. in Math. Phy. 91, (1983), 81-85.

[Av. Si.] J. Avron - B. Simon : Stability of gaps for periodic potentials under variation of a magnetic field. J. Phy. A. Math. Gen. 18, (1985) 2199-2205.

[Sj.] J.Sjöstrand : Microlocal analysis for the periodic magnetic Schrödinger equation and related questions C.I.M.E. lectures Eté 1989, 237-332, Springer L.N. in Math 1495 (1991).

Département de Mathématiques

Université Paris-Sud

91405 ORSAY cedex