SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

C. J. XU

Problème de Dirichlet pour les équations associées à un système de champs de vecteurs

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 17, p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A17_0>

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (École Polytechnique), 1990-1991, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (http://sedp.cedram.org) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Numérisation de documents anciens mathématiques

http://www.numdam.org/

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

PROBLEME DE DIRICHLET POUR LES EQUATIONS ASSOCIEES A UN SYSTEME DE CHAMPS DE VECTEURS

C.J.. XU

Exposé n° XVII

28 Mai 1991

§1 Introduction

Dans cet expose, nous allons étudier le problème de Dirichlet suivant:

(1) $$Qu \equiv \sum_{ij=1}^{m} A_{ij}(x,u,Xu)X_iX_ju+B(x,u,Xu)=0 \qquad \text{dans } \Omega$$

(2) $$u=\varphi \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

où $X=(X_1,\ldots,X_m)$ est un système de champs de vecteurs à coefficients réels de classe C^∞ dans un ouvert M de $\mathbb{R}^n$, $n\geq 2$, et Ω un ouvert borné à frontière C^∞ tel que $\overline{\Omega}\subset M$. Supposons que le système de champs de vecteurs satisfasse la condition de Hörmander sur M à l'ordre r, i. e. $X_1,\ldots,X_m$ avec leurs commutateurs de longueur$\leq r$ engendrent l'espace tangent T_xM pour tout $x\in M$, nous dirons système de champs de vecteurs sous elliptique. Pour les coefficients non linéaires de l'équation (1), nous supposons que A_{ij}, $B\in C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$ $i,j=1,\ldots,m$, et que la matrice $(A_{ij}(x,z,p))$ est définie positive pour tout $(x,z,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$. L'équation (1) est donc une équation quasilinéaire elliptique dégénérée du second ordre, nous dirons équation quasilinéaire sous elliptique du second ordre.

On va étudier le problème (1) (2) comme dans le cas des équations quasilinéaires elliptiques du second ordre. A la place de l'opérateur Laplacien Δ_x, on étudie l'opérateur de Hörmander $H=\sum_{j=1}^m X_j^2-c_0$ avec $c_0>0$. Avec la géométrie sous elliptique de X et les espaces de fonctions associées, l'opérateur H possède presque toutes les propriétés de l'opérateur Δ_x. Pour le problème de Dirichlet linéaire $Hu=f$ dans Ω; $u=\varphi$ sur $\partial\Omega$, on va démontrer aussi un théorème de régularité hölderienne maximale sous certaine condition près du bord $\partial\Omega$ (voir dans §2 l'hypothèse (S. E. $\partial\Omega$)). En utilisant cette propriété de H, on ramène d'abord le problème de résolubilité de (1) (2) à un problème de construction d'estimations *à priori* dans les espaces de fonctions associées à X pour des solutions régulieres du problème (1) (2). Finalement, pour construire cette estimation *à priori*, à cause de la complexité des commutateurs de champs de vecteurs, on a traité seulement l'équation de type $-\sum_{ij=1}^m X_i^* A_{ij}(x,u)X_ju+\sum_{j=1}^m B_j(x,u)X_ju+C(x,u)=0$. on a obtenu un théorème d'existence et de régularité des solutions pour le problème de Dirichlet de cette équation quasilinéaire.

§2 Présantation de resultats

On rappelle d'abord la définition des espaces de fonctions associées à X et de la géométrie associée. Comme dans [4], on associe à X une distance $\rho(x, y)$ sur M, et la boule sous unitaire $B(x, R)=\{y\in M;\rho(x, y)<R\}$. Pour K compact de M, on sait

qu'il existe $R_0>0$, C_1 et $C_2>0$ tels que la condition de Hörmander implique:

(3) $$\{y\in M;\ |x-y|\leq C_1 R\}\subset B(x,R)\subset\{y\in M;\ |x-y|\leq C_2 R^{1/r}\}$$

pour tout $x\in K$ et $0<R\leq R_0$. Pour $I=(i_1,\dots,i_k)$ multi-indice, $1\leq i_j\leq m$, on note $|I|=k, X^I=X_{i_1}\dots X_{i_k}$ l'opérateur d'ordre $|I|$, et $X_I=[X_{i_1},\dots,[X_{i_{k-1}}, X_{i_k}]\dots]$ le commutateur de longueur $|I|$.

Maintenant, pour $0<\alpha<1$, on définit

(4) $$S^\alpha(\overline{\Omega})=\{f\in C^0(\overline{\Omega});[f]_{\alpha,\overline{\Omega}}=\operatorname{Sup}_{x,y\in\overline{\Omega}}\frac{|f(x)-f(y)|}{\rho(x,y)^\alpha}<+\infty\}$$

et pour $k\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$,

(5) $$S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})=\{f\in S^\alpha(\overline{\Omega});\ X^I f\in S^\alpha(\overline{\Omega});\forall|I|\leq k\}\ .$$

On pose

$$[u]_{k,\overline{\Omega}}=\operatorname{Sup}_{x\in\overline{\Omega},|J|=k}|X^J u(x)|\ ,\ [u]_{k,\alpha,\overline{\Omega}}=\operatorname{Sup}_{|J|=k}[X^J u]_{\alpha,\overline{\Omega}}\ .$$

On définit la norme sur $S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ par $\|u\|_{S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}=\sum_{j=0}^{k}[u]_{j,\overline{\Omega}}+[u]_{k,\alpha,\overline{\Omega}}$. Les espaces $S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ sont alors des espaces de Banach, et possèdent les propriétés suivantes (voir lemme 2.1 de [7]):

i) On a l'inclusion continue: $S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})\subset C^{(k+\alpha)/r}(\Omega)$ pour tout $k\in\mathbb{N}, 0<\alpha<1$.

ii) Si $F(x,z)\in C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R})$, $u\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ réelle, on a alors $F(x,u(x))\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

iii) Supposons que $j+\beta<k+\alpha$ avec $j,k\in\mathbb{N}$ et $0<\beta,\ \alpha<1$, alors pour tout $\varepsilon>0$, il existe une constante $C>0$ telle que

(6) $$\|u\|_{S^{j,\beta}(\overline{\Omega})}\leq\varepsilon\|u\|_{S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})}+C\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$$

pour tout $u\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$.

Pour des fonctions définies sur la frontière $\partial\Omega$, on définit $S^{k,\alpha}(\partial\Omega)=\{f|_{\partial\Omega};\ f\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})\}$ pour tout $k\in\mathbb{N}$,et $0<\alpha<1$, et la norme de $u\in S^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ par $\|u\|_{S^{k,\alpha}(\partial\Omega)}=\operatorname{Inf}\{\ \|f\|_{S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})};\ f\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ avec $f|_{\partial\Omega}=u\}$. Pour $k\in\mathbb{N}$ et $0<p<+\infty$, on définit aussi comme dans [6]

(7) $$M^{k,p}(\Omega)=\{f\in L^p(\Omega);\ X^J f\in L^p(\Omega),\forall|J|\leq k\}$$

et la norme de $u\in M^{k,p}(\Omega)$ par $\|u\|_{M^{k,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|J|\leq k}\|X^J f\|^p_{L^p(\Omega)}\right)^{1/p}$. On note $M^k(\Omega)=M^{k,2}(\Omega)$ et $M_0^{k,p}(\Omega)$ la fermeture de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $M^{k,p}(\Omega)$. Alors $M^{k,p}(\Omega)$ est un espace de Banach séparable et réflexif pour $1<p<+\infty$ et $M^k(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable. On a aussi les propriétés suivantes:

iv) On a l'inclusion continue $M_0^{k,p}(\Omega)\subset W^{k/r,p}(\Omega)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et $1<p<+\infty$, où $W^{s,p}(\Omega)$ est l'espace de Sobolev usuel.

$v)$ Pour tout $\varepsilon>0$ et $0<|J|<k$, il existe une constante $C>0$ telle que

(8) $$\|X^J u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \|u\|_{M^{k,p}(\Omega)} + C\|u\|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $u \in M^{k,p}(\Omega)$.

Pour le problème de Dirichlet linéaire suivant:

(9) $$Hu=f \qquad \text{dans} \quad \Omega$$

(10) $$u=\varphi \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega,$$

on pose d'abord une condition près de bord $\partial\Omega$. On note:

$$\mathfrak{X}_1=\begin{cases}\text{L'espace engendre par les combinisons linéaires de champs de}\\ \text{vecteurs } X_1,\ldots,X_m \text{ avec les coefficients réels de la classe } C^\infty(M),\end{cases}$$

et $\mathfrak{X}'_1=\mathfrak{X}_1 \cap T_x(\partial\Omega)$ pour $x\in\partial\Omega$. Maintenant pour $j\leq r$, on définit

$$\mathfrak{X}_j=[\mathfrak{X}_1,\mathfrak{X}_{j-1}]=\{[Y,Z];\ Y\in \mathfrak{X}_1,\ Z\in \mathfrak{X}_{j-1}\}$$
$$\mathfrak{X}'_j=[\mathfrak{X}'_1,\mathfrak{X}'_{j-1}]=\{[Y,Z];\ Y\in \mathfrak{X}'_1,\ Z\in \mathfrak{X}'_{j-1}\}.$$

La conditon de Hörmander implique $\mathfrak{X}_r(x)=T_x(M)$ pour tout $x\in M$. Supposons qu'on a:

$$(\text{S.E.}\partial\Omega) \qquad \begin{cases}\partial\Omega \text{ est non caractéristique pour le système de champs de vecteurs}\\ X_1,\ldots,X_m. \text{ Et pour tout } 1\leq j\leq r, \text{ on a } \mathfrak{X}'_j=\mathfrak{X}_j\cap T_x(\partial\Omega) \text{ pour tout } x\\ \in\partial\Omega, \text{ et la dimension de } \mathfrak{X}_j \text{ est constante dans un voisinage de } \overline{\Omega}.\end{cases}$$

Avec cette condition, toutes les bases de $\mathfrak{X}'_1$ satisfont aussi la condition de Hörmander à l'ordre r sur $\partial\Omega$, les espaces $S^{k,\alpha}(\partial\Omega)$ peuvent donc obtenir comme $S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ par les définitions (4) (5) avec une base de $\mathfrak{X}'_1$. On a le théorème suivant:

Théorème 1

Supposons que le système de champs de vecteurs X satisfait la condition de Hörmander et l'hypothèse (S. E. $\partial\Omega$). *On a alors que pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$, et $f\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi\in S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$, il existe une unique solution $u\in S^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$ pour le problème de Dirichlet (9) (10).*

Pour le problème nonlinéaires (1) (2), pour alléger les notations (voir [2,4,8]), nous ferons directement l'hypothèse suivante, nous dirons sous ellipticité höldérienne pour le système de champs de vecteurs X sur $\overline{\Omega}$:

$$(\text{S.E.H.}) \qquad \begin{cases}\textit{Il existe un entier } 0\leq k_0\leq +\infty, \textit{ tel que pour tout } 0\leq k\leq k_0,\ 0<\alpha<1,\\ f\in S^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \varphi\in S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega), \textit{ et tout le système de champs de}\\ \textit{vecteurs } \widetilde{X} \textit{ équivalent à } X, \textit{ le problème de Dirichlet:} Hu=f \textit{ dans } \Omega,\\ u=\varphi \textit{ sur } \partial\Omega, \textit{ possède une solution et une seule dans } S^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}).\end{cases}$$

En utilisant le théorème du graphe fermé, on peut obtenir l'estimation sous elliptique *a priori* (sur $\overline{\Omega}$) suivante:

(11) $$\|u\|_{S^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})} \leq C\{\|f\|_{S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)}\}$$

où C est indépendant de u, f et φ.

Pour le problème nonlinéaire, on a d'abord le théorème suivant:

Théorème 2

Supposons que l'opérateur quasilinéaire Q est sous elliptique, A_{ij}, $B \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m)$ et $\varphi \in S^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ avec $0<\alpha<1$, que le système de champs de vecteur X possède la propriété (S.E.H.) sur $\overline{\Omega}$, et que $\partial\Omega$ est non caractéristique pour X. Si pour certain $0<\beta<1$, il existe une constante B telle que pour toutes les solutions $u \in S^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ du problème de Dirichlet $(0 \leq \sigma \leq 1)$*:*

(1)' $$Q_\sigma u \equiv \sum_{ij=1}^{m} A_{ij}(x,u,Xu)X_iX_ju + (1-\sigma)c_0 u + \sigma B(x,u,Xu) = 0 \qquad dans\ \Omega$$

(2)' $$u = \sigma\varphi \qquad sur\ \partial\Omega$$

on ait l'estimation suivante

(12) $$\|u\|_{S^{1,\beta}(\overline{\Omega})} \leq B \ .$$

Alors le problème de Dirichlet (1) (2) peut être résolu dans $S^{2,\beta}(\overline{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$. De plus, si $\varphi \in S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ avec $0 \leq k \leq k_0$, alors $u \in S^{k+2,\beta}(\overline{\Omega}) \cap C^{\infty}(\Omega)$.

Nous avons donc ramené le problème de résolubilité du probléme de Dirichlet (1) (2) à un problème de construction d'estimations *a priori* (12) pour les solutions régulières. Pour les équations générales de la forme (1), cette estimation *a priori* est difficile à construire. Nous étudierons dans cet exposé un cas simple de l'équation de la forme suivante:

(13) $$Pu \equiv -\sum_{ij=1}^{m} X_i^* A_{ij}(x,u)X_ju + \sum_{j=1}^{m} B_j(x,u)X_ju + C(x,u) = 0 \qquad \text{dans } \Omega$$

(14) $$u = \varphi \qquad \text{sur } \partial\Omega$$

où $A_{ij}, B_j, C \in C^{\infty}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R})$. Supposons que pour $(x,z,p) \in \overline{\Omega} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$, on ait:

(15) $$\lambda|p|^2 \leq \sum_{ij=1}^{m} A_{ij}(x,z)p_ip_j \leq \Lambda|p|^2$$

(16) $$|A_{ij}(x,z)|\ ,\ \ |B_j(x,z)|\ ,\ \ |C(x,z)| \leq g(x)$$

où $g, f \in C^0(\overline{\Omega})$, λ, Λ sont deux constantes posititves.

On suppose que $\partial\Omega$ satisfait la condition de cône extérieur uniforme, c'est-à-dire qu'il existe $C_e>0$ et $R_0>0$ tels que

(17) $$|B_R(x_0) \backslash \{\Omega \cap B_R(x_0)\}| \geq C_e |B_R(x_0)|$$

pour tout $x_0 \in \partial\Omega$, et $0<R\leq R_0$. On a le théorème suivant:

Théorème 3

Supposons que l'opérateur quasilinéaire P satisfasse les conditions de structure (15) (16), $\varphi \in S^{2,\alpha}(\partial\Omega)$ avec $0<\alpha<1$, que le système de champs de vecteurs X possède la *propriété (S.E.H.) sur $\overline{\Omega}$, que $\partial\Omega$ vérifie la condition (17) et qu'il soit non caractéristique pour X. Alors il existe $\mu>0$ tel que le problème de Dirichlet (13) (14) possède une solution $u\in S^{2,\mu}(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega)$. De plus si $\varphi\in S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$ avec $0\leq k\leq k_0$, on a encore $u\in S^{k+2,\mu}(\overline{\Omega})\cap C^\infty(\Omega)$.*

Pour l'unicité de la solution , nous avons le principe de comparaison pour des équations quasilinéaires de type divergence suivantes:

(18) $$\widetilde{Q}u\equiv-\sum_{j=1}^{m}X_j^*A_j(x,u,Xu)+B(x,u,Xu)=0\ ,$$

où A_j, $B\in C^\infty(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m)$. On dit qu'une fonction u définie sur Ω vérifie $\widetilde{Q}u\geq0$ dans Ω (=0, ≤0), si on a $A_j(x,u(x),Xu(x))$, $B(x,u(x),Xu(x))\in L^\infty_{loc}(\Omega)$ et

(19) $$\widetilde{Q}(u,\varphi)\equiv\int_\Omega\{\sum_{j=1}^{m}A_j(x,u,Xu)X_j\varphi-B(x,u,Xu)\varphi\}dx\leq0,\ (=0,\ \geq0)$$

pour toutes les fonctions non négatives $\varphi\in M_0^1(\Omega)$. On a le théorème suivant:

Théorème 4

Soient u, $v\in S^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\widetilde{Q}u\geq0$, $\widetilde{Q}v\leq0$ dans Ω, et $u\leq v$ sur $\partial\Omega$. Supposons que la matrice $(\frac{\partial A_j}{\partial p_i}(x,z,p))$ est définie positive, et que la fonction $B(x,z,p)$ soit décroissante par rapport à la variable z pour tout $(x,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^m$ fixé. De plus si A_j, et B vérifient l'une des trois propriétés suivantes, on a alors $u\leq v$ dans Ω.

i) $A=(A_1,\dots,A_m)$ est indépendant de z et $\frac{\partial B}{\partial z}<0$ pour tout $(x,z,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$.

ii) la fonction B est indépendante de p.

iii) la matrice $\begin{bmatrix}\frac{\partial A_i}{\partial p_j} & \frac{\partial B}{\partial p_i}\\ \frac{\partial A_j}{\partial z} & \frac{\partial B}{\partial z}\end{bmatrix}$ est semi-définie positive, pour $(x,z,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^m$.

Remarque

On peut introduire des conditions de structure plus générales comme pour les équations quasilinéaires elliptiques;on a seulement traité ici le cas le plus simple, pour les autres conditions, on renvoie le lecteur à [1].

§3 Problème de Dirichlet pour les équations linéaires

On esquisse dans cette section la démonstration du théorème 1, En ce que concerne l'existence et l'unicité de la solution, J. M. Bony a démontré que pour toutes $f\in C^0(\overline{\Omega})$,

$\varphi\in C^0(\partial\Omega)$ le problème (9) et (10) admet une et une seule solution $u\in C^0(\overline{\Omega})$. Il nous reste donc à étudier la régularité $S^{k,\alpha}$ jusqu'au bord pour cette solution. Comme c'est un problème local, avec la condition (S. E. $\partial\Omega$), on peut transformer le problème (9) (10) sous la forme suivante:

(9)' $\qquad Lu \equiv \partial^2_{x_n}u+\sum_{j=1}^{m-1} Y_j^2u+c(x)u=f \qquad$ dans B^+

(10)' $\qquad u|_{x_n=0}=\varphi \qquad$ sur T_0

où $B^+=B\cap\{x_n>0\}$, $\overline{B}^+=B\cap\{x_n\geq 0\}$ et B est un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^n$, $T_0=B\cap\{x_n=0\}$ et $supp\ f\subset\overline{B}^+$, $supp\varphi\subset T_0$, $Y_1,\dots,Y_{m-1}$ sont des champs de vecteurs tangentiels aux hypersurfaces $T_\varepsilon=B\cap\{x_n=\varepsilon\}$ pour ε petit.

Posons $Y_j^\varepsilon=Y_j|_{T_\varepsilon}$, la condition (S. E. $\partial\Omega$) implique que $Y_1^\varepsilon,\dots,Y_{m-1}^\varepsilon$ satisfait la condition de Hörmander sur T_ε, et $S^{k,\alpha}(B)|_{T_\varepsilon}=S^{k,\alpha}_{Y^\varepsilon}(T_\varepsilon)$ pour ε petit, où les espaces $S^{k,\alpha}_{Y^\varepsilon}(T_\varepsilon)$ sont définis comme $S^{k,\alpha}(\Omega)$ par le système de champs de vecteurs $Y_1^\varepsilon,\dots,Y_{m-1}^\varepsilon$. On étudie maintenant l'approximation homogène de B, l'hypothèse (S. E. $\partial\Omega$) nous permet de choisir une base de $\mathfrak{X}_r$ sur B de la forme $\{\partial_{x_n},Y_{jk}\ ;\ j\leq r,\ k\leq k_j\}$ où Y_{jk}est le commutateur des champs de vecteurs $Y_1,\dots,Y_{m-1}$, de longueur j tel que $\{\partial_{x_n},Y_{jk};\ j\leq r',\ k\leq k_j\}$ soit aussi une base de $\mathfrak{X}_{r'}$ sur B pour tout $r'\leq r$. Il évident que $Y_{jk}|_{T_\varepsilon}=Y_{jk}^\varepsilon$, Y_{jk}^ε désignent le commutateur de $Y_1^\varepsilon,\dots,Y_{m-1}^\varepsilon$. On définit l'application exponentielle Θ_x par

(20) $\qquad \Theta_x(y)=u=(u_{jk},u_n)=\Theta(x,y), \quad$ si $y=exp(\sum_{jk}u_{jk}Y_{jk}^{x_n}+u_n\partial_{x_n})x$.

On a $\Theta(x,y)=(\Theta'(x,y)\ ,y_n-x_n)$ et

(21) $\qquad \partial_{u_n}=\Theta^*_x(\partial_{x_n}),\quad Y_{j,x}=\Theta^*_x(Y_j)\quad$ j=1,..., m−1

où Θ^*_x est le différentiel de Θ_x.

On fait maintenant comme Métivier dans [3] , prandre $\widehat{Y}_{j,x}$ la partie principale homogène de degré 1 de $Y_{j,x}$, j=1,..., m−1. $\{\partial_{u_n},\widehat{Y}_{j,x}\ ;j=1,\dots,m-1\}$ engendre alors une algèbre de Lie nilpotente $\mathcal{G}_x$ de dimension n et de rang r. Encore une fois, la condition (S. E. $\partial\Omega$) nous permet de prandre $\widehat{Y}_{j,x}$ indépendant de la variable u_n, donc $\mathcal{G}_x\cong\mathcal{G}_{x'}^{x_n}\times\mathbb{R}$, où $\mathcal{G}_{x'}^{x_n}$ est une algèbre de Lie nilpotente engendre par $\{\widehat{Y}_{j,x}\ ;j=1,\ \dots\ ,\ m-1\}$ de dimension $n-1$ et de rang r . Le groupe de Lie nilpotent correspondant est $G_x\cong G_{x'}^{x_n}\times\mathbb{R}$ .Maintenant la partie homogène de l'opérateur L est $\mathcal{L}_x=\partial^2_{u_n}+\sum_{j=1}^{m-1}\widehat{Y}_{j,x}$, il est un opérateur invariant à gauche, homogène de degré 2 sur le groupe de Lie nilpotent G_x. D'après un théorème de Folland il existe un noyau k_x^0 homogène de degré $-Q+2$ sur G_x tel que $\mathcal{L}_xk_x^0(u)=\delta_0(u)$, où $Q=1+\sum_{j=1}^r j(k_j-k_{j-1})$ est la dimension homogène de G_x. Comme les coefficients de $\mathcal{L}_x$ sont indépendants de u_n, et $\partial^2_{u_n}=\partial^2_{-u_n}$, on a $k_x^0(u',u_n)=k_x^0(u',-u_n)$. Choisissons $a,\ b\in C_0^\infty(\overline{B}^+)$ avec $b(x)\equiv 1$ sur $suppa$. On pose :

(22) $K(x,y)=a(y)(k_x^0\,(\Theta(x,y)) - k_x^0\,(\Theta(x,y)+2x_ne_n))b(x),$

et $Kf(y)=\int_{B^+}K(x,y)f(x)dx,$ on a alors le résultat suivant.

Proposition 5

Avec les notations ci-dessus, on a

(23) $L^yK(x,y)=a(y)\delta_x(y) - H(x,y),$ *pour* $(x,y)\in B^+\times B^+$

(24) $Kf\,|_{y_n=0}=0$ *pour tout* $f\in C_0^0(\overline{B}^+\times\overline{B}^+)$

où L^y *désigne l'opérateur différentiel opérant sur les variables y. Et pour tout* $k\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$, *on a que* $K: S_0^{k,\alpha}(\overline{B}^+)\to S_0^{k+2,\alpha}(\overline{B}^+)$ *et* $H: S_0^{k,\alpha}(\overline{B}^+)\to S_0^{k+1,\alpha}(\overline{B}^+)$ *sont des opérateurs continus, où* $S_0^{k,\alpha}(\overline{B}^+)=\{f\in S^{k,\alpha}(\overline{B}^+)$ *avec* $\mathrm{supp}\, f\subset\overline{B}^+\}$.

En effet, pour les noyaux $K(x,y)$ et $H(x,y)$, on a les estimations suivantes

$$|X^JK(x,y)|\le C_J\rho(x,y)^{2-|J|}\,|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$
$$|X^JH(x,y)|\le C_J\rho(x,y)^{1-|J|}\,|B(x,\rho(x,y))|^{-1}$$

où $X=(Y_1,\dots,Y_{m-1},\partial_{y_n})$ et $x, y\in\overline{B}^+$. En utilisant cette proposition, on obtient immédiatement le résuletat de régularité pour la solution du problème (9)' (10)' : pour tout $k\in\mathbb{N}$, $0<\alpha<1$, et touts $f\in S_0^{k,\alpha}(\overline{B}^+)$ $\varphi\in S_0^{k+2,\alpha}(T_0)$, la solution du problème (9)' (10)' est dans la classe $S_0^{k+2,\alpha}(\overline{B}^+)$. De plus on a l'estimation suivante :

$$\|u\|_{S^{k+2,\alpha}(\overline{B}^+)}\le C\{\|f\|_{S^{k,\alpha}(\overline{B}^+)}+\|\varphi\|_{S^{k+2,\alpha}(T_0)}\}$$

Recoller toutes estimations locales , on peut finalement obtenir l'estimation (11) et démonter le théorème 1.

Pour les équations linéaires en forme suivantes

(25) $$Lu\equiv\sum_{ij=1}^{m}a_{ij}(x)X_iX_ju+\sum_{j=1}^{m}b_j(x)X_ju+c(x)u=f \quad \text{dans} \quad \Omega$$

on a le résultat suivant

Corollaire 6

Supposons que les coefficients de l'opérateur L soient de la classe $S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$ *pour un certain* $k\in\mathbb{N}$, *et* $0<\alpha<1$, *que la matrice* $(a_{ij}(x))$ *est définie positive pour* $x\in\overline{\Omega}$ *et* $c(x)\le c_0<0$. *Alors pour tout* $f\in S^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$, $\varphi\in S^{k+2,\alpha}(\partial\Omega)$, *le problème de Dirichlet pour l'équation (25) ademet une et une seule solution dans la classe* $S^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.

§4 Théorème d'existence pour les équations nonlinéaires

On rappelle d'abord le théorème de point fixe de Leray-Schauder.

Lemme 7

Soit $(\mathfrak{B},\|\cdot\|)$ *un espace de Banach,* $T:\mathfrak{B}\to\mathfrak{B}$ *une application compacte et continue. Supposons, pour tout* $b\in\mathfrak{B}$ *vérifiant* $b=tTb$, $t\in[0,1]$, *on ait*

(26) $$\|b\|_{\mathfrak{B}} \leq B$$
où la constante B est indépendant de b et t. Alors T possède un point fixe.

Démonstration du théorème 2

On fixe d'abord $0<\beta<1$, et on pose $\{\mathfrak{B}, \|\bullet\|\}=\{S^{1,\beta}(\overline{\Omega});\|\bullet\|_{S^{1,\beta}(\overline{\Omega})}\}$; l'opérateur $T : S^{1,\beta}(\overline{\Omega})\rightarrow S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ est défini comme suit: pour $v\in S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $Tv=u$ est la solution unique du problème linéaire suivant:

(27) $$\sum_{ij=1}^{m} a_{ij}^{v}(x)X_iX_ju+c_0u+b^{v}(x)-c_0v(x)=0 \quad \text{dans} \quad \Omega$$

(28) $$u=\varphi \qquad \text{sur} \quad \partial\Omega$$

où $a_{ij}^{v}(x)=A_{ij}(x,v(x),Xv(x))$, $b^{v}(x)=B(x,v(x),Xv(x))\in S^{\beta}(\overline{\Omega})$, $c_0<0$. L'hypothèse (S. E. $\partial\Omega$) implique que l'opérateur T est bien défini, et $u\in S^{2,\alpha\beta}(\overline{\Omega})$. Il est évident que le problème de Dirichlet (1) (2) est résoluble si et seulement si l'opérateur T possède un point fixe. L'équation $u=\sigma Tu$ est exactement sous la forme (1)' (2)'. Pour utiliser le lemme 7, il nous reste à montrer que T est un opérateur compact et continu de $S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ dans $S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. En effet, d'après le corollaire 6, T est un opérateur borné de $S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$ dans $S^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, mais l'inégalité d'interpolation (6) implique que l'opérateur identique est compact de $S^{2,\beta}(\overline{\Omega})$ dans $S^{1,\beta}(\overline{\Omega})$. La régularité $C^{\infty}(\Omega)$ est le résultat de [7]. On a donc démontré le théorème 2.

§5 Estimation à priori pour la solution du problème (13) (14)

On étudie d'abord le principe du maximum pour l'opérateur $\tilde{Q}$, on donne quelques conditions de structure pour les coefficients de $\tilde{Q}$. Supposons pour $(x,z,p)\in \overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m}$, on ait:

(29) $$\sum_{j=1}^{m} A_j(x,z,p)p_j\geq|p|^2-g^2(x)$$

(30) $$|A_j(x,z,p)|\leq\Lambda(|p|+g(x))$$

(31) $$B(x,z,p)\,\mathrm{sign}z\leq\Lambda(|p|+f(x))$$

où f, $g\geq0$, f, $g\in C^{0}(\overline{\Omega})$, et Λ est une constante. Pour un certain $q>nr$, on note $q^*=nrq/(nr+q)$ et pose $K=\|g\|_{L^{q}(\Omega)}+\|f\|_{L^{q^*}(\Omega)}$. Nous avons le principe du maximum suivant:

Proposition 8

Soient A_j, $j=1,\ldots,m$, et B satisfaisant les conditions (29) - (31). Supposons $u\in S^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ vérifiant $\tilde{Q}u \geq 0$ dans Ω. On a alors

(32) $$\operatorname*{Sup}_{\Omega} u \leq \operatorname*{Sup}_{\partial\Omega} u^{+} + CK$$

où $C=(n,r,\Lambda,|\Omega|)$.

Pour la deuxième étape, estimer la constante de Hölder pour des solutions bornées du problème (18) et (14), nous supposons que les coefficients de l'opérateur $\widetilde{Q}$ satisfont encore une condition structure :

(33) $$|B(x,z,p)|\leq\Lambda(|p|+f(x)),\ \ \forall(x,z,p)\in\overline{\Omega}\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^{m}$$

Nous avons le resultats suivant:

Proposition 9

Supposons que l'opérateur $\widetilde{Q}$ *satisfasse les conditions de structures (29) (30) (33), que* $\partial\Omega$ *satisfait la condition (17) et qu'il soit non caractéritique pour X. Soit* $u\in S^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$ *une solution du problème de Dirichlet (18) et (14) avec* $\varphi\in S^{2,\alpha}(\partial\Omega)$. *Il existe alors* $\mu>0$ *tel que*

(34) $$\|u\|_{S^{\mu}(\overline{\Omega})}\leq C$$

où $C=C(n,r,\Lambda,\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)},\|\varphi\|_{S^{\mu}(\partial\Omega)},|\Omega|)$.

Dans [6], on a déja obtenu l'estimation (34) à l'intérieur de Ω. Pour l'estimation près de bord $\partial\Omega$, comme dans le théorème 11 de [6] , pour un certain $q\in\,]nr,n(r+1)[$, on pose $K=\|f+g^{2}\|_{L^{\tilde{q}}}+\|g\|_{L^{q'}}$, $K(R)=KR^{1-nr/q}$, où $\tilde{q}=nq/(2n-q+nr)>1$ et $q'=nq/(nr+n-q)>1$, on pose aussi $M=\operatorname*{Sup}_{\partial\Omega\cap B_{2R}(x_0)} u^{+}$, $m=\operatorname*{Inf}_{\partial\Omega\cap B_{2R}(x_0)} u$, et

$$u_M^{+}(x)=\begin{cases}Sup\{u(x),M\}, & x\in\Omega\\ M & x\notin\Omega\end{cases}\ ,\quad u_m^{-}(x)=\begin{cases}Inf\{u(x),m\}, & x\in\Omega\\ m & x\notin\Omega\end{cases}$$

on obtient le résultat suivant : il existe $R_0>0$ tel que, pour tout $x_0\in\partial\Omega$, $0<R\leq R_0$, si $u\geq 0$ sur $B_{2R_0}(x_0)\cap\Omega$ est une solution du problème (18) (14), on ait (pour $0<\theta<1$)

(35) $$\operatorname*{Sup}_{B_{\theta R}(x_0)}(\tilde{u}_M^{+})^{p}\leq C((1-\theta)R)^{-\alpha}|B_R(x_0)|^{-1}\int_{B_R(x_0)}(\tilde{u}_M^{+})^{p}dx\ \ ,\forall p>0$$

(36) $$\operatorname*{Sup}_{B_{\theta R}(x_0)}(\tilde{u}_m^{-})^{p}\leq C((1-\theta)R)^{-\alpha}|B_R(x_0)|^{-1}\int_{B_R(x_0)}(\tilde{u}_m^{-})^{p}dx\ \ ,\forall p<0$$

où $C=C(n,r,p,q,\Lambda,\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)})$, et $\alpha=\alpha(n,r)>0, \tilde{u}_M^{+}=u_M^{+}+K(R)$, $\tilde{u}_m^{-}=u_m^{-}+K(R)$. En utilisant cettes inégalités de Harnack faibles près de $\partial\Omega$ et la conditon (17), on peut obtenir immediatement la proposition 9.

Nous démontrons maintenant le théorème 3, *i. e.* que sous les conditions (15)-(17) et (S.E.H.), on construit l'estimation *a priori* (12) pour la solution $u\in S^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ du problème de Dirichlet (13) (14). Nous avons l'estimation suivant:

(37) $$\|u\|_{S^{1,\mu}(\overline{\Omega})}\leq C(n,r,\lambda,\Lambda,|\Omega|,\|u\|_{S^{\mu}(\overline{\Omega})},\|\varphi\|_{S^{2,\mu}(\partial\Omega)})$$

où $\mu>0$ est donné par la proposition 9. En effet, on a $a_{ij}(x)=A_{ij}(x,u(x))$, $b_j(x)=B_j(x,u(x))$, $c(x)=C(x,u(x))\in S^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ et

$$\|a_{ij}\|_{S^\alpha(\Omega)},\ \|b_j\|_{S^\alpha(\Omega)},\ \|c\|_{S^\alpha(\Omega)} \leq \widetilde{\Lambda}$$

où $\widetilde{\Lambda}=\widetilde{\Lambda}(\ \|u\|_{S^\alpha(\Omega)},\|u\|_{L^\infty(\Omega)},\|g\|_{L^\infty(\Omega)},C_P)$ avec

$$C_P= \underset{x\in\overline{\Omega},|z|\leq\|u\|_{L^\infty}}{Sup} \left\{\sum_{ij=1}^{m} \left|\partial_{x,z}A_{ij}(x,z)\right|+\sum_{j=1}^{m} \left|\partial_{x,z}B_j(x,z)\right|+\left|\partial_{x,z}C(x,z)\right|\right\} .$$

donc $u\in S^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ est une solution de l'équation linéaire suivante

$$\begin{cases} -\sum_{ij=1}^{m} X_i^* a_{ij}(x)X_ju+\sum_{j=1}^{m} b_j(x)X_ju+c(x)=0 , & \text{dans } \Omega \\ u=\varphi & \text{sur } \quad \partial\Omega . \end{cases}$$

L'estimation (37) resulte donc de l'estimation (11).

Fin de démonstration du théorème 3

D'après la proposition 8 , on a l'estimation pour $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$, et d'après la proposition 9, on a l'estimation pour $\|u\|_{S^\mu(\overline{\Omega})}$. Le théorème 3 résulte donc de l'estimation (37) et du théorème 2.

Le principe de comparaison est un resultat classique (voir [1]).

RÉFÉRENCES

[1] D.Gilbarg & N.S.Trudinger : *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer-Verlag, 1983.

[2] D.Jerison: *The Dirichlet problem for the Kohn Laplacien on the Heisenberg group I, II,* J.Funct.Anal. 43 (1981) 97-142,224-257.

[3] G.Métivier : *Fonctions spectrales et valeurs propres d'une classe d'équations non elliptiques,* Comm.P.D.E. 1(1976) 467-519.

[4] A.Nagel & E.M. Stein & S.Wainger : *Balls and metrics defined by vector fields I, basic properties,* Acta math.155(1985)103-147.

[5] L.Rothschild & E.M.Stein : *Hypoelliptic differential operators and nilpotent Lie groups,* Acta Math. 137 (1977) 247-320.

[6] C. J. Xu : *Subelliptic variational problems,* Bull.Soc.Math.France, 118 (1990) 147-159.

[7] C. J. Xu : *Regularity problems for quasilinear second order subelliptic equations,* article à paraître.

[8] C.J. Xu : *Problème de Dirichlet pour l'opérateurs de Hörmander,* Prépublication de l'Ecole polytechnique,

[9] C. J. Xu: *Problème de Dirichlet pour une classe d'équations aux dérivées partielles quasilinéaires sous elliptiques du second ordre,* Prépublication de l'Ecole polytechnique, à paraitre.

Chao-Jiang XU
Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique
91128 Palaiseau, FRANCE
Et
Département de Mathématiques
Université de Wuhan
430072 Wuhan, R. P. CHINE