Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

C. Gérard

Résonances et time decay en limite semiclassique

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1990-1991), exp. nº 11, p. 1-7

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1990-1991____A11_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (FRANCE)
Tél. (1) 69 33 40 91
Fax (1) 69 33 30 19 ; Télex 601.596 F

Séminaire 1990-1991

EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES

RESONANCES ET TIME DECAY
EN LIMITE SEMICLASSIQUE

C. GERARD

Exposé n° XI

19 février 1991

1 Introduction

Nous présentons dans cet exposé les résultats d'un travail à paraitre en collaboration avec I.M.Sigal. Nous allons d'abord, pour situer notre travail, rappeler quelques résultats de base sur les résonances pour l'opérateur de Schrödinger. Pour ne pas compliquer inutilement la discussion, nous allons considérer un opérateur de Schrödinger à deux corps :

$$H = -\Delta_x + V(x) \text{ sur } \mathbb{R}^n$$

où $V(x)$ est un potentiel réel tendant vers 0 à l'infini. Les résonances sont considérées par les physiciens comme des particules instables ayant une durée de vie finie. Ces résonances se détectent en particulier sur la section de diffusion sous forme de pics de hauteur finie. Mathématiquement, la méthode standard pour définir des résonances est celle du complex scaling (ou une de ses variantes, voir [Ag-Co], [Ba-Co], [Cy], [S]) où l'on demande essentiellement que $V(x)$ se prolonge holomorphiquement dans un secteur de $\mathbb{C}^n$. Les résonances sont alors obtenues comme pôles du prolongement méromorphe d'éléments de matrice de la résolvante de $H, < (H-z)^{-1}\psi, \psi >$ pour des états particuliers ψ (voir figure 1)

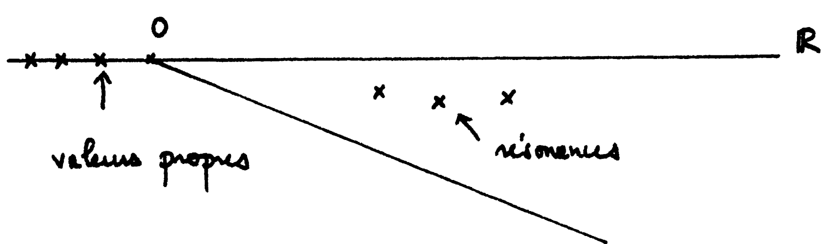

Fig. 1

Il est donc important de relier cette définition mathématique à des quantités physiques. Il y a essentiellement deux façons de faire ce lien. La première est de montrer que la matrice de scattering $S(\lambda)$ a un prolongement méromorphe dont les pôles coincident avec les résonances. Ce point est maintenant établi pour des problèmes à 2 corps.

La deuxième façon est d'exhiber des états ayant un comportement de type "décrois sance exponentielle". Plus précisément, on cherche à construire des états $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que

$$|< e^{-itH}u_0, u_0 >| \text{ " décroit " comme} e^{\Gamma t}$$

La constante Γ est interprêtée comme la partie imaginaire de la résonance. Un tel comportement traduit bien l'intuition d'une particule dont la probabilité de présence dans un domaine borné décroit exponentiellement.

Il est cependant bien connu (cf Simon [Si]), qu'un comportement du type :

$$|< e^{-itH}u_0, u_0 >| \leq e^{-\Gamma t}$$

est impossible si H est semiborné inférieurement, (sauf si $u_0 = 0$!). On s'attend donc à avoir des termes correctifs dans le comportement de $< e^{itH}u_0, u_0 >$.

On peut aussi remarquer une analogie intéressante entre les deux façons de caractériser des résonances. Dans les deux cas, on doit briser l'invariance par transformations unitaires de la théorie spectrale classique. Dans le premier cas, on introduit un Hamiltonien de comparaison $H_0 = -\Delta$ pour définir $S(\lambda)$. Dans le deuxième, on isole dans l'espace $\mathbb{R}^n$ une partie compacte d'où la particule va s'échapper. Notre but est d'étudier le lien entre résonances et comportement en temps pour des Hamiltoniens semi-classiques

$$H = -h^2\Delta + V(x)$$

et des potentiels V non nécessairement dilatables analytiquement.

2 La classe de Hamiltoniens.

On considère des Hamiltoniens

$$H = -h^2\Delta_x + V(x) + V_s \quad \text{sur } L^2(\mathbb{R}^n),$$

avec :
- V_s est un potentiel singulier, à support compact, Δ borné avec borne relative < 1.
- $V(x)$ est un potentiel C^∞ dans une classe de Hörmander $S(1, g)$ pour une métrique $g_x(dx)$ σ - tempérée et à croissance lente.

On s'intéresse aux résonances près d'un niveau d'énergie I, qui est supposé *non captif* à l'infini au sens suivant :

Il existe une fonction $G(x,\xi) \in C^\infty(T^\star(\mathbb{R}^n$ (fonction fuite), telle que $G(x,\xi) =< x, \xi >$ $+r(x,\xi)$, avec $r \in S(1, \frac{d\xi^2}{<\xi>^2} + g_x(dx))$ telle que :

$$H_pG(x,\xi) \geq C_0 > 0 \text{ pour } p(x,\xi) \in I, \ |x| \geq R >> 1.$$

(On pose ici $p(x,\xi) = \xi^2 + V(x)$).

- On suppose d'autre part qu'on peut modifier $p(x,\xi)$ sur un compact pour que I soit non captif partout :

$$\exists\, r_0(x,\xi) \in C_0^\infty(T^\star\mathbb{R}^n) \text{ telle que si } \tilde{p} = p + r_0, H\tilde{p}G \geq C_0 > 0 \quad \text{pour} \quad \tilde{p}(x,\xi) \in I.$$

Exemples : Notre principal exemple est celui des Hamiltoniens à N corps généralisés : $H = -h^2\Delta_x + \sum_{a\in A} V_a(x^a)$, où $x^a = \pi^a x$ pour une famille $\{\pi^a\}_{r\in A}$ de projections orthogonales (cf [Ag]). Si l'intervalle d'énergie I est tel que I est non captif pour tous les **sous systèmes** de H, H vérifie les hypothèses précédentes.

3 Quasirésonances et états quasirésonants

On introduit maintenant la notice d'états quasirésonants. Cette notion est analogue à celle des **quasimodes** pour les problèmes à spectre discret.

Définition 3.1 *une distribution $u(x,h) \in H^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ est un état quasirésonant associé à la quasirésonance $E(h)$ si :*

i) $\forall R_0 \geq 1$, $\exists N$ *tel que* $\|u_h\|_{H^{-N}(\{|x| \leq R_0\})} = O(h^{-N})$.

ii) Il existe un compact $K \subset \mathbb{R}^n$ *tel que* $\|u_h\|_{L^2(K)} \geq 1$.

iii) $(-h^2\Delta + V(x) + V_s(x) - E(h))u_h = O(h^\infty)$ *dans* $L^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$.

iv) u_h *est* sortant à l'infini *i.e: il existe* C_0 *et* R_0 *tels que:*

$$FSu_h \cap p^{-1}(I) \cap \{|x| \geq R_0\} \subset \{(x,\xi) \mid G(x,\xi) \geq C_0\}$$

v) $ImE(h) \neq O(h^\infty)$, *et* $E(h) \to \lambda_0$, *pour un* $\lambda_0 \in \dot{I}$

Remarque 1 : Dans iv) FSu_h désigne l'ensemble de fréquence de u_h, version semi-classique du fond d'onde (voir par exemple Guillemin - Sternberg [Gu-St]). Si l'ensemble de fréquence de u_h ne rencontre pas le support singulier de V_s, on peut remplacer iv) par d'autres conditions plus simples. Par exemple, il suffit de demander que $FSu_h \subset \Gamma_+$, où Γ_+ est la *queue sortante* pour le flot hamiltonien de p.

Remarque 2 : Il est clair à cause de iii) que les quasirésonances ne sont définies que modulo $0(h^\infty)$. C'est pour cette raison que nous imposons la condition v). Dans la section 5, nous donnerons quelques résultats dans le cas des résonances de forme, où $ImE(h) = 0(e^{-C/h})$.

Donnons maintenant quelques exemples : Tout d'abord on montre facilement que pour les hamiltoniens dilatables analytiquement, les états résonants définis "à la Helffer - Sjöstrand" [He-Sj1] sont des états quasirésonants. On peut d'autre part construire des états quasirésonants dans beaucoup de cas où les résonances ont été étudiées en limite semi-classique, même pour des potentiels non analytiques. Ceci se fait par des constructions B.K.W. classiques. Nous renvoyons à notre travail pour plus de détails.

4 Résultats

Pour appliquer $e^{-itH/h}$ à un état quasirésonant u_h, il faut tout d'abord tronquer u_h dans une région bornée de $T^*\mathbb{R}^n$, pour en faire une fonction L^2. On choisit donc une fonction de troncature $\chi(x,\xi) \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ telle que supp $\nabla\chi$ est assez loin de l'origine. On veut être sûr qu'une trajectoire partant de supp$\nabla\chi \cap \{G(x,\xi) \geq C_0\}$ ne va pas retourner près de l'origine. On fixe ensuite une autre troncature $\chi_0(x)$ telle que :

1) $$\forall t \geq 0, \forall (x,\xi) \in \text{supp}\nabla\chi \cap \{G(x,\xi) \geq c_1\} \ \exp tH_p(x,\xi) \notin \text{supp}\chi_0$$

χ_0 est dite adaptée à χ. En prenant supp $\nabla\chi \subset \{|x| \geq R\}$ avec R assez grand, on peut rendre n'importe quelle fonction χ_0 adaptée à χ. On a alors le résultat suivant :

Théorème 4.1 *Notons $a(h) = h^{-1} Im E(h)$. On a :*

$$e^{-itH/h}\chi(x, hD_x)u_h = e^{-itE(h)/h}\chi(x, hD_x)u_h + r_{\text{out}}(t,h) + r_\infty(t,h),$$

où :

i)
$$\|r_\infty(t,h)\| = 0(h^\infty) \textit{uniformément en } t$$

ii)
$$\|\chi_0(x) r_{\text{out}}(t,h)\| = 0(\frac{(h^\infty)}{< t >^\infty})$$

Dans ce théorème, nous supposons pour simplifier que $Im E(h) \geq Ch^{N_0}$ pour $N_0 \geq 0$, mais des résultats similaires existent sans cette condition.

L'estimation ii) correspond au caractère sortant de r_{out}. On peut préciser ce caractère de la manière suivante :

Théorème 4.2 *Il existe $\nu > 0, c > 0, T_0 \geq 1$ tels que $\forall 0 < \alpha < 1$, on a :*

$$r_{\text{out}}(t,h) = r_\alpha(t,h) + r_{\text{out}}, \alpha(t,h)$$

où pour $t \geq T_0$:

i)
$$\|r_\alpha(t,h)\| = 0(e^{-at(1-\alpha)}(1 + a(h)^{\frac{1}{2}}(1 - e^{-cat})^{\frac{1}{2}}))$$

si $a(h) = 0(1)$.

ii)
$$\|r_\alpha(t,h)\| = 0(a(h)^{-1}e^{-at(1-\alpha)})$$

si $\lim_{h \to 0} a(h) = +\infty$.

$$\|\chi(|x| \leq \nu\alpha t) r_{\text{out}}, \alpha(t,h)\| = 0(\frac{(h^\infty)}{< t >^\infty})$$

On peut donc écrire r_{out} comme la somme d'un terme $r_\alpha(t,h)$ décroissant exponentiellement en temps et d'un terme $r_{\text{out},\alpha}(t,h)$ sortant au sens plus fort ii).

5 Le cas des résonances de forme

On considère maintenant un cas où on a des résonances exponentiellement proches de l'axe réel (voir [He-Sj1], [C-D-K-S], [Hi-Si]). On suppose que le potentiel V est régulier, dilatable analytiquement et a l'allure indiquée sur la figure 2.

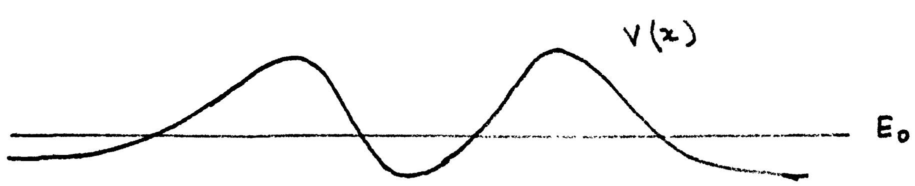

Fig. 2

On considère une résonance $E(h)$ et une fonction résonante u_h où $E(h)$ est exponentiellement proche d'une valeur propre du problème de Dirichlet dans le puits de potentiel. On tronque maintenant u_h près de l'île avec une fonction de troncature $\chi(x)$ égale à 1 dans un voisinage de l'île. On choisit une autre fonction χ_0 adaptée à χ. On a alors le résultat suivant :

Théorème 5.1

$$e^{-itH/h}\chi u_h = e^{-itE(h)/h}\chi u_h + r_{\text{out}}(t,h) + r_\infty(t,h)$$

où :

i)
$$\|r_\infty(t,h)\| = 0(e^{-S_0/h}) + \tilde{0}(e^{-2S_0/h})\frac{h}{|ImE(h)|}(1 - e^{-t|ImE(h)|/h})$$

$$\|\chi_0(x)r_{\text{out}}(t,h)\| = 0(h^\infty e^{-S_0/h})(e^{-t|ImE(h)|/h} + < t >^{-\infty}).$$

Ici S_0 est la distance d'Agmon entre les deux composantes de $p^{-1}(\lambda_0)$, et on rappelle que $ImE(h) = 0(e^{-2S_0/h})$ (cf [He - Sj]).

On remarque que $r_\infty(t,h)$ est exponentiellement petit tant que $|t| \leq C_\epsilon(e^{(2S_0-\epsilon)/h})$ pour $\epsilon > 0$.

6 Idée de la preuve du Théorème 1

On a l'identité évidente suivante :

$$e^{-it(H-E(h))/h}\chi(x,hD_x)u_h = \chi(x,hD_x)u_h -$$

$$ih^{-1}\int_0^t e^{-is(H-E(h))/h}(H-E(h))\chi(x,hD_x)u_h ds =$$

$$\chi(x,hD_x)u_h - ih^{-1}\int_0^t e^{-is(H-E(h))/h}\chi(x,hDx)(H-E(h))u_h ds +$$

$$-ih^{-1}\int_0^t e^{-is(H-E(h))/h}[H,\chi]u_h ds$$

Il est clair que la seule difficulté est d'estimer le dernier terme. $[H,\chi]u_h$ est supporté uniquement dans $\{G(x,\xi) \geq C_0\}$, à cause de la condition sortante iv). Un simple argument de propagation de singularités utilisant la condition 1) donnerait l'estimation :

$$\|\chi_0(x)r_{\text{out}}(t,h)\| \leq C_n(t)h^n \forall n.$$

Il est beaucoup plus délicat d'obtenir des constantes $C_n(t) = \frac{C_n}{<t>^n}$ qui correspond à préciser la taille des $0(h^\infty)$ en fonction du temps dans le théorème de propagation classique.

Le contrôle en t est possible si on affaiblit la localisation en (x,ξ).

Au lieu de localiser dans des petits voisinages des trajectoires classiques, on utilise simplement la propriété suivante : Comme $H_pG(x,\xi) \geq C_0$ dans $|x| \geq R_0$, si $G(x_0,\xi_0) \geq C_1, C_1$ assez grand, on a $G(\exp tH_p(x_0,\xi_0)) \geq C_1 + C_0 t$.

Une étape essentielle est de démontrer l'estimation suivante : si I est non captif pour p, si $\chi(\lambda) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ est supportée dans I, si $\chi_{\text{out}}(x,\chi) \in C_0^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ est supportée dans une région sortante (i.e. dans $G(x,\xi) \gg 1$) on a :

$$\|F(\frac{G(x,hD_x)}{t} \leq C_o - \epsilon)e^{itH/h}\chi(H)\chi_{\text{out}}(x,hD_x)\| = 0(\frac{(h^\infty)}{< t >^\infty}).$$

Ce type d'estimations (appelées estimations de propagation) sont importantes (pour $h = 1$) dans l'étude des hamiltoniens à N corps (voir Sigal - Soffer [S-S]).

Bibliographie

[Ag] S.Agmon: *Lectures on exponential decay of solutions of second order elliptic equations*, Princeton University Press, Princeton 1982.

[Ag-Co] J.Aguilar-J.M.Combes: A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger operators, Comm. in Math. Phys. 22 (1971) 269-279.

[Ba-Co] E.Balslev-J.M.Combes: Spectral properties of many body Schrödinger operators with dilation analytic potentials, Comm. in P.D.E. 22 (1971) 280-294.

[C-D-K-S] J.M.Combes-P.Duclos-M.Klein-R.Seiler: The shape resonance, Comm. in Math. Phys. 110 (1987) 215-237.

[Cy] H.L.Cycon: Resonances defined by modified dilations, Helv. Phys. Acta 58 (1986)969-981.

[Ge1] C.Gérard: Semiclassical resolvent estimates for two and three-body Schrödinger operators, Comm. in P.D.E. 15(8) (1990), 1161-1178.

[Gu-St] V.Guillemin-S.Sternberg: Geometric Asymptotics, A.M.S. Surveys Vol 14 (1977).

[He-Sj1] B. Helffer-J. Sjöstrand : Résonances en limite semiclassique, Bull. de la S.M.F. mémoire n°24/25, tome 114 (1986).

[Hi-Si] P.Hislop-I.M.Sigal: Shape resonances in quantum mechanics, Proceeding of the International Conference on Diff. Eq. in Math. Phys. Birmingham (Alabama) (1986).

[Hö] L.Hörmander: *The analysis of linear partial differential operators*, vols.III and IV Springer Verlag (1985).

[S] I.M.Sigal : Complex transformations method and resonances in one- body quantum systems, Ann. Inst. Henri Poincaré 41 (1984), 103- 114.

[S-S] I.M.Sigal-A.Soffer: Local Decay and propagation estimates for time dependent and time independent Hamiltonians, Preprint Princeton University 1988 and to appear in Acta Mathematica.

[Si] B.Simon: Resonances and complex scaling: a rigourous overview, Int. J. Quant. Chem. 14 (1978), 529-542.

Christian GERARD

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

91128 Palaiseau cedex (France)