J. Sjöstrand

Estimations sur les résonances pour le laplacien avec une perturbation à support compact

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n° 9, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A9_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ESTIMATIONS SUR LES RESONANCES POUR LE LAPLACIEN AVEC UNE PERTURBATION A SUPPORT COMPACT

par J. SJÖSTRAND

Exposé n°IX

22 Janvier 1991

Estimations sur les résonances pour le laplacien avec une perturbation à support compact.

(d'aprés J.Sjöstrand et M.Zworski)

par

Johannes Sjöstrand

0. Introduction. Dans cet exposé on discutera un résultat obtenu en collaboration avec M.Zworski [SZ]. Il s'agit de majorer le nombre $N(\lambda)$ de résonances de "$-\Delta$ avec perturbation à support compact" dans un disque de rayon λ quand $\lambda \to \infty$, quand la dimension n est impaire.

Le premier à étudier ce genre de questions fut R.Melrose. Il a consideré $-\Delta$ dans l'extérieur d'un obstacle $\mathcal{O} \subset\subset \mathbb{R}^n$ à bord C^∞ avec n impaire (et conditions aux limites convenables). Pour ce problème on peut définir les résonances dans le demi-plan inférieur, soit comme les pôles de l'extension méromorphe de la matrice de scattering, soit comme les pôles de l'extension méromorphe de $(-\Delta-\lambda^2)^{-1} : C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O}) \to \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{O})$. Dans [M1], il a montré que $N(\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^n)$, par une méthode basée sur une réduction au bord. Dans [M2] Melrose a aussi consideré le cas de $-\Delta+V$ sur $\mathbb{R}^n$ où le potentiel V est à support compact. Dans ce cas il a obtenu $N(\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^{n+1})$ et ce fut Zworski [Z3], qui par une méthode différente trouva dans ce cas la majoration $N(\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^n)$. Dans le cas radial, on sait que cette estimation est optimal (voir [Z2]), et Zworski a également obtenu un résultat très précis dans le cas de la dimension 1 ([Z1]). Une motivation pour notre travail était de généraliser ces résultats au cas où on a à la fois un obstacle est un potentiel. Récemment Vodev [V] à étendu le résultat de [Z3] au cas des perturbations à support compact d'ordre ≤ 2 qui laissent l'opérateur élliptique. Notre théorème contient tous ces résultats et s'applique aussi aux situations où l'opérateur perturbé est seulement hypoélliptique. Il concerne un opérateur qui en dehors d'un compact coïncide avec le laplacien et qui sur un compact coïncide avec un opérateur auto-adjoint abstrait. La démonstration utilise la méthode des dilatations analytiques (voir Aguilar-Combes [AC], Balslev-Combes [BC], Hunziker [H]), un peu de calcul fonctionnel, et une inégalité de Weyl entre valeurs caractéristiques et valeurs propres d'un opérateur non auto-adjoint. Ces inégalités furent utilisées par Sjöstrand [S], pour établir des bornes sur la densité des résonances près de l'axe réel, dans la limite semi-classique en termes des propriétes du flot classique.

1. Le résultat. On supposera dans la suite que la dimension n est impaire. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert complexe avec une décomposition orthogonale:

(1.1) $\mathcal{H}=\mathcal{H}_{R_0}\oplus L^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0))$,
où $R_0>0$ est une constante fixée, et $B(x,r)=\{y\in\mathbb{R}^n; |x-y|<r\}$. Les projecteurs orthogonales correspondants seront notés $u\mapsto u_{|B(0,R_0)}$ et $u\mapsto u_{|\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0)}$ respectivement. On considère un opérateur non-borné, $P:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$, qui est supposé d'être auto-adjoint de domaine $\mathcal{D}\subset\mathcal{H}$. On suppose aussi que

(1.2) $\mathcal{D}_{|\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0)}\subset H^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0))$,

(1.3) $(Pu)_{|\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0)}=-\Delta(u_{|\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0)})$ pour tous $u\in\mathcal{D}$,

(1.4) si $u\in H^2(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0))$ s'annule dans un voisinage de $\partial B(0,R_0)$, alors $u\in\mathcal{D}$ (en posant $u_{|B(0,R_0)}=0$) et $Pu_{|B(0,R_0)}=0$,

(1.5) l'opérateur: $u\mapsto(P+i)^{-1}u_{|B(0,R_0)}$ est compact de $\mathcal{H}$ dans $\mathcal{H}$.

Si $\chi\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)=\{u\in C^\infty(\mathbb{R}^n); \partial^\alpha u$ est borné pour tout $\alpha\in\mathbb{N}^n\}$ est constant dans un voisinage de $\overline{B(0,R_0)}$, alors il y a une manière naturelle de définir l'opérateur de multiplication $\chi:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{H}$, et on vérifie que $\chi u\in\mathcal{D}$, si $u\in\mathcal{D}$. On peut alors définir les espaces $\mathcal{H}_{comp}$, $\mathcal{H}_{loc}$, $\mathcal{D}_{comp}$, $\mathcal{D}_{loc}$ de manière habituelle. Ainsi, par exemple,
$\mathcal{H}_{comp}=\mathcal{H}_{R_0}\oplus L^2_{comp}(\mathbb{R}^n\setminus B(0,R_0))$, et $\mathcal{D}_{loc}=\{u\in\mathcal{H}_{loc}; \chi u\in\mathcal{D}$ pour tout $\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ qui est constant dans un voisinage de $\overline{B(0,R_0)}$ $\}$. Dans les cas mentionnés dans l'introduction, il est clair comment choisir R_0 et $\mathcal{H}_{R_0}$. Dans le cas général on peut montrer que le spectre de P dans $]-\infty,0[$ est discrèt. Nous avons le résultat préliminaire suivant:
Théorème 1.1. Sous les hypothèses ci dessus, la résolvante $(P-\lambda^2)^{-1}:\mathcal{H}\longrightarrow\mathcal{D}$, $\mathrm{Im}\,\lambda>0$, $\lambda^2\notin(\sigma(P)\cap]-\infty,0[)$ admet une extension méromorphe à $\mathbb{C}$ en tant qu'opérateur $(P-\lambda^2)^{-1}$: $\mathcal{H}_{comp}\longrightarrow\mathcal{D}_{loc}$.

Les résonances (où pôles de scattering) sont alors définies comme les pôles $\neq 0$ de $(P-\lambda^2)^{-1}$. La multiplicité d'un pôle $\lambda_0\neq 0$ est défini comme le rang du projecteur spectral correspondant, défini par:

(1.6) $\pi_{z_0}=(2\pi i)^{-1}\int_\gamma(z-P)^{-1}\,dz : \mathcal{H}_{comp}\longrightarrow\mathcal{D}_{loc}$,

où γ est un petit cercle qui entoure $z_0=_{def.}\lambda_0^2$. (On montre aussi que cette multiplicité est toujours finie.) Soit $N(\lambda)$ le nombre de résonances de P, comptées avec leur multiplicité, dans le disque fermé de centre 0 et rayon λ.

Nous avons besoin d'une hypothèse spectrale sur P.

(1.7) Il existe $\tilde{n}\geq n$ tel que pour tous $h\in]0,1]$, $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et tout

$\chi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ constant près de $\overline{B(0,R_0)}$, l'opérateur $g(h^2P)\chi$ est à trace et $\mathrm{tr}(g(h^2P)\chi)=\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$.

On peut généraliser cette hypothèse en remplaçant la fontion $t\mapsto t^{\tilde{n}}$ par une fonction plus générale comme par exemple $t\mapsto t^n\log(t)$.

Théorème 1.2. Sous les hypothèses générales ci dessus, on a $N(\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^{\tilde{n}})$, $\lambda\longrightarrow\infty$.

Ce résultat contient tous les résultats antérieurs mentionnés dans l'introduction. Nous avons aussi le résultat suivant qui répond à notre préoccupation initiale:

Corollaire 1.3. Soit $\mathcal{O}\subset\mathbb{R}^n$ un ouvert borné à bord C^∞. Soit P un opérateur d'ordre deux, symétrique à coéfficients dans $C^\infty(\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{O})$ de la forme $P(x,D)=-\Sigma\,\partial_{x_j}\circ g^{j,k}(x)\circ\partial_{x_k}+\Sigma\, b^j(x)\partial_{x_j}+c(x)$, qui coïncide avec $-\Delta$ pour $|x|$ assez grand. On suppose que P est élliptique, et on denote par P aussi la réalisation de Dirichlet de P dans $L^2(\mathbb{R}^n\setminus\mathcal{O})$. Alors on a $N(\lambda)=\mathcal{O}(\lambda^n)$, $\lambda\longrightarrow\infty$.

On peut avoir $\tilde{n}>n$ (où une fonction encore plus générale que $t^{\tilde{n}}$) si par exemple $\mathcal{O}=\emptyset$ et P est hypoélliptique et de la forme du corollaire. On peut aussi envisager le cas où P est élliptique, $\mathcal{O}\neq\emptyset$, mais avec des conditions aux limites de type non élliptique.

Pour démontrer le corollaire, on a principalement besoin de vérifier l'hypothèse (1.7). Pour ce faire (si on ne veut pas se referer directement aux résultats connus sur le fonction spéctrale) on peut prendre un grand tore $\mathbb{T}_R=\mathbb{R}^n/R\mathbb{Z}^n$ avec $R>>R_0$, et considerer l'opérateur P_R qui coïncide avec P dans $B(0,R_0)\setminus\mathcal{O}$ et qui coïncide avec $-\Delta$ dans $\mathbb{T}_R\setminus B(0,R_0)$. On voit alors facilement (éventuellement en adaptant quelques estimations faciles de la démonstration du Théorème 1.2) que pour avoir (1.7), il suffit de savoir que le nombre de valeurs propres $\leq\lambda^2$ pour la réalisation de Dirichlet de P_R est $\mathcal{O}(\lambda^n)$. La même remarque s'applique au cas d'opérateurs hypoélliptiques, où on connait plus souvent des résultats sur la fonction de comptage dans le cas de variétés compactes que de résultats sur la fonction spectrale.

Dans le reste de cet exposé nous décrirons quelques étapes de la démonstration.

2. Dilatations analytiques. On rappelle cette méthode dans une version spécialement adaptée à notre problème. Une sous-variété lisse $\Gamma\subset\mathbb{C}^n$ est dite totalement réelle si $T_x\Gamma\cap iT_x\Gamma=\{0\}$ pour tout $x\in\Gamma$. Soit Γ une telle variéte de dimension maximale n. Si $u\in C^\infty(\Gamma)$, on peut trouver une extension presque analytique $\tilde{u}$ de u, c.à.d. une extension à un voisinage complexe de Γ qui est C^∞ et telle que $\bar\partial\tilde{u}$ s'annule à l'ordre infini sur Γ. Soit Ω un voisinage ouvert de Γ et P un opérateur différentiel à coeffients holomorphes sur Ω. On peut alors définir P_Γ: $C^\infty(\Gamma)\to C^\infty(\Gamma)$ par $P_\Gamma u=(P\tilde{u})_{|\Gamma}$ et P_Γ est un opérateur différentiel sur Γ. Si on identifie $T^*\Gamma$ avec une sous-variété de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ à l'aide de l'application $T^*\Gamma\ni(x,du(x))\mapsto(x,\partial\tilde{u}(x))$, $u\in C^\infty(\Gamma;\mathbb{R})$, alors le symbole principal p_Γ de P_Γ est donné par $p_{|T^*\Gamma}$, où p désigne le symbole principal de P. Si $u\in\mathcal{D}'(\Gamma)$ et si $P_\Gamma u$ s'étend holomorphiquement à un voisinage complexe d'un point $x_0\in\Gamma$ où P_Γ est élliptique, alors u s'étend aussi holomorphiquement à un voisinage complexe de x_0. Ce résultat (bien connu) est utile car il nous permet de déformer certaines sous-variétés de $\mathbb{C}^n$.

Revenons maintenant à la situation décrite dans la section 1. Pour tous $0<\varepsilon_0<\pi/2$, $a_0>0$, on peut construire une fonction lisse $[0,\pi]\times[0,\infty[\ni(\theta,t)\mapsto f_\theta(t)\in\mathbb{C}$, injective pour chaque θ, telle que:

(i) $f_\theta(t)=t$ pour $0\le t\le R_0+a_0$,

(ii) $0\le\arg f_\theta(t)\le\theta$, $0\le\arg\partial_t f_\theta(t)\le\theta+\varepsilon_0$, $\partial_t f_\theta\neq0$,

(iii) $\arg f_\theta(t)\le\arg\partial_t f_\theta(t)\le\arg f_\theta(t)+\varepsilon_0$,

(iv) $f_\theta(t)=e^{i\theta}t$, pour $t\ge T_0$, pour un $T_0>0$ convenable, qui dépend de a_0 et de ε_0.

On considère κ_θ: $\mathbb{R}^n\ni t\omega\mapsto f_\theta(t)\omega$, $t\ge0$, $\omega\in\mathbb{S}^{n-1}$, et on définit Γ_θ comme l'image de κ_θ. Soit $\mathcal{H}_\theta$ l'espace de Hilbert donné par la décomposition orthogonale: $\mathcal{H}_\theta=\mathcal{H}_{R_0}\oplus L^2(\Gamma_\theta\setminus B(0,R_0))$. Si $\chi\in C_0^\infty(B(0,R_0+a_0))$ vaut 1 dans un voisinage de $\overline{B(0,R_0)}$, alors on pose: $\mathcal{D}_\theta=\{u\in\mathcal{H}_\theta;\ \chi u\in\mathcal{D},\ (1-\chi)u\in H^2(\Gamma_\theta\setminus B(0,R_0))\}$. On identifiera fréquemment $(\Gamma_\theta,\mathcal{H}_\theta,\mathcal{D}_\theta)$ avec $(\mathbb{R}^n,\mathcal{H},\mathcal{D})$ à l'aide de κ_θ. On définit l'opérateur non-borné $P_\theta:\mathcal{H}_\theta\to\mathcal{H}_\theta$ de domaine $\mathcal{D}_\theta$ par $P_\theta u_{|B(0,R_0)}=P(\chi u)_{|B(0,R_0)}$, $P_\theta u_{|\Gamma_\theta\setminus B(0,R_0)}=-\Delta_{\Gamma_\theta}(u_{|\Gamma_\theta\setminus B(0,R_0)})$, $u\in\mathcal{D}_\theta$. Dans les coordonnées t,ω, on trouve pour $t>R_0$:

$$P_\theta=(f'(t)D_t)^2+(f(t)f'(t))^{-1}(n-1)iD_t+(f(t))^{-2}D_\omega{}^2,$$

où $D=i^{-1}\partial/\partial x$ et $-D_\omega{}^2$ désigne le laplacien sur $\mathbb{S}^{n-1}$. Le symbole principal devient $p_\theta=(\tau/f'(t))^2+(\omega^*/f(t))^2$ et nous voyons que p_θ est élliptique et prend ses valeurs dans le secteur fermé, $0\leq -\arg z\leq 2(\theta+\varepsilon_0)$. On remarque aussi que $P_\theta=-e^{-2i\theta}\Delta$ en dehors de $B(0,T_0)$ et que si $z\in\mathbb{C}\setminus e^{-2i\theta}[0,\infty[$, alors $|p_\theta(x,\xi)-z|\geq C(z)>0$ pour $|(x,\xi)|$ assez grand.

On montre:

1° Si $z\in\mathbb{C}\setminus e^{-2i\theta}[0,+\infty[$, alors $P_\theta-z\colon \mathcal{D}_\theta\to\mathcal{H}_\theta$ est un opérateur de Fredholm d'indice zero.

La détermination de l'indice résulte d'une déformation de (z,θ) en $(\tilde{z},0)$ avec Im $\tilde{z}>0$.) Utilisant des déformations locales de Γ_θ et des estimations à priori, on obtient:

2° Si $0\leq\theta_1<\theta_2<\pi$ et $z_0\in\mathbb{C}\setminus\{re^{-2i\theta};\ r\geq 0,\ \theta_1\leq\theta\leq\theta_2\}$, alors $\dim\ker(P_{\theta_1}-z_0)=\dim\ker(P_{\theta_1}-z_0)$ et les éléments des deux noyaux s'identifient par prolongement analytique à un voisinage de $\cup_{\theta_1\leq\theta\leq\theta_2}\Gamma_\theta$.

3° Le spectre de P_θ dans $\mathbb{C}\setminus e^{-2i\theta}[0,\infty[$ est un ensemble discret, et pour chaque z_0 dans ce spectre le projecteur $\pi_{z_0,\theta}$ défini comme dans (1.6) est de rang fini, indépendant de θ, pour des variations de θ comme dans 2°. De plus, le spectre de P_θ est contenu dans $\{0\}\cup\{z\neq 0;\ 0\leq -\arg z\leq 2\theta\}$ quand $\theta\geq\pi/2$ et dans $(]-\infty,0]\cap\sigma(P_0))\cup\{z\neq 0;\ 0\leq -\arg z\leq 2\theta\}$, quand $0\leq\theta<\pi/2$.

4° Si $u_{\theta_0}\in\mathcal{D}_{\theta_0}$, $(P_{\theta_0}-z)u_{\theta_0}=v$, où $v\in\mathcal{H}_\theta$ avec supp $v\subset B(0,R_0+a_0)$, $z\notin e^{-2i\theta_0}[0,\infty[$ alors on a une solution u_θ dans $\mathcal{D}_{\theta,\mathrm{loc}}$ de $(P_\theta-z)u_\theta=v$ pour $0\leq\theta\leq\theta_0$ (obtenu par prolongement holomorphe), et on a $u_{\theta_1}\in\mathcal{D}_{\theta_1}$ si $z\notin e^{-2i\theta}[0,\infty[$ pour θ entre θ_0 et θ_1.

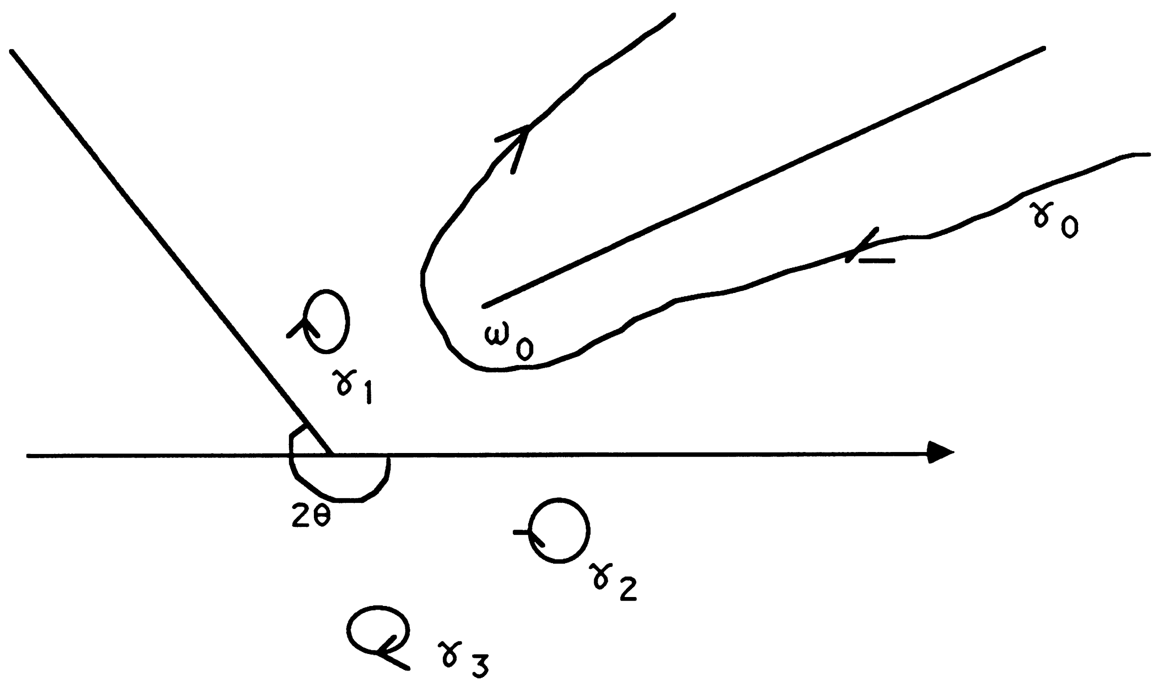
A l'aide de ces observations on montre que $(P-z)^{-1}\colon\mathcal{H}_{\mathrm{comp}}\to\mathcal{D}_{\mathrm{loc}}$ se prolonge méromorphiquement de $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$ à travers de $]0,+\infty[$ "par au dessus" à $\{z\in\mathbb{C};-2\pi<-\arg z<2\pi\}$, et les pôles sur le deuxième feuillet coïncident avec les valeurs propres des P_θ discutées ci dessus. De plus on peut identifier les multiplicités. De même on peut prolonger $(P-z)^{-1}$ à travers de $]0,+\infty[$ par en dessous, et en utilisant des propriétés de

$(-\Delta-z)^{-1}$ en dimension impaire on montre que les deux prolongements coïncident sur la "nouvelle" copie de $\mathbb{C}\setminus[0,+\infty[$. Ceci donne alors l'essentiel du Théorème 1.1, et permet aussi de caractériser les résonances comme les nombres λ tels que λ^2 est une valeur propre de P_θ dans le secteur $0\leq -\arg z<2\theta$ pour un θ convenable dans $[0,\pi[$. De plus on peut montrer que z est valeur propre de P_θ avec $0\leq -\arg z<2\theta<2\pi$ si et seulement si $\bar{z}$ est valeur propre de $P_{-\theta}$, où $P_{-\theta}$ se définit sur $\Gamma_{-\theta}=_{\mathrm{def.}}\overline{\Gamma_\theta}$ comme P_θ sur Γ_θ. Il suffit alors pour prouver le Théorème 1.2, de majorer convenablement le nombre de valeurs propres de P_θ dans l'intersection de $D(0,\lambda^2)$ et le demi-plan inférieur, pour un θ *fixé* dans $]\pi/2,3\pi/4[$.

3. Calcul fonctionnel. On introduit un petit paramètre $h>0$ et on remplacera dans la suite P_θ par h^2P_θ et $P=P_0$ par h^2P. Soit $\mathcal{D}^\alpha$ le domaine de $(1+P^2)^\alpha$ si $\alpha\geq 0$, et posons $\mathcal{D}^{-\alpha}=(\mathcal{D}^\alpha)^*$. Indépendamment du signe de $\alpha\in\mathbb{R}$, $\mathcal{D}^\alpha$ peut être muni de la norme $\|(P+i)^\alpha u\|_{\mathcal{H}}$. Soit $V=V_\theta=\{z\in\mathbb{C};\ |z|\geq\delta,\ 2\pi-2\theta-\delta\geq\arg z\geq\delta\}$ Choisissant Γ_θ en fonction de δ, on montre que pour $z\in V$, $\ell\in\mathbb{R}$:

$\|(P_\theta-z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^\ell,\mathcal{D}^{\ell+1})}+\langle z\rangle\|(P_\theta-z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{D}^\ell,\mathcal{D}^\ell)}\leq C_\ell$.

Soit F méromorphe dans $\mathbb{C}\setminus(\omega_0+e^{i\delta_0}[0,+\infty[)$ pour un $\omega_0\in\mathcal{V}$ et $\delta_0\in]\delta,2\pi-2\theta-\delta[$ avec un nombre fini de pôles, tous évitant le spectre de P_θ. Si $F=\mathcal{O}(\langle z\rangle^\rho)$ près de l'infini pour un $\rho<0$, on peut définir $F(P_\theta)=(2\pi i)^{-1}\int_\gamma F(z)(z-P_\theta)^{-1}dz$, $\gamma=\gamma_0\cup\gamma_1\cup..\cup\gamma_N$ avec les γ_j comme dans la *fig.*:



Ici γ_1, $\gamma_2,\dots,\gamma_N$ sont des petits cercles qui entourent les pôles de F qui ne sont pas entre γ_0 et la coupe $\omega_0+e^{i\delta_0}[0,+\infty[$. On choisit γ_0 contenu dans V. Si G a les mêmes propriétés que F, alors $(FG)(P_\theta)=F(P_\theta)G(P_\theta)$. Plus généralement si $F=\mathcal{O}(\langle z\rangle^\rho)$ près de l'infini pour un $\rho\in\mathbb{R}$, alors avec $k\in\mathbb{N}$ assez grand et avec $\omega_1,\ \omega_2,..,\omega_N$ convenablement choisis, on peut définir $F(P_\theta)=\tilde{F}(P_\theta)(P_\theta-\omega_1)\circ..\circ(P_\theta-\omega_k)$ avec $\tilde{F}(z)=F(z)/(z-\omega_1)\circ..\circ(z-\omega_k)$, et cette définition ne dépend pas du choix de $\omega_1,..,\omega_k$. On vérifie que $F(P_\theta)\in\mathcal{L}(\mathcal{D}^\ell,\mathcal{D}^{\ell-\rho-\varepsilon})$ pour tout $\varepsilon>0$ et si F n'a pas de pôles en dehors de V, alors on peut majorer la norme correspondante de $F(P_\theta)$ par une constante indépendante de h.

On a besoin d'approcher $F(P_\theta)$ par différents opérateurs selon les régions. Introduisons pour cela des classes d'opérateurs négligeables: $\mathcal{R}^\#=\{R:V\times]0,1]\ni(z,h)\mapsto R(z,h)\in\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$; pour tous $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, $N\in\mathbb{N}$, il existe $h(\alpha,\beta,N)$ tel que $R(z,h):\mathcal{D}^\alpha\to\mathcal{D}^\beta$ est de norme $\mathcal{O}(h^N/\langle z\rangle^N)$ pour $z\in V$, $0<h\le h(\alpha,\beta,N)\}$. De manière analogue, on définit une classe $\mathcal{R}$ d'opérateurs indépendants de z. Soit $\tilde{P}_\theta=-\Delta_{\Gamma_\theta}$, $\hat{P}_\theta=-e^{-2i\theta}\Delta$.

Proposition 3.1. Soient $R_0<r_1<r_2<\infty$ tels qu'il existe $\delta>0$ tel que $P_\theta u=P_0u$ si $\operatorname{supp}u\subset B(0,r_1+\delta)$, $P_\theta u=\hat{P}_\theta u$ si $\operatorname{supp}u\subset\mathbb{R}^n\setminus B(0,r_2-\delta)$.

(A) Si $\chi\in C_0^\infty(B(0,r_1))$ est constant dans un voisinage de $\overline{B(0,R_0)}$, alors

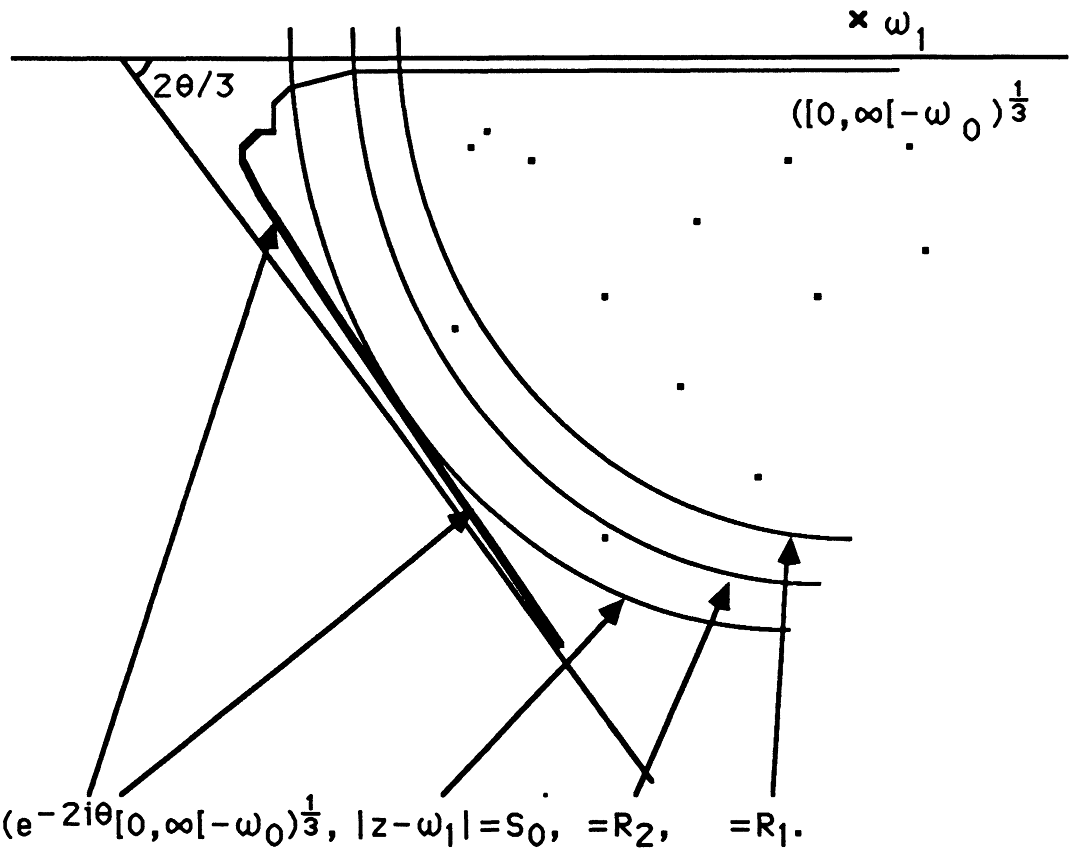
$(z-P_\theta)^{-1}\chi=(z-P_0)^{-1}\chi+R(z)\chi$ avec $R\in\mathcal{R}^\#$.

(B) Si $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,R_0)})$ et si $\psi \in C_0^\infty$ vaut 1 près de $\overline{B(0,R_0)}$ et $\operatorname{supp}\psi \cap \operatorname{supp}\chi = \emptyset$, alors $(z-P_\theta)^{-1}\chi = (1-\psi)(z-\tilde{P}_\theta)^{-1}\chi + R(z)\chi$ avec $R \in \mathcal{R}^\#$.

(C) Si $\chi \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ est à support dans $\mathbb{R}^n \setminus \overline{B(0,r_2)}$ et ψ est comme dans (B), alors $(z-P_\theta)^{-1} = (1-\psi)(z-\hat{P}_\theta)\chi + R(z)\chi$, avec $R \in \mathcal{R}^\#$.

On trouve ensuite un résultat analogue pour approcher $(P_\theta - \omega_0)^\gamma \chi$ avec des erreurs $R\chi$, $R \in \mathcal{R}$. Soient $\mathcal{R}_1{}^\# \subset \mathcal{R}^\#$, $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}$ les classes obtenues en remplaçant les espaces $\mathcal{L}(\mathcal{D}^\alpha, \mathcal{D}^\beta)$ dans les définitions par les espaces d'opérateurs à trace $\mathcal{D}^\alpha \longrightarrow \mathcal{D}^\beta$ munis de la norme trace correspondante. Dans la démonstration de la Proposition 3.1 on peut dans chaque cas faire apparaitre des troncatures à support compact, et de ce fait on peut dans les conclusions remplacer l'espace $\mathcal{R}^\#$ par l'espace $\mathcal{R}_1{}^\#$. De même dans les approximations de $(P_\theta - \omega_0)^\gamma$ on peut avoir des erreurs de classe $\mathcal{R}_1$.

4. Fin de la démonstration. Soit $\operatorname{Im}\omega_1 > 0$ et considérons $(P_\theta - \omega_0)^{\frac{1}{3}}$, où on choisit la branche de $z^{\frac{1}{3}}$ sur $\mathbb{C} \setminus e^{i\delta_0}[0,+\infty[$ qui est positive sur $]0,+\infty[$. On peut montrer que le spectre de $(P_\theta - \omega_0)^{\frac{1}{3}}$ s'obtient de celui de P_θ par l'application $z \mapsto (z-\omega_0)^{\frac{1}{3}}$. Déssinons cette image:



Ici on a choisi ω_1 avec $\mathrm{Im}\,\omega_1>0$ proche de l'axe réel et loin à droite, S_0 désigne la distance de ω_1 à l'image de $e^{-2i\theta}[0,\infty[$, et les points indiquent les valeurs propres de $(P_\theta-\omega_0)^{\frac{1}{3}}$.

Soit $Z_\theta=(P_\theta-\omega_0)^{\frac{1}{3}}-\omega_1$. On voit d'abord que Z_θ admet un inverse qui est borné dans $\mathcal{H}$ uniformement par rapport à h. Soit $\mu_1\le\mu_2\le\dots$ une énumération de d'abord toutes les valeurs propres de $B_\theta=(Z_\theta^* Z_\theta)^{\frac{1}{2}}$ en dessous du spectre essentiel, et ensuite dans le cas où ces valeurs sont en nombre fini N: $\mu_j=\inf\sigma_{ess}(B_\theta)$, pour $j>N$. Comme Z_θ^{-1} est borné on a $\mu_1\ge r>0$ pour un r qui est indépendant de h. On choisit R_1, R_2 avec $r<R_1<R_2<S_0$ et le problème qui nous intéresse est de majorer le nombre de valeurs propres de Z_θ dans le disque $D(0,R_1)$. Pour celà, on va majorer le nombre des μ_j avec $\mu_j\le R_2$.

Soient B_0, $\tilde{B}_\theta$, $\hat{B}_\theta$ les opérateurs définis comme B_θ en remplaçant P_θ par P_0, $\tilde{P}_\theta$ et $\hat{P}_\theta$ respectivement. Si Ω est un ensemble borné dans $\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ on introduit la classe des opérateurs négligeables suivante:
$\mathcal{R}_1^{\S}=\{R:\Omega\times]0,1[\longrightarrow\mathcal{L}(\mathcal{H},\mathcal{H})$; $\forall N\in\mathbb{N},\alpha,\beta\in\mathbb{R},\exists M\in\mathbb{N}$ et $h(\alpha,\beta,N)>0$ tels que

$R(z,h): \mathcal{D}^{\alpha} \to \mathcal{D}^{\beta}$ est à trace et la norme trace est $=\mathcal{O}_{\alpha,\beta,N}(h^N|\mathrm{Im}\, z|^{-M})$ pour $0<h<h(\alpha,\beta,N)\}$. On montre alors la

Proposition 4.1. Avec χ,ψ comme dans les cas (A),(B),(C) de la Proposition 3.1, on a respectivement modulo $\mathcal{R}_1^{\S}$:

(A) $(B_\theta-z)^{-1}\chi \equiv (B_0-z)^{-1}\chi$,

(B) $(B_\theta-z)^{-1} \equiv (1-\psi)(\tilde{B}_\theta-z)^{-1}\chi$

(C) $(B_\theta-z)^{-1} \equiv (1-\psi)(\hat{B}_\theta-z)^{-1}\chi$.

Comme on la formule ([HS])

(4.1) $f(P_{B_\theta})=-\pi^{-1}\int\tilde{f}(z)(z-B_\theta)^{-1}L(dz)$

pour $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, où $\tilde{f}$ désigne une extension presque analytique de f et $L(dz)=dx\,dy$, et de même avec B_θ remplacé par B_0 et c, on obtient un résultat d'approximation pour $f(B_\theta)$ analogue à la Proposition 4.1, avec $\mathcal{R}_1^{\S}$ remplacé par $\mathcal{R}_1$. On peut alors trouver χ_0, $\chi_1\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\chi_2\in C_b^\infty$, avec $\mathrm{supp}\,\chi_j\cap\overline{B(0,R_0)}=\emptyset$ pour $j=1,2$ et $1=\chi_0+\chi_1+\chi_2$ et tels que pour tout $f\in C_0^\infty(\mathbb{R})$:

(4.2) $f(B_\theta)\equiv f(B_0)\chi_0+(1-\psi_1)f(\tilde{B}_\theta)\chi_1+(1-\psi_2)f(\hat{B}_\theta)\chi_2 \mod \mathcal{R}_1$.

Ici $\psi_j\in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ vaut 1 près de $\overline{B(0,R_0)}$ et $\mathrm{supp}\,\psi_j\cap\mathrm{supp}\,\chi_j=\emptyset$. On voit que $f(B_0)$ est de la forme $g(P_0)$ pour un $g\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et donc $\mathrm{tr}\, f(B_0)\chi_0=\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$.
Le spectre de $\hat{B}_\theta$ est $\{|(e^{-2i\theta}t-\omega_0)^{\frac{1}{3}}-\omega_1|;\ t\geq 0\}=[S_0,+\infty[$. Si $f\in C_0^\infty(]-\infty,S_0[)$ on a donc $f(\hat{B}_\theta)=0$, et

(4.3) $f(B_\theta)=\mathrm{tr}(1-\psi_1)f(\tilde{B}_\theta)\chi_1 + \mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$.

En utilisant un peu de calcul pseudodifférentiel, on montre d'abord que $\tilde{Z}_\theta$ est un opérateur h-pseudodifférentiel d'ordre 0 en h dont le symbole est de classe $S^{2/3}_{0,0}$. Alors $\tilde{B}_\theta$ est un opérateur du même type de symbole principal $|(p_\theta-\omega_0)^{\frac{1}{3}}-\omega_1|$ qui prend ses valeurs dans $[S_0,+\infty[$ sauf pour (x,ξ) dans un compact. Sans être obligé d'analyser $f(\tilde{B}_\theta)$ en tant qu'opérateur pseudodifférentiel, on arrive à montrer que $f(\tilde{B}_\theta)\chi_1$ est à trace et que la norme corréspondante est $\mathcal{O}(h^{-n})$. Donc on obtient:

(4.4) $\operatorname{tr} f(B_\theta)=\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$.

Soit $r<R_1<R_2<S_0$ où $r>0$ est indépendant de h et vérifie $r\leq\mu_1$. Alors (4.4) entraine que le nombre M de valeurs propres $\leq R_2$ de B_θ est $\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$. Soit N le nombre de valeurs propres de module $\leq R_1$ de Z_θ comptées avec leur multiplicité, et soient $z_1,\dots,z_N$ ces valeurs propres rangées telles que $j\mapsto |z_j|$ soit croissant. Nous avons alors l'inégalité de Weyl (vérifiée dans le cadre présent dans [S]):

(4.5) $\mu_1\cdot\mu_2\cdot\ldots\cdot\mu_N\leq |z_1|\cdot|z_2|\cdot\ldots\cdot|z_N|$.

Nous allons montrer que

(4.6) $N=\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$.

Si $N\leq M$, il n'y a rien à démontrer. Si non, on obtient de (4.5) $r^M R_2^{N-M}\leq R_1^N$, d'où $N\leq[\log(R_2/r)/\log(R_2/R_1)]M=\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$, et on a donc (4.6). Choisissant convenablement les paramêtres ω_1, R_1, R_2 on peut maintenant remonter à P_θ et montrer que le nombre de valeur propres dans un semi-anneau: $\{z\in\mathbb{C};\ \operatorname{Im} z\leq 0,\ R\leq|z|\leq R+1\}$ pour un $R>0$ convenable, est $\mathcal{O}(h^{-\tilde{n}})$. Se débarrassant finalement de h et estimant une somme géométrique, on arrive à majorer le nombre de valeurs propres de P_θ dans $\{|z|\leq R\}\cup\{\operatorname{Im} z\leq 0\}$ par $R^{n/2}$. Comme d'autre part les valeurs propres de $P_{-\theta}$ sont les complexes conjuguées de celles de P_θ et comme la réunion des valeurs propres de P_θ et de $P_{-\theta}$ pour $\theta\in]\pi/2,3\pi/4[$ est l'ensemble des carrés des résonances, on trouve bien la majoration énoncée dans le Théorème 1.2.

Bibliographie.

[HS] *B.Helffer, J.Sjöstrand,* On diamagnetism and de Haas-van Alphen effect, Ann. I.H.P.(physique théorique) 52(4)(1990),303-375.

[Hu] *W.Hunziker*, Distorsion analyticity and molecular resonance curves, Ann. de l'I.H.P.(physique théorique)(1986).

[M1] *R.Melrose*, Polynomial bounds on the distribution of poles in scattering by an obstacle. Jourées "Equations aux dérivées partielles", Saint Jean de Monts, 1984.

[M2] *R.Melrose*, Growth estimates for the poles in potential scattering, travail non-publié.

[S] *J.Sjöstrand*, Geometric bounds on the density of resonances in semiclassical problems, Duke Math. J. 60(1)(1990),1-57.

[SZ] *J.Sjöstrand, M.Zworski*, Complex scaling and the distribution of scattering poles, en préparation.

[V] *G.Vodev*, Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles for metric perturbations of the Laplacian in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 3$ odd, prépublication (1990).

[Z1] *M.Zworski*, Distribution of poles for scattering on the real line, J. of Funct. Anal. 73(2)(1987),277-296.

[Z2] *M.Zworski*, Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles of radial potentials, J. of Funct. Anal. 82(2)(1989),370-403.

[Z3] *M.Zworski*, Sharp polynomial bounds on the number of scattering poles, Duke Math. J. 59(2)(1989),311-323.

Dépt. de mathématiques
Université de Paris Sud
F-91405 Orsay,
et URA 760 CNRS