M. Derridj

Microlocalisation et estimations pour $\overline{\partial}_b$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 21, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A21_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

MICROLOCALISATION ET ESTIMATIONS POUR $\bar{\partial}_b$

M. DERRIDJ

Exposé n° XXI

18 Décembre 1990

1 - INTRODUCTION :

Partant d'hypersurfaces de C^n, à forme de Levi diagonalisable (voir par exemple [7]), ou d'hypersurfaces à estimations maximales ([4] [8] [9] [12]), pour lesquelles nous avons montré dans [3], qu'elles ne peuvent aucunement être diagonalisables, nous essayons d'étudier, du point de vue estimations aussi bien en termes de majoration de champs de vecteurs qu'en termes de sous-ellipticité, pour l'opérateur $\bar\partial_b$, des hypersurfaces plus générales. Pour cela, il s'avère que même dans le cas maximal, on a besoin, si l'on veut aller plus loin, d'avoir des estimations (apparemment) plus précises, dans la direction manquante du $\bar\partial_b$ (voir plus loin). On utilise la méthode de microlocalisation (voir [10] dans le cas de $\bar\partial_b$).

Pour les hypersurfaces que nous considérons, les estimations que nous établissons en termes de champs de vecteurs (habituels dans le cas maximal) ou de tels champs lestés de poids liés à la matrice de Levi (dans le cas semi-maximal), permettent d'obtenir des estimations sous-elliptiques très précises. Une étude concernant la régularité lipschitz, établie par C. Fefferman, J.J. Kolin, et M. Machedon pour le cas diagonal [7], pourrait être faite dans le cas de nos hypersurfaces.

2 - QUELQUES NOTATIONS ET DEFINITIONS :

Soit S une hypersurface (réelle) de C^{n+1}, au voisinage de $0 \in S$. On note $(L_1, \cdot, L_n)$ une base de champs de vecteurs holomorphes, sur S , et $(\bar L_1, \cdot, \bar L_n)$ le système de champs conjugués. Si T est un champ (imaginaire pur) sur S tel que $(L_1, \cdot, L_n, \bar L_1, \cdot, \bar L_n, T)$ soit une base de CTS la matrice de Levi est définie par :

$$[L_j, \bar L_k] = c_{jk} T \text{ (modulo } L_j, \bar L_j)$$

On considérera les cas où la matrice hermitienne (c_{jk}) est positive, c'est-à-dire S pseudo-convexe.

Si $(\bar\omega_1, \cdot, \bar\omega_n)$ est un système de $(0,1)$ formes, dual de $(\bar L_1, \cdot, \bar L_n)$, toute $(0,1)$ forme u, s'écrira

$$u = \sum_{j=1}^{n} u_j \, \bar\omega_j$$

L'opérateur $\bar\partial_b$ est l'opérateur induit par $\bar\partial$ sur l'hypersurface S et $\bar\partial_b^*$ sera son adjoint.

Nous allons maintenant introduire quelques propriétés dont il sera question dans la suite.

Estimation maximale : Introduite par nous-même dans le cadre du $\bar\partial$ dans [3] et étudiée dans le cadre du $\bar\partial_b$ dans ([8], [9], [12]), cette propriété est la suivante :

$$(*) \qquad \begin{aligned} \sum_{j.k} (||\bar L_j u_k||^2 + ||L_j u_k||^2) &\lesssim ||\bar\partial_b u||^2 + ||\bar\partial_b^* u||^2 + ||u||^2 \\ &\lesssim Q_b(u,u) + ||u||^2, \qquad \forall u \in D^{0,1}(V) \end{aligned}$$

où $D^{0,1}(V)$ est l'espace des $(0,1)$ formes à support dans $V \ni 0$

Propriété de trace : (pour $\bar{\partial}_b$) dans V. $\mathcal{L}$ est la forme de Levi et tr sa trace

$$(**) \qquad \exists\, \varepsilon > 0 \ t.q \qquad (1-\varepsilon)tr \geq \mathcal{L} \geq \varepsilon\ tr \text{ sur } V.$$

Avant d'énoncé notre théorème, introduisons la microlocalisation, élémentaire dans notre cadre.

Au voisinage de 0, on introduit des coordonnés locales (t,x) de sorte que $T = \frac{1}{i}\partial_t$ et $x \in \mathbf{R}^{2n}$ désigne les "directions complexes" sur S et on note (τ,ξ) les variables duales. On définit alors les fonctions x^+, x^-, c^∞, bornées.

$$x^+(\tau,\xi) = \begin{cases} 1 & \tau > 0 \\ 0 & \tau < 0 \end{cases}$$

$$x^-(\tau,\xi) = \begin{cases} 1 & \tau < -1 \\ 0 & \tau > 0 \end{cases}$$

D'autre part on condidère $W \subset\subset V$ et $\theta \in \mathcal{D}(V), \theta|_W \equiv 1$.

On définit alors les opérateurs pseudodifférentiels :

$$\mathcal{P}^+u = \theta\mathcal{F}^{-1}x^+\hat{u}, \ \mathcal{P}^{-1}u = \theta\mathcal{F}^{-1}x^-\hat{u}$$

pour $u \in \mathcal{D}(W)$, et $\mathcal{F}$ désignant la transformation de Fourier.

$\mathcal{P}^+$ et $\mathcal{P}^-$ sont des o.p.d. d'ordre 0. D'autre part $\mathcal{P}^+\mathcal{P}^-$ est un o.p.d. d'ordre ≤ -1.

3 - LES RESULTATS :

Notre but est de montrer le résultat suivant, élémentairement, avant d'aller plus loin :

Théorème 1.— *On suppose vérifiée la propriété de trace (**).*

Alors on a l'estimation :

$$\sum_{j,k}\left(||L_ju_k||^2 + ||\bar{L}_ju_k||^2\right) + \mathcal{R}e\left[\left(\sum_j tr\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^+u_j, \mathcal{P}^+u_j\right) - \sum_j\left(tr\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^-u_j, \mathcal{P}^-u_j\right)\right]$$

$$\lesssim \mathcal{Q}_b(u,u) + ||u||^2, \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

Remarquons que dans l'estimation maximale habituelle ne figure que la première somme (entre parenthèse) du 1er membre. La 2e somme (entre crochet) nous est necessaire pour pouvoir considérer des situations plus générales. Dans le cas rigide, il y a une démonstration extrêmement simple dans un papier commun avec D. Tarbakoff [6].

Idée de la démonstration du théorème 1 :

On part de l'inégalité suivante, qui se démontre par intégrations par parties :

$$(3.1)\qquad \mathcal{Q}_b(u,u) = ||\bar{\partial}_b u||^2 + ||\bar{\partial}_b^* u||^2 = \sum_{j,k} ||\bar{L}_j u_k||^2 + \sum_{j,k}\left(c_{jk}\frac{1}{i}\partial_t u_j, u_k\right)$$

$$+0\ \left(||\bar{L}u||\ ||u|| + ||u||^2\right) \qquad \text{où} \qquad ||\bar{L}u||^2 = \sum_{j,k} ||\bar{L}_j u_k||^2$$

$$\forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

La 1ère chose à faire est d'écrire $||\bar{L}u||^2 = \delta\ ||\bar{L}u||^2 + (1-\delta)||\bar{L}u||^2$ de garder $\delta||\bar{L}u||^2$ et de transformer $(1-\delta)||\bar{L}u||^2$.

D'autre part, comme $(\bar{\partial}_b, \bar{\partial}_b^*)$ est elliptique sur $\mathcal{P}^\circ u$ où $\mathcal{P}^\circ u = u - (\mathcal{P}^+ u + \mathcal{P}^- u)$. On ne considérera que les parties $\mathcal{P}^+ u$ et $\mathcal{P}^- u$ de u, l'erreur commise étant bien majorée.

Tenant compte alors de : $\mathcal{P}^-\mathcal{P}^+\bar{L}_j u_\ell = 0(||u||)$, on a :

$$(3.2)\qquad (1-\delta)||\bar{L}_j u_k||^2 = (1-\delta)||\bar{L}_j \mathcal{P}^+ u_k||^2 + (1-\delta)||\bar{L}_j \mathcal{P}^- u_k||^2$$
$$-C_0(\mathcal{Q}_b(u,u) + 0(||u||^2 + ||u||\ ||\bar{L}u||)$$

D'autre part on a pour $\alpha, \beta > 0$

$$(3.3)\qquad \begin{cases} \alpha||\bar{L}_j \mathcal{P}^+ u_k||^2 = \alpha||L_j \mathcal{P}^+ u_k||^2 - (\alpha c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t \mathcal{P}^+ u_k, \mathcal{P}^+ u_k) \\ \qquad\qquad + 0(||u||^2 + ||\bar{L}u||\ ||u||) \\ \beta||\bar{L}_j \mathcal{P}^- u_k||^2 = \beta||L_j \mathcal{P}^- u_k||^2 - (\beta c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t \mathcal{P}^- u_k, \mathcal{P}^- u_k) \end{cases}$$

$$+0(||u||^2 + ||\bar{L}u||\ ||u||)$$

Ainsi si *sup* $(\alpha, \beta) \leq 1 - \delta$, on aboutit à

$$(3.4)\qquad \begin{cases} \mathcal{Q}_b(u,u) \geq \delta||\bar{L}u||^2 + \alpha||L\mathcal{P}^+ u||^2 + \beta||L\mathcal{P}^- u_k||^2 \\ + \mathcal{R}e\sum_{j,k}(c_{jk}\frac{1}{i}\partial_t u_j, u_k) - \alpha\sum_{j,k}(c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t \mathcal{P}^+ u_k, \mathcal{P}^+ u_k) \\ \beta\sum_{j,k}(c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t \mathcal{P}^- u_k, \mathcal{P}^- u_k) - C_\circ(\mathcal{Q}_b(u,u) + ||u||^2) + 0(||\bar{L}u||\ ||u||) \end{cases}$$

Dans (2.4), par des considérations d'ellipticité de $(\bar{\partial}_b, \bar{\partial}_b^*)$ sur $\mathcal{P}^\circ u$, on peut remplacer $\sum\limits_{j,k}(c_{jk}\frac{1}{i}\partial_t u_j, u_k$ par :

$$\sum_{j,k}(c_{jk}\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^+u_j, \mathcal{P}^+u_k) + \sum_{j,k}(c_{jk}\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^-u_j, \mathcal{P}^-u_k)$$

Maintenant de la propriété de trace (**) et en utilisant l'inégalité de Gaïding précisée pour des systèmes du 1er ordre positifs on aboutit à :

$$(2.5) \qquad \begin{cases} C\mathcal{Q}_b(u,u) \geq \delta||\bar{L}u||^2 + \alpha||L\mathcal{P}^+u||^2 + \beta||L\mathcal{P}^-u||^2 \\ +(\varepsilon-\alpha)\mathcal{R}e\sum\limits_{j,k}(c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^+u_k, \mathcal{P}^+u_k) + 0(||u||^2) \\ \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V) \end{cases}$$

Par le même raisonnement, on aboutit à

$$(2.6) \qquad \begin{cases} C\mathcal{Q}_b(u,u) \geq \delta||\bar{L}u||^2 + \alpha||L\mathcal{P}^+u||^2 + \beta||L\mathcal{P}^-u||^2 \\ +(1-\varepsilon-\beta)\mathcal{R}e\sum\limits_{j,k}(c_{jj}\frac{1}{i}\partial_t\mathcal{P}^-u_k, \mathcal{P}^-u_k) + 0(||u||^2) \\ \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V) \end{cases}$$

Le théorème découlera, de (2.5) (2.6) si on trouve un couple (α,β) tel que pour un $\gamma > 0$ et un $\delta > 0$ (ε est considéré $\leq 1/2$).

$$(2.7) \qquad \begin{cases} \alpha > 0 \qquad \beta > 0 \\ sup\ (\alpha,\beta) \leq (1-\delta) \\ \varepsilon-\alpha \geq \gamma > 0, \qquad 1-\varepsilon-\beta \leq -\gamma \end{cases}$$

On voit qu'il suffit de prendre $\alpha = \beta = \delta = \frac{\varepsilon}{2}$.

Le détail de la démonstration est dans [5].

Du théorème 2.1. On tire l'estimation sous-elliptique suivante, qui est en fait optimale :

Théorème 3.2.— *Soit $S \ni 0$, telle que l'hypothèse (**) soit satisfaite. Soit m le rang en 0 de l'algèbre de Lie engendrée par le système $\{\mathcal{R}eL_j, \Im mL_j\}$. Alors l'opérateur $\bar{\partial}_b$ est $\frac{1}{m}$ sous-elliptique pour les $(0,1)$ formes, près de 0 i.e., si V est un petit voisinage de 0*

$$||u||^2_{\frac{1}{m}} \lesssim \mathcal{Q}_b(u,u) + ||u||^2, \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

De plus $\frac{1}{m}$ est optimal.

Cela se démontre, en utilisant les résultats de Lass Hörmander [ ] (précisés par ceux de L. Rothschild - E. Stein [13]) sur les systèmes de champs de vecteurs. L'optimalité se démontre en utilisant une condition nécessaire de sous-ellipticité de D. Catlin [2]. (voir aussi un papier de T. Bloom - I. Graham pour l'introduction de m [1].

Nous allons maintenant introduire une classe d'hypersurfaces pour laquelle on peut encore établir des résultats précis. Nous n'allons considérer que les cas modèles. On considère donc une hypersurface S telle que

$$(H)\begin{cases} \text{La forme de Levi se décompose en blocs } A_1, \cdot, A_p \text{ où chacun des blocs } A_j \\ \text{correspond aux champs } L_\ell, \ell \in I_j \\ \text{On dénote } L_{(j)} = (L_\ell)_{\ell\in I_j} \text{ et } u_{(j)} = (u_\ell)_{\ell\in I_j} \\ \qquad ||L_{(j)}u_{(k)}||^2 = \sum\limits_{\substack{\ell\in I_j \\ p\in I_k}} ||L_\ell u_p||^2, t_j = tr(A_j) \\ \text{On suppose que chaque } A_j \text{ vérifie (**) i.e.} \\ \qquad (1-\varepsilon)t_j \geq A_j \geq\in t_j \end{cases}$$

Théorème 3.3.— *Soit S une hypersurface telle que (H) soit vérifiée. Alors on a l'estimation :*

$$\begin{aligned} &||\bar{L}u||^2 + \sum_{j=1}^{p} ||L_{(j)}u_{(j)}||^2 + \sum_{j=1}^{p} ||\sqrt{tj}\ Lu_{(j)}||^2 \\ &\lesssim Q_b(u,u) + ||u||^2, \qquad \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V) \end{aligned}$$

Remarque : En fait on peut démontrer le théorème 3.3 lorsque la matrice de Levi, contient en plus des blocs A_j , des coefficients (c_{jk}) qui sont bien "dominés" par les traces t_j.

Du théorème 3.3, on peut déduire un théorème de sous-ellipticité précis. Pour cela, on introduit les entiers $(m_1, \cdot, m_p)$ suivants :

Définition : On note X_j le système de champs de vecteurs réels $(\mathcal{R}eL_\ell, \Im mL_\ell)_{\ell\in I_j}$. On définit m_j comme l'entier minimum tel que un crochet de longueur m_j, formé de vecteurs de X_j a une composante non nulle, en 0, sur ∂_t.

Théorème 3.4.— *Soit S comme ci-dessous, Supposons m_j fini. Alors*

$$||u_{(j)}||^2_{\frac{1}{m_j}} \lesssim Q_b(u,u) + ||u||^2 \qquad \forall u \in \mathcal{D}^{0,1}(V)$$

Compte-tenu de l'estimation du théorème 3.3, il suffit d'avoir la proposition suivante :

Proposition 3.5 : Sous les hypothèses précédentes on a

$$||v||^2_{\frac{1}{m_j}} \lesssim ||L_{(j)}v||^2 + ||t_jLv||^2 + ||\bar{L}v||^2 + ||v||^2, \quad \forall v \in \mathcal{D}(V)$$

Cette proposition découle du lemme suivant, compte-tenu de nouveau des travaux de L. Hörmander, J.J. Kohn et L. Rothschild - E. Stein.

Lemme 3.6.— *L'algèbre de Lie engendrée par les champs* $(\mathcal{R}eL_\ell, \Im mL_\ell)_{\ell\in I_j}$ *et* $(\mathcal{R}et_jL_\ell, \Im mt_jL_\ell)_{\ell\notin I_j}$ *est de rang* m_j *en* 0.

BIBLIOGRAPHIE

[1] T. Bloom - I. Graham : A Geometric charaterization of points of type m on real submanifolds of C^n. J. of Diff. Geom. 12 (1977) 171-182.

[2] D. Catlin : Necessary conditions for subellipticity of the $\bar{\partial}$-Neumann problem. Ann. Math. 117 (1983) p 147-171.

[3] M. Derridj : Domaines à estimations maximales. Prépublications d'Orsay n° 90-40. A paraître dans M. Zeitschrift.

[4] M. Derridj : Régularité pour $\bar{\partial}$ dans quelques domaines pseudoconnexes. J. of Diff. Geom. 13 n° 4 (1978) p 559-576.

[5] M. Derridj : Microlocalisation et estimations pour $\bar{\partial}_b$ dans quelques hypersurfaces pseudoconnexes. Inv. Math. 104 Fasc. 3 p.p 631-642.

[6] M. Derridj - D. Tartakoff : Local Analyticity for $\square_b$ and the $\bar{\partial}$-Neumann problem for a class of model domains without maximal estimates. A paraître à "Duke".

[7] C. Fefferman - J.J. Kohn - M. Machedon : holder estimates on C.R. manifolds with diagonalisable levi form. Preprint.

[8] A. Grigis - L. Rothschild : L^2-estimates for the boundary Laplacien operator on hypersurfaces. Am. J. of Math. 110 (1988) p 557-593.

[9] B. Helffer - J. Nourrigat : hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Progress in Math 58 (1985) Bickhaüser.

[10] L. Hörmander : Hypoelliptic secon order diff. Equations. Acta. Math. 119 (1967) 147-171.

[11] J.J. Kohn : Pseudo differential operators and applications. proc, symp. pure Math. 43 p. 207-219.

[12] H. Maire : Regularité optimale... Comm in P.D.E. 5 (1980) p. 331-380.

[13] L. Rothschild - E Stern : Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups. Acta Math. 137 (1977) 284-315.