Serge Alinhac

Approximation et temps de vie des solutions des équations d'Euler isentropiques en dimension deux d'espace

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. n^{o} 7, p. 1-20

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1990-1991

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

APPROXIMATION ET TEMPS DE VIE DES SOLUTIONS DES EQUATIONS D'EULER ISENTROPIQUES EN DIMENSION DEUX D'ESPACE

par Serge ALINHAC

Exposé n°VII

19 Février 1991

Approximation et temps de vie des solutions des équations d'Euler isentropiques en dimension deux d'espace

SERGE ALINHAC
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
F-91405 ORSAY CEDEX

Introduction

1. En dimension deux d'espace, les équations d'Euler incompressibles (qui gouvernent les fluides) possèdent des solutions classiques globales en temps. En revanche, les solutions des équations d'Euler compressibles (qui gouvernent les gaz) ne peuvent, en général, rester classiques pour tout temps, comme l'a montré SIDÉRIS **[16]**. Néanmoins, le temps de vie et l'allure de ces solutions ne semblent pas avoir été étudié de façon précise, même dans les cas les plus simples.

Le but du présent exposé est de décrire les résultats obtenus dans **[1]** et **[2]**, où l'étude se limite au cas isentropique (avec une loi d'état quelconque) à données initiales invariantes par rotation.

Cette dernière restriction est liée aux considérations suivantes : l'étude du comportement asymptotique des solutions dans le cas compressible fait intervenir des solutions de mêmes données des équations incompressibles ; bien que celles-ci soient classiques pour tout temps, leur allure globale semble très mal comprise. On est donc conduit à se placer dans la situation où les solutions des équations incompressibles dont on a besoin sont stationnaires, ce qui est le cas pour des données invariantes par rotation.

2. Les équations d'Euler isentropiques en dimension deux forment un système quasi-linéaire hyperbolique à trois inconnues, la vitesse v ($v = (v_1, v_2) \in \mathbf{R}^2$) et la densité ρ. Les deux valeurs propres extrêmes de ce système sont vraiment non linéaires (au sens de LAX **[13]**), et l'on peut penser le sous-système 2×2 qui leur correspond comme qualitativement équivalent à une équation d'onde non-linéaire qui gouvernerait la densité ρ et la divergence d de v.

La valeur propre centrale est linéairement dégénérée (voir par exemple MAJDA **[14]**), et l'équation scalaire correspondante gouverne le tourbillon $\omega = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1$ de v.

Bien entendu, ces équations sont couplées, mais certains travaux (par exemple MAJDA et ROSALES [15] en dimension un, ou CHEMIN [4] pour l'étude des singularités) laissent supposer un couplage plus faible que ce que l'on pourrait attendre a priori. Les équations d'onde non linéaires semblant dorénavant bien comprises (cf. par exemple KLAINERMAN [12], HÖRMANDER [9]), l'essentiel du travail portera donc sur l'étude de ce couplage.

3. La méthode de preuve utilisée dans [1], [2] est adaptée de HÖRMANDER [8] : construction d'une solution approchée (v_{app}, ρ_{app}) (par les techniques dites d'"optique géométrique non linéaire" cf. par exemple [6], [15]), puis estimation des restes à l'aide d'inégalités d'énergie établies pour l'opérateur linéarisé sur (v_{app}, ρ_{app}).

La difficulté provient du fait que les termes contenant le tourbillon ω, qui sont essentiellement stationnaires, empêchent l'utilisation des "champs Z" de KLAINERMAN [12], qui sont seulement adaptés à la partie "équation d'onde" du système.

Cette difficulté est le reflet du phénomène physique suivant : la densité ρ et la divergence d gardent, à l'endroit de la perturbation initiale, des valeurs bien supérieures aux valeurs qu'elles auraient dans le cas irrotationnel; l'"effet de tourbillon" retient le gaz localement.

On est donc obligé de calculer une solution approchée beaucoup plus précise que ce qui suffit habituellement, ce qui entraîne quelques complications techniques (notamment à cause de l'absence de lacune en dimension deux, cf. §.3).

L'estimaion des restes, qui conduit à une borne inférieure du temps de vie des solutions, repose sur une variante de l'inégalité d'énergie pour l'équation des ondes dans le cas où le second membre est de moyenne (spatiale) nulle. Cette variante, ainsi que le principe de l'estimation qui en résulte, sont présentés au §.4.

Enfin, une borne supérieure du temps de vie est obtenue assez facilement en suivant l'argument de JOHN [10], [11] et en utilisant les résultats déjà obtenus sur l'allure de la solution en grand temps (§.5).

1. Notations et résultats.

1.1. Nous considérons, pour $(x,t) \in \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}_+$, le système des équations d'Euler compressibles isentropiques

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho v) = 0 \\ \partial_t v + (v\nabla)v = -\dfrac{\nabla p}{\rho} = -\dfrac{c^2(\rho)}{\rho}\nabla\rho \end{cases} \tag{1.1.1}$$

où $v = (v_1, v_2)$ désigne la vitesse et où la pression p est supposée être une fonction connue de la densité ρ, avec $c^2(\rho) = \dfrac{dp}{d\rho} > 0$. On posera dans la suite $f(\rho) = \dfrac{c^2(\rho)}{\rho}$.

On choisira comme données initiales

$$(1.1.2)\qquad \begin{cases} \rho(x,0) = \bar\rho + \varepsilon\,\rho_1^0(x)\ ,\ \bar\rho > 0 \text{ constante },\\ v(x,0) = \varepsilon\, v_1^0(x) \end{cases}$$

où v_1^0 et ρ_1^0 sont C^∞, nulles pour $|x| \geq R_0$, indépendantes de $\varepsilon > 0$.

Enfin, en notant $v_1^0(x) = v_r \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + v_\theta \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, on supposera

(1.1.3) les fonctions ρ_1^0, v_r et v_θ sont C^∞ et dépendent seulement de $|x| = r$.

Soit $T_\varepsilon > 0$ le temps de vie de la solution (ρ, v) de (1.1.1), (1.1.2), (1.1.3).

Le premier résultat donne une valeur approchée de T_ε.

THÉORÈME 1.1. *Soit*

$$R(\sigma) = \frac{-1}{2\sqrt{2}\pi} \int_{s\geq\sigma} \frac{1}{\sqrt{s-\sigma}} \left[\bar\rho\,\widetilde{R}(s, \operatorname{div} v_1^0) + c(\bar\rho)\frac{d}{ds}\widetilde{R}(s,\rho_1^0)\right] ds$$

où $\widetilde{R}(s,f) = \int_{x\omega=s} f(x)dx$ *est la transformée de Radon d'une fonction* f *(invariante par rotation).*

Supposons ρ_1^0 *et* $d_1^0 = \operatorname{div} v_1^0$ *non toutes deux identiquement nulles, et soit* $\sigma_0 \leq R_0$ *un point où* $+R'(\sigma_0)$ *est minimum : on a* $R'(\sigma_0) < 0$ *; posons* $\tau_* = \dfrac{1}{\mu}\dfrac{1}{-R'(\sigma_0)}$, *où* $\mu = \dfrac{2}{\bar\rho\sqrt{\bar c}}(\bar\rho c'(\bar\rho) + c(\bar\rho)) > 0$. *Alors* $\lim_{\varepsilon\to 0_+} \varepsilon^2 T_\varepsilon = \tau_*^2$.

Remarquons que la quantité $\bar\rho c'(\bar\rho) + c(\bar\rho)$ qui intervient dans le théorème est toujours positive, ce qui équivaut à dire que les valeurs propres extrêmes de (1.1.1) sont vraiment non linéaires (cf. par exemple [**5**]).

1.2. Description de la solution approchée et estimation des restes.

On peut affiner le théorème 1.1 en donnant, pour tout $A < \tau_*$, une description de l'allure de la solution de (1.1.1), (1.1.2) pour $0 \leq t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ $(0 < \varepsilon \leq \varepsilon_A)$.

a. *La solution approchée* ρ_{app}, v_{app}.

Comme la solution (ρ, v) est "invariante par rotation" (au sens de (1.1.3)), on écrira toujours

$$(1.2.1)\qquad d = \operatorname{div} v\,,\ \omega = \operatorname{rot} v = \partial_1 v_2 - \partial_2 v_1\,,\ \text{ et }\ v = v^d + v^\omega,$$

où $v^d = I(d)\,\dfrac{x}{r}$, $v^\omega = I(\omega)\,\dfrac{x^\perp}{r}$, $x^\perp = \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$, et

$I(f) = \dfrac{1}{r}\displaystyle\int_0^r s\,f(s)\,ds\,.$

On décrira donc ici $d_{app} = \operatorname{div} v_{app}$, $\omega_{app} = \operatorname{rot} v_{app}$ plutôt que v_{app} lui même.

Dans toute la suite, on distinguera deux zones I et II, définies par $t \leq 2\varepsilon^{-6/5}$ et $t \geq \varepsilon^{-6/5}$ respectivement; le "raccord" entre des fonctions définies en zones I et II se fera à l'aide d'une troncature $\theta = \theta(t\varepsilon^{6/5})$, où $\theta \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\theta(s) = 1$ pour $s \leq 1$, $\theta(s) = 0$ pour $s \geq 2$.

Par ailleurs, l'absence de lacune en dimension deux pour l'équation des ondes conduit à introduire une troncature "conique" $\chi = \chi\left(\dfrac{r}{\bar{c}(1+t)}\right)$, où $\chi \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\chi(s) = 0$ pour $s \leq \dfrac{1}{2}$, $\chi(s) = 1$ pour $s \geq \dfrac{2}{3}$.

i) En zone I, les solutions ρ^I_{app} et d^I_{app} sont de la forme

$$\rho^I_{app} = \bar\rho + \varepsilon\,\rho^I_1 + \varepsilon^2\,\rho^I_2 + \varepsilon^3\,\rho^I_3\ ,\quad d^I_{app} = \varepsilon\,d^I_1 + \varepsilon^2\,d^I_2 + \varepsilon^3\,d^I_3\ ,$$

avec (en omettant pour alléger les "I")

$$\begin{aligned}
d_1 &= -\frac{1}{\bar\rho}\,\partial_t\rho_1\ ,\\
d_2 &= -\frac{1}{\bar\rho}\left[\partial_t\rho_2 + \rho_1\,d_1 + I(d_1)\,\rho_1'\right]\ ,\\
d_3 &= -\frac{1}{\bar\rho}\left[\partial_t\rho_3 + \rho_1\,d_2 + I(d_2)\,\rho_1' + \rho_2\,d_1 + I(d_1)\,\rho_2'\right]\ ,
\end{aligned}$$

où dorénavant $f' = \dfrac{\partial f}{\partial r}$ pour une fonction $f(x,t)$ invariante par rotation.

Les composantes ρ_i sont définies comme suit :

- $$\Box\rho_1 = 0\ ,\quad \rho_1|_{t=0} = \rho_1^0\ ,\quad \partial_t\rho_1\Big|_{t=0} = -\bar\rho\,\operatorname{div} v_1^0\ ,$$

où (par abus) $\Box = \partial_t^2 - \bar{c}^2\,\Delta_x$.

- $$\rho_2 = \psi(x) + \rho_2 - \psi(x)\ ,$$

où

$$\psi(x) = -\frac{\bar\rho}{\bar{c}^2}\int_r^{R_0} \left[I(\omega_1^0)\right]^2\,\frac{ds}{s}\ ,$$

et

$$\Box(\rho_2 - \psi(x)) = \bar\rho\left[\left(\frac{I(d_1)}{r}\right)^2 + (I'(d_1))^2\right] + (f+\rho f')\,\rho_1\,\Delta\rho_1 + \rho f'\,|\nabla\rho_1|^2 - \partial_t I(d_1)\,\rho_1' - 2I(d_1)\,\partial_t\rho_1' - \partial_t\rho_1\,d_1\ ,$$

$$[\rho_2 - \psi(x)]\Big|_{t=0} = -\psi(x) \ , \quad \partial_t(\rho_2 - \psi(x))\Big|_{t=0} = -\rho_1^0 d_1^0 - v_1^0 \nabla \rho_1^0 \ .$$

Ici comme plus loin, il est entendu que des coefficients tels que $f + \rho f'$ sont toujours calculés pour $\rho = \bar{\rho}$.

- $$\rho_3 = [1 - \theta(t)]\mu^2 \frac{t}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi r^{1/2} (R^2 R')(r - \bar{c}t)\right) \ ,$$

μ et $R(\sigma)$ étant définis au théorème 1.1.

Le terme $\bar{\rho} + \varepsilon \rho_1$ est la solution du problème linéarisé, tandis que $\varepsilon^2 \rho_2$ prend en compte la partie quadratique des interactions entre les solutions du problème linéarisé, etc ...

On peut montrer que, pour t grand sur le support de χ,

$$\rho_1 \sim \frac{R(r - \bar{c}t)}{r^{1/2}} \tag{1.2.2}$$

$$\rho_2 - \psi(x) + \mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\chi r^{1/2} R^2 (r - \bar{c}t)\right) \sim \frac{L(r - \bar{c}t)}{r^{1/2}} \ , \tag{1.2.3}$$

où $|L(\sigma)| \leq C(1 + |\sigma|)^{1/2}$, $L(\sigma) = 0$ pour $\sigma \geq R_0$.

ii) En zone II, on introduit la variable de temps lent $\tau = \varepsilon\sqrt{t}$, et on module les "profils" R et L qui apparaissent en (1.2.2), (1.2.3) selon les équations

$$\begin{cases} \dfrac{\partial R}{\partial \tau} + \mu R \dfrac{\partial R}{\partial \sigma} = 0 \\ R(\sigma, 0) = R(\sigma) \ . \end{cases} \tag{1.2.4}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \tau} + \mu \dfrac{\partial}{\partial \sigma}(RL) = 0 \\ L(\sigma, 0) = L(\sigma) \ . \end{cases} \tag{1.2.5}$$

On remarquera que seule (1.2.4) est non linéaire, et que τ_* est le temps de vie de la solution classique de donnée initiale $R(\sigma)$.

Posons alors

$$S(\sigma, \tau) = -\mu\tau \int_0^1 \frac{R^2}{2}(\sigma, s\tau) ds \ , \tag{1.2.6}$$

$$K(\sigma, \tau) = -\mu\tau \int_0^1 (RL)(\sigma, s\tau) ds \ . \tag{1.2.7}$$

Les solutions ρ_{app}^{II} et d_{app}^{II} sont choisies de la forme

$$\rho_{app}^{II} = \bar{\rho} + \varepsilon \rho_1^{II} + \varepsilon^2 \rho_2^{II} \ , \quad d_{app}^{II} = \varepsilon d_1^{II} + \varepsilon^2 d_2^{II} \ ,$$

avec $d_1^{II} = -\frac{1}{\bar{\rho}} \partial_t \rho_1^{II}$, $d_2^{II} = -\frac{1}{\bar{\rho}} [\partial_t \rho_2 + \rho_1 d_1 + I(d_1) \rho_1']^{II}$ comme en zone I.

Les composantes sont définies en zone II par

$$\rho_1^{II} = \rho_1^I + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi r^{1/2} S(r-\bar{c}t,\tau)\right)$$

$$\rho_2^{II} = \rho_2^I + \mu\frac{\sqrt{t}}{2r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi r^{1/2} R^2(r-\bar{c}t)\right) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\chi r^{1/2} K(r-\bar{c}t,\tau)\right) \ .$$

iii) Au total, on notera

$$\rho_{app} = \theta\rho_{app}^I + (1-\theta)\rho_{app}^{II} \ , \quad d_{app} = \theta d_{app}^I + (1-\theta) d_{app}^{II} \ ,$$

et l'on choisira $\omega_{app} = \varepsilon\omega_1^0 - \varepsilon^2 \int_0^t \left[\omega_1^0 d_1 + (\omega_1^0)' I(d_1)\right] ds$, où $d_1 = d_1^I$ est défini en i).

On remarque que $\omega_{app}(x,t) = 0$ si $|x| \geq R_0$.

b. *Estimation des restes.*

La fonction (ρ, v) étant la solution classique de (1.1.1), (1.1.2), les restes $\rho - \rho_{app}$, $d - d_{app}$, $\omega - \omega_{app}$ sont estimés dans le théorème suivant.

THÉORÈME 1.2. *Il existe $\nu > 0$ et, pour tout $0 < A < \tau_*$, il existe des nombres $\varepsilon_A > 0$, $C_A \geq 0$, $R_A \geq 0$ tels que la solution (ρ, v) est classique pour $t \leq \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$ si $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_A$, et*

$$\|\rho - \rho_{app}\|_0 \leq \varepsilon^{2+\nu} \ , \quad |\nabla_{x,t}(\rho - \rho_{app})|_2 \leq \varepsilon^{2+\nu} \ , \tag{1.2.8}$$

$$|d - d_{app}|_2 \leq \varepsilon^{2+\nu} \ , \quad |\omega - \omega_{app}|_2 \leq C_A\varepsilon^3 t \ , \tag{1.2.9}$$

$$(\omega - \omega_{app})(x,t) = 0 \ \text{pour} \ |x| \geq R_A \ . \tag{1.2.10}$$

On a noté, ici comme plus tard, $\|f\|_\alpha = \|f(\cdot,t)\|_{C^\alpha(\mathbb{R}^2)}$, $|f|_s = |f(\cdot,t)|_{H^s(\mathbb{R}^2)}$.

Les quatre paragraphes suivants sont consacrés à une esquisse des preuves des théorèmes 1.1 et 1.2.

2. Solution approchée et solution exacte.

Précisons ici la méthode de preuve employée.

a. Il faut d'abord "diagonaliser" le système (1.1.1) : bien que cela puisse se faire directement à l'aide d'opérateurs pseudo-différentiels (ou mieux, paradifférentiels), il semble plus agréable d'introduire les inconnues $d = \operatorname{div} v$, $\omega = \operatorname{rot} v$. Le système (1.1.1) devient alors

$$\partial_t \rho + I(d)\rho' + \rho d = 0 \tag{2.1}$$

$$\partial_t d + I(d)\, d' + \left(\frac{I(d)}{r}\right)^2 + (I'(d))^2 - 2\,\frac{I(\omega)I'(\omega)}{r} + \frac{c^2(\rho)}{\rho}\Delta\rho + f'(\rho)\,|\nabla\rho|^2 = 0 \tag{2.2}$$

$$\partial_t \omega + I(d)\omega' + d\omega = 0\ . \tag{2.3}$$

Remarquons que $D_t f = (\partial_t + v\nabla)f = \partial_t f + v^d \nabla f = \partial_t f + I(d)f'$ pour $f = f(r,t)$.

b. Supposons construites des fonctions ρ_a, d_a, ω_a (qu'on souhaite, en un certain sens, solutions approchées de (2.1)-(2.3)) et posons

$$\rho = \rho_a + \widetilde{\rho}\ , \quad d = d_a + \widetilde{d}\ , \quad \omega = \omega_a + \widetilde{\omega}\ .$$

Les restes $\widetilde{\rho}$, $\widetilde{d}$ et $\widetilde{\omega}$ satisfont au système suivant, déduit de (2.1)-(2.3) :

$$D_t\widetilde{\rho} + \rho\widetilde{d} = -R_a - d_a\widetilde{\rho} - I(\widetilde{d})\,\rho_a' \tag{2.4}$$

$$\begin{aligned} &D_t\widetilde{d} + f(\rho)\Delta\widetilde{\rho} = \\ &- D_a - I(\widetilde{d})\,d_a' - \left[\frac{I(\widetilde{d})}{r^2}(I(\widetilde{d}) + 2I(d_a)) + I'(\widetilde{d})(I'(\widetilde{d}) + 2I'(d_a))\right] \\ &+ \frac{2}{r}\Big[I'(\widetilde{\omega})I(\omega) + I(\widetilde{\omega})I'(\omega_a)\Big] - \Big[f(\rho_a+\widetilde{\rho}) - f(\rho_a)\Big]\Delta\rho_a \\ &- \Big[f'(\rho_a+\widetilde{\rho}) - f'(\rho_a)\Big]\,|\nabla\rho_a + \nabla\widetilde{\rho}|^2 - f'(\rho_a)\Big[\,|\nabla\widetilde{\rho}|^2 + 2\nabla\rho_a\nabla\widetilde{\rho}\Big] \end{aligned} \tag{2.5}$$

$$D_t\widetilde{\omega} + \omega\widetilde{d} = -\Omega_a - d_a\widetilde{\omega} - I(\widetilde{d})\omega_a'\ . \tag{2.6}$$

Ici R_a, D_a et Ω_a désignent les valeurs des premiers membres des équations (2.1), (2.2), (2.3) respectivement, lorsque $\rho = \rho_a$, $d = d_a$, $\omega = \omega_a$.

c. Il importe de respecter ici les lois de conservations du système d'Euler.

La solution $((\rho - \bar{\rho}), v)$ est à support dans $|x| \le \bar{c}t + R_0$, et, pour tout t,

$$\int (\rho - \bar{\rho})\,dx = \varepsilon \int \rho_1^0(x)\,dx = \text{cte}\,, \quad \int d(x)\,dx = 0\,, \quad \int \omega(x)\,dx = 0\,. \tag{2.7}$$

Nous supposerons donc que les fonctions ρ_a, d_a, ω_a dont on part, satisfont aussi

$$\rho_a - \bar{\rho}\ ,\ d_a\ ,\ \omega_a \text{ sont à supports dans } |x| \le \bar{c}t + R_0 \tag{2.8}$$

(2.9) $$\int(\rho_a-\bar{\rho})\,dx=\text{cte}\ ,\quad \int d_a\,dx=0\ ,\quad \int \omega_a\,dx=0\ .$$

On supposera de plus que les valeurs initiales sont correctes

(2.10) $$\begin{aligned}&\rho_a|_{t=0}=\rho|_{t=0}=\bar{\rho}+\varepsilon\,\rho_1^0,\quad d_a|_{t=0}=d|_{t=0}=\varepsilon\,d_1^0,\\ &\omega_a|_{t=0}=\omega|_{t=0}=\varepsilon\omega_1^0,\quad R_a|_{t=0}=0\ .\end{aligned}$$

Remarquons ici (nous y reviendrons au §.3) que la solution approchée décrite en 1.2.a. satisfait (2.8), (2.9) et (2.10).

d. Dans l'équation (2.4), si $\widetilde{\rho}=0$, on trouve

(2.11) $$\rho_a\widetilde{d}+I(\widetilde{d})\,\rho_a'=-R_a\ .$$

Il est facile de voir qu'une équation de ce type a pour unique solution

(2.11)$'$ $$\widetilde{d}=\frac{-R_a}{\rho_a}+\frac{\rho_a'}{\rho_a^2}\,\frac{I(-R_a)}{r}\ ,$$

et que si R_a est à support dans $|x|\le R$ et de moyenne nulle, il en est de même de $\widetilde{d}$.

Soit donc $\widetilde{d}_a$ la solution (de moyenne nulle) de (2.11) : on pose $\widetilde{d}=\widetilde{d}_a+\dot{d}$, et (2.4) s'écrit maintenant

(2.4)$'$ $$D_t^a\widetilde{\rho}+\rho\dot{d}+\widetilde{\rho}(d_a+\widetilde{d}_a)+I(\dot{d})\,\rho'=0\ ,$$

où $D_t^a=\partial_t+I(d_a+\widetilde{d}_a)\partial_r$.

Si l'on définit alors $\widetilde{\omega}_a$ par

(2.12) $$\begin{cases}D_t^a\widetilde{\omega}_a+\widetilde{\omega}_a(d_a+\widetilde{d}_a)+\omega_a\widetilde{d}_a+\Omega_a+I(\widetilde{d}_a)\omega_a'=0\\ \widetilde{\omega}_a(x,0)=0\end{cases}$$

on remarque que $\widetilde{\omega}_a$ est de moyenne nulle, et en posant $\widetilde{\omega}=\widetilde{\omega}_a+\dot{\omega}$, on obtient

(2.6)$'$ $$D_t\dot{\omega}+\dot{\omega}(d_a+\widetilde{d}_a)=-\dot{d}\omega-I(\dot{d})(\omega_a+\widetilde{\omega}_a)'\ ,\ \dot{\omega}(x,0)=0\ .$$

Les équations (2.4)$'$ et (2.6)$'$ permettent de calculer $\dot{d}$ et $\dot{\omega}$ en fonction de $\dot{\rho}=\widetilde{\rho}$. En éliminant $D_t d$ entre D_t (2.4) et (2.5), on obtient alors l'équation fondamentale sur $\dot{\rho}$:

(2.13) $$\begin{aligned}D_t^2\dot{\rho}-c^2\Delta\dot{\rho}=&\\ &-(D_t\rho)\dot{d}-\widetilde{d}_a D_t\dot{\rho}-\widetilde{d}_a I(\dot{d})\rho_a'-I(\dot{d})R_a'-(D_t d_a)\dot{\rho}\\ &-d_a D_t\dot{\rho}-D_t^a(I(\dot{d})\rho_a')-I(\dot{d})(I(\widetilde{d})\rho_a')'+\dot{\rho}\left(D_a+G_a-\frac{2}{r}H_a\right)\\ &+\rho I(\dot{d})d_a'+\dot{\rho}I(\widetilde{d}_a)\rho_a'+\rho\,[f(\rho_a+\dot{\rho})-f(\rho_a)]\,\Delta\rho_a+\rho\,[f'(\rho_a+\dot{\rho})-f'(\rho_a)]\,|\nabla\rho|^2\\ &+\rho f'(\rho_a)(|\nabla\dot{\rho}|^2+2\nabla\rho_a\nabla\dot{\rho})+\rho[[\dot{d}]]-2\frac{\rho}{r}[[\dot{\omega}]]+F_a\ ,\end{aligned}$$

avec $\dot{\rho}=\partial_t\dot{\rho}=0$ sur $t=0$ grâce à (2.10).

On a utilisé ici les abréviations suivantes :

$$(2.14)\quad G_a = \frac{2}{r^2} I^2(\widetilde{d}_a) + \frac{4}{r^2} I(d_a) I(\widetilde{d}_a) + \widetilde{d}_a^2 + 2\left(d_a - \frac{I(d_a)}{r}\right)\widetilde{d}_a - \frac{2}{r}(d_a + \widetilde{d}_a) I(\widetilde{d}_a)$$

$$(2.14)'\quad [[\dot{d}]] = \frac{2}{r^2} I^2(\dot{d}) + \frac{4}{r^2} I(d_a + \widetilde{d}_a) I(\dot{d}) + \dot{d}^2 + 2\left(d_a + \widetilde{d}_a - \frac{I(d_a + \widetilde{d}_a)}{r}\right)\dot{d} - \frac{2}{r} d I(\dot{d})$$

$$(2.15)\quad H_a = (\omega_a + \widetilde{\omega}_a) I(\widetilde{\omega}_a) + \widetilde{\omega}_a I(\omega_a) - \frac{2}{r} I(\omega_a) I(\widetilde{\omega}_a) - \frac{1}{r} I^2(\widetilde{\omega}_a)$$

$$(2.15)'\quad [[\dot{\omega}]] = \omega I(\dot{\omega}) + \dot{\omega} I(\omega_a + \widetilde{\omega}_a) - \frac{2}{r} I(\omega_a + \widetilde{\omega}_a) I(\dot{\omega}) - \frac{1}{r} I^2(\dot{\omega})$$

$$(2.16)\quad F_a = \rho_a G_a - 2\frac{\rho_a}{r} H_a + I_a + J_a \ ,$$

$$(2.17)\quad I_a = -\widetilde{d}_a D_t^a \rho_a - D_t^a(I(\widetilde{d}_a)\rho_a') + \rho_a I(\widetilde{d}_a) d_a' - I(\widetilde{d}_a) R_a' \ ,$$

et enfin

$$(2.18)\quad J_a = \rho_a D_a - \partial_t R_a - I(d_a) R_a' \ .$$

Dans l'équation (2.13), on considère (grâce à (2.4)', (2.6)') tous les termes du second membre hormis F_a comme des fonctions de $\dot{\rho}$ nulles lorsque $\dot{\rho} = 0$. Le terme F_a dépend uniquement de (ρ_a, d_a, ω_a) et des ajustements $\widetilde{d}_a$, $\widetilde{\omega}_a$ définis en (2.11), (2.12).

Au mieux, on peut espérer que $\dot{\rho}$ aura l'allure de la solution de $\Box\dot{\rho} = F_a$: cela ne pourra en fait être établi que par le raisonnement habituel d'induction sur le temps (cf. par exemple [**8**]) qui suppose certaines estimations sur $\dot{\rho}$; les estimations correspondantes sur F_a donneront la mesure de la qualité d'approximation que devront atteindre les fonctions (ρ_a, d_a, ω_a).

Par exemple, on devra supposer (au §.4),

$$\int_0^{A/\varepsilon^2} \|\nabla\dot{\rho}\|_0 \, ds \leq 1 \ ; \quad \text{cela imposera} \quad \int_0^{A/\varepsilon^2} |F_a|_2 \, ds = o(\varepsilon^2), \ \text{etc} \ldots$$

3. Construction de la solution approchée.

Nous avons vu au §.2.d. quelles exigences devaient être satisfaites par des fonctions (ρ_a, d_a, ω_a) : comme on peut raisonnablement penser que les ajustements $\widetilde{d}_a$, $\widetilde{\omega}_a$ seront négligeables, on ne prêtera pas grande attention aux quantités G_a, H_a, I_a définies en (2.14), (2.15), (2.17); nous concentrerons nos efforts sur R_a, Ω_a et J_a (défini en (2.18)), la quantité D_a pouvant si nécessaire se déduire de J_a.

a. Le point de départ du calcul consiste à supposer

$$\begin{aligned}\rho_a &= \bar\rho + \varepsilon\rho_1 + \varepsilon^2\rho_2 + \varepsilon^3\rho_3\\ d_a &= \varepsilon d_1 + \varepsilon^2 d_2 + \varepsilon^3 d_3\\ \omega_a &= \varepsilon\omega_1\end{aligned}$$

et à obtenir les expressions correspondantes pour R_a, Ω_a, J_a.

Pour simplifier, nous n'expliciterons pas les termes qui s'avèreront (a posteriori) négligeables et les remplaceront par des " ... ".

On trouve alors

$$\begin{aligned}R_a &= \varepsilon(\partial_t\rho_1 + \bar\rho d_1) + \varepsilon^2(\partial_t\rho_2 + \bar\rho d_2 + I(d_1)\rho_1' + \rho_1 d_1)\\ &\quad + \varepsilon^3(\partial_t\rho_3 + \bar\rho d_3 + I(d_1)\rho_2' + d_1\rho_2 + I(d_2)\rho_1' + d_2\rho_1) + \varepsilon^4\ldots\\ \Omega_a &= \varepsilon\partial_t\omega_1 + \varepsilon^2(I(d_1)\omega_1' + d_1\omega_1) + \varepsilon^3(I(d_2)\omega_1' + d_2\omega_1) + \varepsilon^4\ldots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}J_a = -\varepsilon\Box\rho_1 + \varepsilon^2\Bigg\{ &-\Box\rho_2 + \bar\rho\left[\left(\frac{I(d_1)}{r}\right)^2 + (I'(d_1))^2\right] + (f+\rho f')\rho_1\Delta\rho_1 + \rho f'|\nabla\rho_1|^2\\ &- \partial_t I(d_1)\rho_1' - 2I(d_1)\partial_t\rho_1' - \partial_t\rho_1 d_1 - 2\frac{\bar\rho}{r}I(\omega_1)I'(\omega_1)\Bigg\}\\ +\varepsilon^3\Bigg\{ &-\Box\rho_3 + 2\frac{\bar\rho}{r^2}I(d_1)I(d_2) + 2\bar\rho I'(d_1)I'(d_2) + (\rho f' + f)(\rho_1\Delta\rho_2 + \rho_2\Delta\rho_1)\\ &+ 2\rho f'\nabla\rho_1\nabla\rho_2 - \partial_t I(d_1)\rho_2' - 2I(d_1)\partial_t\rho_2' - \partial_t I(d_2)\rho_1' - 2I(d_2)\partial_t\rho_1'\\ &- \partial_t\rho_1 d_2 - \partial_t\rho_2 d_1 + (f' + \tfrac{1}{2}\rho f'')\rho_1^2\Delta\rho_1 + (f' + \rho f'')\rho_1|\nabla\rho_1|^2\\ +\rho_1&\left[\left(\frac{I(d_1)}{r}\right)^2 + (I'(d_1))^2\right] - 2\frac{\rho_1}{r}I(\omega_1)I'(\omega_1) - I(d_1)(I'(d_1)\rho_1' + I(d_1)\rho_1'' + d_1\rho_1')\Bigg\}\\ +\varepsilon^4\Bigg\{ &\bar\rho\left[\left(\frac{I(d_2)}{r}\right)^2 + (I'(d_2))^2\right] + \rho f'|\nabla\rho_2|^2 + (\rho f' + f)\rho_2\Delta\rho_2\\ &- \partial_t I(d_2)\rho_2' - 2I(d_2)\partial_t\rho_2' - \partial_t\rho_2 d_2 - 2\frac{\rho_2}{r}I(\omega_1)I'(\omega_1) + \ldots\Bigg\}\\ +\varepsilon^5&\ldots\ .\end{aligned}$$

b. En zone I, on choisit $\omega_1 = \omega_1^0$, ρ_1, ρ_2, ρ_3 de façon à annuler les termes successifs de J_a, et d_1, d_2, d_3 pour annuler ceux de R_a.

Précisons un peu :

– Nous écrivons $\rho_2 = \psi(x) + \rho_2 - \psi(x)$, où $\psi(x)$ est la solution (stationnaire) de $\Box\psi(x) = -2\frac{\bar\rho}{r}I(\omega_1^0)I'(\omega_1^0)$, $\rho_2 - \psi(x)$ prenant en compte les autres termes quadratiques, notés ici $Q(\rho_1, d_1)$. Remarquons que $\psi(x)$ est à support compact : en effet, ω_1^0 étant à support compact et de moyenne nulle, $I(\omega_1^0)$ est à support compact ; il s'ensuit que $\frac{1}{r}I(\omega_1^0)I'(\omega_1^0)$ est à support compact et de moyenne nulle, donc ψ est à support compact (voir aussi la formule en 1.2.a.).

Compte tenu du fait que $\rho_1 \sim \frac{R}{r^{1/2}}$, $d_1 \sim \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} \frac{R'}{r^{1/2}}$, $I(d_1) \sim \frac{\bar{c}}{\bar{\rho}} \frac{R}{r^{1/2}}$, on peut calculer le terme principal $Q(\rho_1, d_1)$ en fonction de R et de ses dérivées ; le terme $-\mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r^{1/2} R^2(r - \bar{c}t))$ représente la contribution à $\rho_2 - \psi(x)$ de ce terme principal. Nous posons donc :

$$\rho_2 = \psi(x) - (1 - \theta(t)) \mu \frac{\sqrt{t}}{2r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r^{1/2} R^2(r - \bar{c}t)) + \rho_2^\ell + z \ ,$$

où ρ_2^ℓ est une solution libre de $\Box \rho_2^\ell = 0$ avec les traces convenables, et z vérifie (avec des traces nulles) $\Box w = W$, W étant essentiellement le terme Q privé de sa partie principale.

Une des difficultés techniques de la construction consiste à établir l'allure asymptotique de z, qui, en un certain sens, ressemble à une solution libre. Pour ce faire, il faut reprendre les approximations de [**7**], [**8**], en utilisant le bon comportement de W eu égard aux "champs $\mathbb{Z}$" de Klainerman [**12**]. Nous renvoyons le lecteur à [**1**] pour les détails, nous contentant ici de l'information (1.2.3).

– Le choix du terme ρ_3 vise seulement à annuler la partie principale du terme en ε^3 de J_a.

Bien sûr, on vérifie directement que $\int \rho_1 \, dx = \int \rho_1^0 \, dx$, $\int \rho_2 \, dx = 0$, $\int \rho_3 \, dx = 0$: l'écriture $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\chi r^{1/2} R^2(r - \bar{c}t))$ au lieu de $2 \frac{\chi}{r^{1/2}} R R' + \ldots$ permet de préserver ces lois de conservations pour les solutions approchées ρ_a, d_a, ω_a (cf. §.2).

c. Expliquons maintenant l'introduction de la variable τ de temps lent en zone II.

Comme $\frac{\partial}{\partial r} S = R(\sigma, \tau) - R(\sigma)$, on a

$$\rho_1^{II} = \rho_1^I + \chi \frac{R(r - \bar{c}t, \tau) - R(r - \bar{c}t)}{r^{1/2}} + \ldots = \frac{R(r - \bar{c}t, \tau)}{r^{1/2}} + \ldots \ ,$$

où comme d'habitude " ... " désigne des termes non essentiels.

On en déduit

$$\Box \rho_1^{II} = \frac{-\varepsilon \bar{c}}{\sqrt{rt}} \frac{\partial^2}{\partial \sigma \, \partial \tau} R(r - \bar{c}t, \tau) + \ldots \ ,$$

c'est-à-dire que le terme $-\varepsilon \Box \rho_1$ de J_a apporte une contribution $\frac{-\bar{c}}{\sqrt{rt}} \frac{\partial^2}{\partial \sigma \, \partial \tau} R$ au terme en ε^2 de J_a : l'équation (1.2.4) signifie simplement qu'on a choisit R en sorte que cette contribution annule la partie principale du terme $Q(\rho_1, d_1)$.

On procède de même pour L : avec les notations de b.,

$$\begin{aligned}\rho_2^{II} &= \psi(x) + \rho_2^{\ell} + z + \frac{L(r-\bar{c}t,\sigma) - L(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} + \dots \\ &= \psi(x) + \frac{L(r-\bar{c}t,\sigma)}{r^{1/2}} + \dots \ .\end{aligned}$$

Par conséquent $\Box\rho_2^{II} = -2\frac{\bar{\rho}}{r}I(\omega_1^0)I'(\omega_1^0) - \frac{\varepsilon\bar{c}}{\sqrt{rt}}\frac{\partial^2}{\partial\sigma\partial\tau}L(r-\bar{c}t,\tau) + \dots$ et (1.2.5) signifie qu'on a choisit L en sorte que la contribution du terme $-\varepsilon^2\Box\rho_2^{II}$ dans J_a annule la partie principale du terme en ε^3 de J_a.

La "disparition" du terme $\varepsilon^3\rho_3$ en zone II n'est bien sûr qu'une illusion ; en effet, en zone I,

$$\begin{aligned}\rho_a^I &= \bar{\rho} + \varepsilon\frac{R(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} + \varepsilon^2\psi(x) - \varepsilon^2\sqrt{t}\frac{\mu}{r^{1/2}}RR'(r-\bar{c}t) + \varepsilon^2\frac{L(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} \\ &\qquad + \varepsilon^3 t\frac{\mu^2}{2r^{1/2}}(R^2R')'(r-\bar{c}t) + \dots \\ &= \bar{\rho} + \varepsilon\left[\frac{R(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} - \tau\frac{\mu}{r^{1/2}}RR'(r-\bar{c}t) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\mu^2}{r^{1/2}}(R^2R')'(r-\bar{c}t)\right] \\ &\qquad + \varepsilon^2\frac{L(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} + \varepsilon^2\psi(x) + \dots \ .\end{aligned}$$

A cause de (1.2.4), $-\mu RR'(\sigma) = \frac{\partial R}{\partial\tau}(\sigma,0), \mu^2(R^2R')'(\sigma) = \frac{\partial^2 R}{\partial\tau^2}(\sigma,0)$, donc

$$\begin{aligned}\rho_a^I &= \bar{\rho} + \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}\left[R(r-\bar{c}t,0) + \tau\frac{\partial R}{\partial\tau}(r-\bar{c}t,0) + \frac{\tau^2}{2}\frac{\partial^2 R}{\partial\tau^2}(r-\bar{c}t,0)\right] \\ &\qquad + \varepsilon^2\frac{L(r-\bar{c}t)}{r^{1/2}} + \varepsilon^2\psi(x) + \dots \ .\end{aligned}$$

En zone II, d'après ce qui vient d'être dit,

$$\rho_a^{II} = \bar{\rho} + \frac{\varepsilon}{r^{1/2}}R(r-\bar{c}t,\tau) + \varepsilon^2\frac{L(r-\bar{c}t,\tau)}{r^{1/2}} + \varepsilon^2\psi(x) + \dots \ .$$

Il n'est donc pas étonnant qu'en posant $\rho_a = \theta\rho_a^I + (1-\theta)\rho_a^{II}$, le raccord se fasse sans problème, pourvu que τ soit assez petit sur supp θ' (ici, en fait, $\tau \sim \varepsilon^{2/5}$).

d. L'examen des autres termes de J_a est terriblement fastidieux, et nous le passerons sous silence.

Signalons seulement qu'on ne peut négliger a priori les termes en ε^4 de J_a qui font intervenir $\psi(x)$, et qu'à cause du choix simplificateur $\omega_a = \varepsilon\omega_1^0$, le terme $-2\frac{\bar{\rho}}{r}H_a$ n'est en fait pas non plus négligeable. Ce n'est qu'au §.4.2.c. qu'on verra comment éliminer ces termes.

En posant

$$F_a = -2\frac{\overline{\rho}}{r}H_a + \varepsilon^4\left[(\rho f' + f)\psi\Delta\psi + \rho f'\,|\nabla\psi|^2 - 2\frac{\psi}{r}I(\omega_1^0)I'(\omega_1^0)\right] + \widetilde{F}_a \ ,$$

on obtient finalement les estimations :

$$\text{en zone I}\ , \qquad \left|\widetilde{F}_a\right|_0 \le C_A\left[\frac{\varepsilon^3}{1+\sqrt{t}} + \varepsilon^4(1+\sqrt{t})\right]$$

$$\text{en zone II}\ , \qquad \left|\widetilde{F}_a\right|_0 \le C_A\left[\frac{\varepsilon(\log t)^{1/2}}{t^2} + \frac{\varepsilon^3}{t^{1/2+\widetilde{\nu}}}\right] \quad (\text{pour un } \widetilde{\nu} > 0),$$

et de même pour toutes les normes $|\ |_s$.

Comme on l'a expliqué au §.2, la taille de $\nabla_{x,t}\dot{\rho}$ sera essentiellement contrôlée par $\int_0^t \left|\widetilde{F}_a\right|_0 ds$: les meilleures estimations de cette intégrale sont obtenues pour le choix $t \sim \varepsilon^{-6/5}$ de la zone de raccord. Il vient alors

$$\int_0^t \left|\widetilde{F}_a\right|_0 ds \le C_A\varepsilon^{2+\widetilde{\nu}} \quad (\text{pour } t \le \frac{A^2}{\varepsilon^2})\ .$$

e. Comme on l'a vu au §.2, la vraie solution approchée est en fait $(\rho_a, d_a + \widetilde{d}_a, \omega_a + \widetilde{\omega}_a)$, puisqu'on estime $\dot{\rho} = \rho - \rho_a$, $\dot{d} = d - (d_a + \widetilde{d}_a)$, $\dot{\omega} = \omega - (\omega_a + \widetilde{\omega}_a)$.

Il apparaît que $\widetilde{d}_a$ est négligeable, et que le terme principal de $\widetilde{\omega}_a$ est $-\varepsilon^2\int_0^t \left[\omega_1^0 d_1 + (\omega_1^0)' I(d_1)\right] ds$. Nous poserons donc $\rho_{app} = \rho_a$, $d_{app} = d_a$, $\omega_{app} = \omega_a - \varepsilon^2\int_0^t \left[\omega_1^0 d_1 + (\omega_1^0)' I(d_1)\right] ds$.

4. Estimation de la solution.

4.1. Les notations sont ici celles du théorème 1.2, C_A désignant diverses constantes dépendant de A.

a. Le point de départ des estimations de $(\dot{\rho}, \dot{d}, \dot{\omega})$ est l'équation (2.13), jointe à (2.4)′ et (2.6)′.

Nous utiliserons pour (2.13) les inégalités d'énergie standard qui donnent un contrôle de $|\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_s$ par l'intégrale de la norme $|\ |_s$ du second membre; nous nous contenterons de $s = 2$, car $|f|_s \ge \text{cte}\ \|f\|_0$, puisque $s = 2 > \frac{n}{2} = 1$.

Les intégrales des termes du second membre de (2.13) (hormis F_a) seront traitées de la façon habituelle à l'aide du lemme de Gronwall, ce qui suppose

i) un bon comportement de la solution approchée,

ii) un comportement analogue des restes, à justifier ultérieurement par induction sur le temps.

Considérons par exemple l'intégrale du premier terme :

$$\int_0^t \|D_t\rho\|_0 \ |\dot{d}|_0 \ ds \leq C \int_0^t \|D_t\rho\|_0 \ |\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_0 \ ds$$

donnera dans les estimations, par application du lemme de Gronwall, un facteur $\exp\left(C \int_0^t \|D_t\rho\|_0 \ ds\right)$ qu'on veut borné; la partie $\exp C \int_0^t \|D_t^a \rho_a\|_0 \ ds$ est effectivement bornée, et l'on suppose l'autre partie (dépendante de $\dot{\rho}$) bornée, ce qui sera justifié a posteriori par les estimations du théorème 1.2.

b. *Estimation de $\dot{d}$.*

Il est facile de déduire de (2.4)', compte tenu de la formule explicite (2.11)', l'estimation

$$|\dot{d}|_0 \leq C_A \ |\nabla_{x,t}\dot{\rho}|_0 \ ,$$

qui suppose l'hypothèse $t \|\nabla\rho\|_0 \leq C_A$.

c. *Estimation de $\dot{\omega}$.*

Nous faisons l'hypothèse fondamentale $\int_0^t \|I(d)\|_0 \ ds \ \leq \ C_A$; cela implique, compte tenu de (2.6)', que $\dot{\omega}$ s'annule pour $|x| \geq R_A$.

Par ailleurs, l'inégalité d'énergie standard donne

$$|\dot{\omega}|_0 \leq C_A \sup_{t \leq \frac{A^2}{\varepsilon^2}} \|\omega_a + \tilde{\omega}_a\|_1 \int_0^t |\dot{d}|_0 \ ds \leq C_A \varepsilon \int_0^t |\dot{d}|_0 \ ds \ .$$

d. Parmi les termes du second membre de (2.13), beaucoup se traitent aisément comme on l'a expliqué en a., à l'aide des estimations de $\dot{d}$ et $\dot{\omega}$ ci-dessus.

Les difficultés principales sont de deux types :

1er type : termes contenant $\dot{\rho}$, et non $\nabla_{x,t}\dot{\rho}$

2ème type : termes contenant $\dot{\omega}$.

e. La difficulté du premier type est classique (cf. par exemple [**9**]), et provient du fait qu'on ne peut espérer mieux en général qu'une estimation de la forme

$$|\dot{\rho}|_0 \leq \text{cte}\, t \ |\nabla_x \dot{\rho}|_0$$

(t majorant le diamètre de $\operatorname{supp} \dot{\rho}(\cdot, t)$).

Les termes du second membre de (2.13) qu'on ne peut estimer trivialement en raison de cette difficulté sont ici

$$I(\dot{d})\,[\bar{\rho}\,d'_a - \partial_t\,\rho'_a] + \dot{\rho}\,[\bar{\rho}\,f'(\rho_a)\Delta\,\rho_a - \partial_t\,d_a] \ .$$

On utilise le lemme élémentaire suivant :

LEMME. *Soit* $u = u(r)$ *une fonction* C^1 *supportée dans* $|x| \leq R$, *et* $S(\sigma)$ *une fonction vérifiant* $S(\sigma) \leq \dfrac{\text{cte}}{(1+|\sigma|)^m}$. *En notant* $v(r) = u(r)\,S(R-r)$, *on a*

$$|v|_0 \leq C_m\,|\nabla u|_0\,R^{1-m}\,\Big(C\,|\nabla u|_0\,(\log R)^{1/2}\ \text{si}\ m=1\Big) \ .$$

L'analyse précise des coefficients d'_a, $\partial_t\,\rho'_a$, $\Delta\,\rho_a$, $\partial_t\,d_a$, prenant en compte le comportement de leurs profils (cf. par exemple (1.2.2), (1.2.3) et §.2.c.), montre qu'on peut majorer les normes L^2 des termes litigieux par $C_A\,\dfrac{\varepsilon}{1+\sqrt{t}}\,(|\dot{d}|_0 + |\nabla_{x,t}\,\dot{\rho}|_0)$, ce qui est acceptable (car $\displaystyle\int_0^{\frac{A^2}{\varepsilon^2}} \frac{\varepsilon\,ds}{1+\sqrt{s}} \leq C_A$).

f. La difficulté du deuxième type est plus essentielle, et correspond à l'effet d'interaction entre le mode central et les modes non linéaires extrêmes (voir l'introduction).

Son traitement fait l'objet du point suivant.

4.2. Interaction des modes.

Nous allons simplement illustrer la méthode en traitant le terme $-2\,\dfrac{\bar{\rho}}{r}\,[[\dot{\omega}]]$ (défini par (2.15)').

La remarque fondamentale est que ce terme est de moyenne nulle et à support dans un compact fixe en x ; en effet, comme $I'(d) = d - \dfrac{I(d)}{r}$,

$$-2\,[[\dot{\omega}]] = -2\,\bar{\rho}\,\frac{1}{r}\,\partial_r\,k(r,t) \ ,$$

où $k(r,t) = I(\dot{\omega})\,I(\omega_a + \tilde{\omega}_a) + \dfrac{1}{2}\,I^2(\dot{\omega})$; comme $\displaystyle\int \dot{\omega}\,dx = 0$, $I(\dot{\omega})$ a même support que $\dot{\omega}$ (qui est contrôlé d'après 4.1.c.) et le terme est de moyenne nulle puisque $k(0,t) = 0$.

a. *L'inégalité d'énergie.*

Il se trouve que les solutions de $\square u = f$ possèdent, si f est de moyenne nulle, de meilleures estimations que celles fournies par l'inégalité d'énergie standard.

Voici un exemple simple de ce phénomène.

LEMME. *Soient* $u(x,t)$ *et* $g_i(x,t) \in C^\infty([0,T] \times \mathbf{R}^n_x)$, *telles que* $u(\cdot,t)$ *et* $g_i(\cdot,t)$ *soient à supports compacts et*

$$\square u = \sum_i \partial_i g_i \ .$$

Si $u(x,0) = \partial_t u(x,0) = 0$, *on a, pour* $t \leq T$,

$$|\nabla u(\cdot,t)|_0 + |\partial_t u(\cdot,t)|_0 \leq C \left\{ \sum_i |g_i(\cdot,0)|_0 + \sum_i \int_0^t |\partial_t g_i(\cdot,s)|_0 \, ds \right\} \ .$$

PREUVE : Posons $\square v_i = g_i$ (v_i à traces nulles) : on a

$$\square \left(u - \sum \partial_i v_i \right) = 0 \ , \quad \text{d'où} \quad u = \sum \partial_i v_i \ .$$

D'autre part $\square \partial_t v_i = \partial_t g_i$, $\partial_t v_i(x,0) = 0$, $\partial_t^2 v_i(x,0) = g_i(x,0)$, d'où

$$\left|\partial_t^2 v_i(\cdot,t)\right|_0 + |\nabla \partial_t v_i(\cdot,t)|_0 \leq C \left\{ |g_i(\cdot,0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(\cdot,s)|_0 \, ds \right\} \ .$$

Comme

$$\begin{aligned} |\Delta v_i(\cdot,t)|_0 &\leq \left|\partial_t^2 v_i(\cdot,t)\right|_0 + |g_i(\cdot,t)|_0 \\ &\leq \left|\partial_t^2 v_i(\cdot,t)\right|_0 + |g_i(\cdot,0)|_0 + \int_0^t |\partial_t g_i(\cdot,s)|_0 \, ds \ , \end{aligned}$$

les inégalités

$$|\partial_j u|_0 = \left| \sum \partial_{ij}^2 v_i \right|_0 \leq C \sum_i |\Delta v_i|_0 \quad \text{et} \quad |\partial_t u|_0 \leq \sum |\nabla \partial_t v_i|_0$$

impliquent le résultat. $\square$

Bien entendu, le premier membre de (2.13) n'est pas exactement $\square$, mais nous passerons sous silence ces difficultés mineures.

Remarquons en particulier que si les g_i ne dépendent pas de t, $|\nabla u|_0 + |\partial_t u|_0$ est borné, tandis que l'inégalité standard donne une majoration en cte $\times\, t$.

En fait, le lemme signifie qu'on peut remplacer au second membre les dérivées ∂_i par ∂_t, ce qui n'est pas si étonnant.

b. L'intérêt du lemme précédent dans le traitement du terme $-2\frac{\bar{\rho}}{r}[[\dot{\omega}]]$ est qu'il permet d'exploiter le caractère "presque stationnaire" de $\dot{\omega}$ tel qu'il apparaît dans (2.6)'.

En effet,

$$\partial_t k = I(\partial_t \dot{\omega}) I(\omega) + I(\dot{\omega}) I(\partial_t(\omega_a + \tilde{\omega}_a)) \ ,$$

et

$$-I(\partial_t \dot{\omega}) = I(I(d)\dot{\omega}' + d\dot{\omega}) + I(I(\dot{d})(\omega_a + \tilde{\omega}_a)' + \dot{d}(\omega_a + \tilde{\omega}_a)) \ ;$$

grâce à la formule $I(I(f)g' + fg) = I(f)g$, il vient

$$-I(\partial_t \dot{\omega}) = I(d)\dot{\omega} + I(\dot{d})(\omega_a + \widetilde{\omega}_a) \ .$$

Comme $\frac{1}{r}k' = \sum \partial_i \left(x_i \frac{k}{r^2}\right) = \sum \partial_i g_i$, on trouve

$$\sum_i |\partial_t g_i|_0 \leq \text{cte} \left|\frac{\partial_t k}{r}\right|_0 \leq C\varepsilon^2 \, |\dot{d}|_0 + C\left(\varepsilon \, \|d\|_0 + \|\partial_t(\omega_a + \widetilde{\omega}_a)\|_0\right) |\dot{\omega}|_0$$

$$\leq C\varepsilon^2 \, |\dot{d}|_0 + C\varepsilon \left(\|d\|_0 + \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{t}}\right) |\dot{\omega}|_0 \ .$$

Le terme $\varepsilon^2 \, |\dot{d}|_0$ est acceptable; l'autre terme est majoré par

$$C\varepsilon^2 \left(\|d\|_0 + \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{t}}\right) \int_0^t |\dot{d}|_0 \, ds$$

d'après 4.1.c. : comme on a déjà supposé $\int_0^t \left(\|d\|_0 + \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{s}}\right) ds \leq C_A$, on voit que l'intégrale de ce terme n'excède pas $C_A \varepsilon^2 \int_0^t |\dot{d}|_0 \, ds$, qui est acceptable.

c. Le lemme a. est aussi utile pour traiter le terme "presque stationnaire" $-2\frac{\overline{\rho}}{r}H_a$ de $F_a - \widetilde{F}_a$ (voir §.2.d.).

Quant à la solution de

$$\Box u = (\rho f' + f)\psi\Delta\psi + \rho f' \, |\nabla\psi|^2 - 2\frac{\psi}{r} I(\omega_1^0) I'(\omega_1^0) \ ,$$

elle n'est pas d'énergie bornée (le second membre est stationnaire mais de moyenne non nulle), mais $|\nabla_{x,t} u|_0 \leq \text{cte}\,(\log(e+t))^{1/2}$, ce qui est largement suffisant.

4.3. Conclusion.

On a indiqué aux paragraphes 4.1 et 4.2 comment, en supposant l'existence d'une solution régulière de (1.1.1), (1.1.2) sur $[0, T[$, $T \leq \frac{A^2}{\varepsilon^2}$, on pouvait obtenir, par un raisonnement d'induction sur le temps, et pour $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_A$, les estimations

$$\|\nabla_{x,t}\rho\|_0 \leq C_A \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{t}}$$

$$\|d\|_0 \leq C_A \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{t}}$$

$$\|\omega\|_0 \leq C_A \varepsilon \ .$$

Le critère de CHEMIN **[3]** (qui est ici très simple car nous nous sommes limités à des fonctions de r seulement) permet alors de conclure qu'en fait la solution régulière existe jusqu'à $T = \dfrac{A^2}{\varepsilon^2}$, c'est-à-dire $\varepsilon^2 T_\varepsilon \geq A^2$. On a donc montré $\underline{\lim}\, \varepsilon^2 T_\varepsilon \geq \tau_*^2$.

5. Borne supérieure du temps de vie.

Il reste, pour achever la preuve du théorème 1.1, à montrer que $\overline{\lim}\, \varepsilon^2 T_\varepsilon = \tau_*^2$.

Comme on a supposé ρ_1^0 et d_1^0 non toutes deux nulles, R ne peut être identiquement nulle (cf. [**8**]), et $\tau_* < +\infty$. Il semble préférable ici de partir des équations

$$\left\{ \begin{aligned} &\partial_t \rho + \alpha \rho' + \rho \left(\alpha' + \frac{\alpha}{r} \right) = 0 \\ &\partial_t \alpha + \alpha \alpha' - \frac{\beta^2}{r} + \frac{c^2(\rho)}{\rho} \rho' = 0 \\ &\partial_t \beta + \alpha \beta' + \frac{\alpha \beta}{r} = 0 \end{aligned} \right. \tag{5.1}$$

que l'on obtient à partir de (1.1) par la représentation (1.2.1) $v = v^d + v^\omega = \dfrac{I(d)}{r} x + \dfrac{I(\omega)}{r} x^\perp$, en posant $\alpha = I(d)$, $\beta = I(\omega)$. La stratégie de JOHN [**11**] consiste à écrire le système en ρ', α', β', à le diagonaliser, et à prouver une estimation en norme L^1 de la dérivée susceptible d'exploser.

Ici, on pose $A = r^{1/2} \alpha$, $C = r^{1/2}(\rho - \bar{\rho})$, puis

$$z_0 = \beta' \ , \quad z_1 = \frac{1}{2} \left[\frac{A'}{c} + \frac{C'}{\rho} \right] \ , \quad z_2 = \frac{1}{2} \left[\frac{A'}{c} - \frac{C'}{\rho} \right] \ .$$

Désignons par Γ_λ^+ la courbe intégrale du champ $\partial_t + (c + \alpha) \partial_r$ issue de $(r = \lambda,\ t = 0)$. Soit $B > \tau_*$; en supposant que la solution classique de données (1.1.2) existe pour $0 \leq t \leq T$, $\left(\dfrac{1}{\varepsilon} \leq T \leq \dfrac{B^2}{\varepsilon^2} \right)$, on obtient une estimation a priori dans la bande $\widetilde{R}$, partie de $\dfrac{1}{\varepsilon} \leq t \leq T$ comprise entre $\Gamma_{R_0}^+$ et $\Gamma_{\sigma_0 - 1}^+$ (σ_0 étant défini au théorème 1.1).

Cette estimation est de la forme

$$\begin{aligned} &\int_{(s,t) \in \widetilde{R}} |z_1(s,t)|\, ds \leq J_1 \varepsilon \ , \\ &\sup_{\widetilde{R}} (|A| + |C|) \leq M_1 \varepsilon \ , \\ &t \sup_{(s,t) \in \widetilde{R}} |z_2(s,t)| \leq V_1 \varepsilon^{1/2} \ , \end{aligned} \tag{5.2}$$

pour des constantes J_1, M_1, V_1 bien choisies, et ε assez petit. De plus, on voit facilement que $\beta = 0$ dans $\widetilde{R}$.

En notant $w(t)$ la restriction $-z_1(r(t),t)$ de $-z_1$ à $\Gamma^+_{\sigma_0}$, on dérive de (5.1) une équation différentielle ordinaire sur w de la forme

$$w'(t) = a_0(t)w^2 + a_1(t)w + a_2(t) \ , \tag{5.3}$$

pour laquelle (5.2) implique $|a_1(t)| \leq \text{cte}\, \dfrac{\varepsilon^{1/2}}{t^{3/2}}$,

$$|a_2(t)| \leq \text{cte}\, \frac{\varepsilon^{1/2}}{t^2} \ , \quad a_0(t) = \frac{\rho c' + c}{\sqrt{c}\, t^{1/2}} + O(t^{-3/2}) \ .$$

Les résultats déjà obtenus d'existence et d'approximation impliquent

$$w\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) = -\varepsilon\, \frac{R'(\sigma_0)}{\bar{\rho}} + o(\varepsilon) \ .$$

Il ne reste plus qu'à appliquer le lemme 1.3.2 de **[9]**, qui implique $\varepsilon T^{1/2} \leq \tau^* + o(1)$, et la preuve est complète.

Bibliographie

[1] ALINHAC S., *Une solution approchée en grand temps des équations d'Euler compressibles en dimension deux,* à paraître.

[2] ALINHAC S., *Temps de vie des solutions régulières des équations d'Euler compressibles en dimension deux,* à paraître.

[3] CHEMIN J.Y., *Remarques sur l'apparition de singularités dans les écoulements euleriens compressibles,* preprint, 1989.

[4] CHEMIN J.Y., *Evolution d'une singularité ponctuelle dans un fluide compressible,* preprint, 1989.

[5] COURANT R., FRIEDRICHS K.O., *Supersonic flow and shock waves,* Wiley-Interscience, New York, 1949.

[6] DI PERNA R. ET MAJDA A., *The validity of geometrical optics for weak solutions of conservation laws,* Comm. Math. Phys., 98 (1985), 313-347.

[7] FRIEDLANDER G., *On the radiation field of pulse solutions of the wave equation I, II,* Proc. Roy. Soc. A., 269 (1962), 53-65 et 279 (1964), 386-394.

[8] HÖRMANDER L., *The lifespan of classical solutions of non linear hyperbolic equations,* Mittag-Leffler report n° 5, 1985.

[9] HÖRMANDER L., *Non linear hyperbolic differential equations,* Lectures, 1986-1987.

[10] JOHN F., *Formation of singularities in one dimensional non linear wave propagation,* Comm. Pure Appl. Math., 27 (1974), 377-405.

[11] JOHN F., *Blow up of radial solutions of $u_{tt} = c^2(u_t)\Delta u$ in three space dimensions,* preprint (1984).

[12] KLAINERMAN S., *Uniform decay estimates and the Lorentz invariance of the classical wave equation,* Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), 321-332.

[13] LAX P.D., *Hyperbolic systems of conservation laws II,* Comm. Pure Appl. Math., 10 (1957), 537-566.

[14] MAJDA A., *Compressible fluid flow and systems of conservation laws,* Springer Appl. Math. Sc., 53 (1984).

[15] MAJDA A., ROSALES R., *Resonantly interacting weakly non linear hyperbolic waves I. A single space variable,* Stud. Appl. Math., 71 (1984), 149-179.

[16] SIDERIS T., *Formation of singularities in three dimensional compressible fluids,* Comm. Math. Phys., 101 (1985), 475-487.