

SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

M. UCHIDA

Étude microlocale de la diffraction par un coin

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 3, p. 1-8

http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990___A3_0

© Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique)
(École Polytechnique), 1989-1990, tous droits réservés.

L'accès aux archives du séminaire Équations aux dérivées partielles (<http://sedp.cedram.org>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

*CENTRE
DE
MATHEMATIQUES*

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)

Tél. (1) 69.41.82.00

Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ETUDE MICROLOCALE DE LA DIFFRACTION PAR UN COIN

M. UCHIDA

Etude Microlocale de la Diffraction par un Coin

MOTOO UCHIDA

Cet exposé énonce les résultats principaux de [13], où nous donnons une démonstration de la théorie géométrique de la diffraction par un coin de J.-B. Keller [5] en utilisant les méthodes de l'analyse microlocale.

1. Notations et Préliminaires

(1.1) Soit M une variété analytique réelle de dimension n , X un complexifié de M , et $\pi : T^*X \rightarrow X$ le fibré cotangent de X .

Pour un ouvert Ω de M on note T_Ω^*X le micro-support du faisceau \underline{C}_Ω sur X (cf. Kashiwara-Schapira [2]). Soit $\mathcal{C}_{\Omega|X}$ le complexe introduit par Schapira [8,9,10] des microfonctions le long de T_Ω^*X (on ne rappelle pas ici sa construction). Remarquons seulement que $\mathcal{C}_{\Omega|X}|_{\pi^{-1}(\Omega)} = \mathcal{C}_M|_{\pi^{-1}(\Omega)}$, où \mathcal{C}_M désigne le faisceau des microfonctions de Sato sur M .

Soit \mathcal{D}_X le faisceau des opérateurs différentiels sur X , et soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module à gauche cohérent. Soit \mathcal{B}_M le faisceau des hyperfonctions de Sato sur M ; alors on a le morphisme spectral

$$(1.1.1) \quad \alpha : \pi^{-1}j_*j^{-1}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{B}_M) \rightarrow H^0\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})$$

où $j : \Omega \hookrightarrow M$. Pour une solution hyperfonction u de \mathcal{M} sur Ω on note $SS_\Omega^{\mathcal{M}}(u) = \text{supp}(\alpha(u))$, et on appelle cet ensemble fermé conique dans T^*X le front d'onde analytique au bord de u . On pose $SS_\Omega(u) = SS_\Omega^{\mathcal{D}_X}(u)$; c'est un fermé de T_M^*X .

Voir [8,9,10] pour la théorie de $\mathcal{C}_{\Omega|X}$, $SS_\Omega^{\mathcal{M}}(u)$ et la théorie des problèmes aux limites (cf. aussi [13, Section 2]).

(1.2) Dans cet exposé nous nous intéressons au cas où Ω est complémentaire d'un coin. Plus exactement, soient Ω_1 et Ω_2 deux ouverts de M à frontières analytiques N_1 , N_2 qui se coupent transversalement le long de $N_0 (= N_1 \cap N_2)$; on pose $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$. On note Y_1 et Y_2 le complexifié de N_1 et N_2 respectivement, et on pose $Y_0 = Y_1 \cap Y_2$.

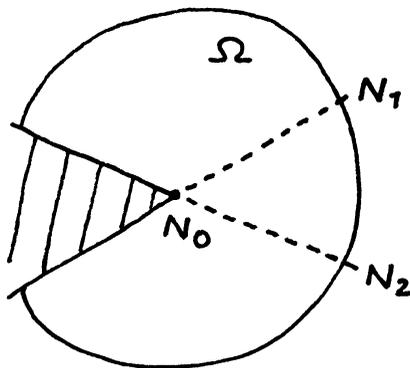


Figure 1.1.

2. Propriétés fondamentales du complexe $\mathcal{C}_{\Omega|X}$ ($\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$)

(2.1) Soit K un sous-ensemble fermé C^ω -convexe de M ; i.e. K est convexe pour un choix de coordonnées locales analytiques de M . Soit T_K^*X le micro-support de $\underline{\mathcal{C}}_K$, et $\mathcal{C}_{K|X}$ le faisceau des microfonctions le long de T_K^*X .

REMARQUE. Ce faisceau des microfonctions a été introduit par Kataoka [3,4] pour K fermé dont la frontière est une hypersurface analytique réelle. Récemment Schapira [8,9] en a donné une construction fonctorielle pour K une partie localement fermée générale.

Pour $x \in K$ on pose $(T_K^*M)_x = (T_K^*X)_x / (T_M^*X)_x$; alors $(T_K^*M)_x \subset T_x^*M$. Soit $\mathcal{V} (\subset T_x^*M)$ l'annulateur de $(T_K^*M)_x$, $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$ le complexifié de \mathcal{V} dans T_x^*X , et ρ_x la projection: $T_x^*X \rightarrow (\mathcal{V}^{\mathbb{C}})^*$, où $(\mathcal{V}^{\mathbb{C}})^*$ désigne l'espace dual de $\mathcal{V}^{\mathbb{C}}$. A tout $\lambda \in (\mathcal{V}^{\mathbb{C}})^*$ correspond $\rho_x^{-1}(\lambda) \subset T_x^*X$. On appelle $\rho_x^{-1}(\lambda) \cap T_K^*X$ une feuille canonique de T_K^*X en x .

Proposition 2.1.1. — Soient K un sous-ensemble fermé C^ω -convexe, $x \in K$, u une section de $\mathcal{C}_{K|X}|_{\pi^{-1}(x)}$ sur un ouvert $\mathcal{U} \subset \pi^{-1}(x)$, \mathcal{L} une feuille canonique de T_K^*X en x . Alors $\text{supp}(u) \cap \mathcal{L}$ est ouvert et fermé dans $\mathcal{U} \cap \mathcal{L}$.

La démonstration de cette proposition a été obtenue en collaboration avec P. Schapira (voir [12,13]).

(2.2) Dans ce paragraphe nous considérons l'ouvert $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ défini en (1.2) et étudions les propriétés de $\mathcal{C}_{\Omega|X}$ ou de $\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})$ pour un \mathcal{D}_X -module \mathcal{M} .

Proposition 2.2.1 (Schapira). — Le faisceau $H^0(\mathcal{C}_{\Omega|X})$ est supporté par T_M^*X , et le morphisme naturel de restriction

$$H^0(\mathcal{C}_{\Omega|X}) \rightarrow H^0(\mathcal{C}_{\Omega_1|X}) \bigoplus H^0(\mathcal{C}_{\Omega_2|X})$$

est injectif. En particulier $SS_\Omega(u) = SS_{\Omega_1}(u) \cup SS_{\Omega_2}(u)$ pour u hyperfonction sur Ω .

Soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent sur X . La proposition suivante est un corollaire de la Proposition 2.1.1.

Proposition 2.2.2. — Si Y_1 et Y_2 sont non caractéristiques pour \mathcal{M} , alors on a $H^i(\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})) = 0$ pour $i < 0$.

Corollaire 2.2.3. — Supposons que Y_1 et Y_2 soient non caractéristiques pour \mathcal{M} . Soit u une solution hyperfonction de \mathcal{M} sur Ω . Si $SS_\Omega^M(u) \subset T_X^*X$, alors u est une fonction analytique réelle sur $\bar{\Omega}$.

Soit Ω' un autre ouvert de M à frontière analytique $N' = \partial\Omega'$ tel que $\Omega' \subset \Omega$ et $N_0 \subset N'$.

Proposition 2.2.4. — Si $N'^{\mathbb{C}}$ est non caractéristique pour \mathcal{M} , alors le morphisme de restriction

$$H^0\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})_p \rightarrow H^0\mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega'|X})_p$$

est injectif en tout $p \in T_{\Omega'}^*X \setminus T_M^*X$.

Remarquons que le morphisme de restriction ci-dessus n'est pas toujours injectif sur T_M^*X .

3. Résultats de propagation des singularités microlocales sur un coin

Considérons l'ouvert $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ défini en (1.2), et soit \mathcal{M} un \mathcal{D}_X -module cohérent. Nous supposons que Y_1 et Y_2 sont non caractéristiques pour \mathcal{M} .

Soient $p \in T_M^*X \times_M N_0$, $x = \pi(p)$. Supposons que $\text{Car}(\mathcal{M}) \subset \{f = 0\}$ dans un voisinage de p pour une fonction holomorphe homogène f telle que $df \wedge \omega \neq 0$ (ω : la 1-forme canonique sur T^*X) et $\text{Im } f|_{T_M^*X} \equiv 0$; i.e. nous considérons un système d'équations aux dérivées partielles \mathcal{M} à caractéristiques réelles. Si $\text{Im } f(q) = 0$ on note $b^+(q)$ et $b^-(q)$ la courbe bicaractéristique positive et négative de $\text{Im } f$ issue de q . Nous supposons que $\pi(b^+(p))$ et $\pi(b^-(p))$ sont contenues dans Ω et transverses à $\partial\Omega$; i.e. elles vérifient:

$$(3.1.1) \quad \pi(b^\pm(p)) \subset \Omega,$$

$$(3.1.2) \quad d\pi(\dot{b}(p)) \notin T_x N_1 \cup T_x N_2,$$

où $\dot{b}(p)$ désigne la différentielle en p de la courbe bicaractéristique (voir Figure 3.1).

Soit ρ_0 la projection naturelle $T^*X \times_X Y_0 \rightarrow T^*Y_0$; on pose $E = \rho_0^{-1}\rho_0(p) \cap T_M^*X$.

On a alors les résultats suivants:

pour une section u de $H^0 \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})$, on note $\text{SS}(u|_\Omega)$ le support de $u|_{\pi^{-1}(\Omega)}$, section de $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_M)$.

Théorème A. — Soit u une section de $H^0 \mathbf{R}\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_X}(\mathcal{M}, \mathcal{C}_{\Omega|X})$ dans un voisinage de p . Si $b^-(p) \cap \text{SS}(u|_\Omega) \neq \emptyset$ et s'il existe un voisinage \mathcal{U} de p tel que $b^-(q) \cap \text{SS}(u|_\Omega) = \emptyset$ pour tout $q \in E \cap \{f = 0\} \cap \mathcal{U}$ avec $q \neq p$, alors on a:

$$p \in \text{SS}_\Omega(u) \quad \text{et} \quad b^\pm(p) \subset \text{SS}(u|_\Omega).$$

Théorème B. — Soit u comme dans le Théorème 3.1. Si $p \in \text{SS}_\Omega(u) \setminus \overline{\text{SS}(u|_\Omega) \cap b^-(p)}$, alors il existe un voisinage \mathcal{U} de p tel que

$$E \cap \{f = 0\} \cap \mathcal{U} \subset \text{SS}_\Omega(u) \quad \text{et} \\ b^+(q) \subset \text{SS}(u|_\Omega) \quad \forall q \in E \cap \{f = 0\} \cap \mathcal{U}.$$

Le Théorème A veut dire qu'une singularité microlocale isolée (dans E) de u se propage jusqu'au coin et franchit le coin le long de la courbe bicaractéristique. D'autre part le Théorème B démontre l'apparition des rayons diffractés au coin; $b^+(q)$ dans ce théorème est ce qu'on appelle un rayon diffracté (voir Keller [5]). Pour la démonstration des théorèmes voir [13, Section 6.1 et 6.2].

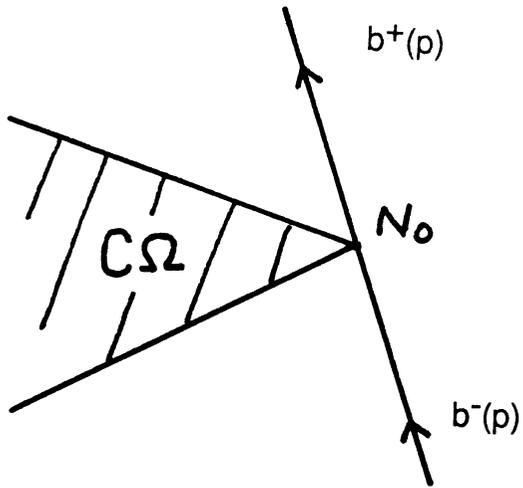
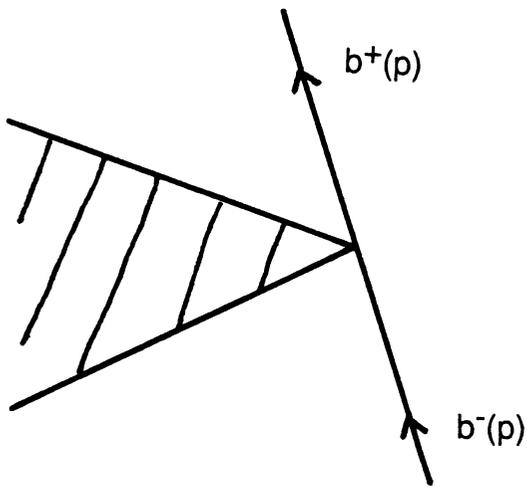
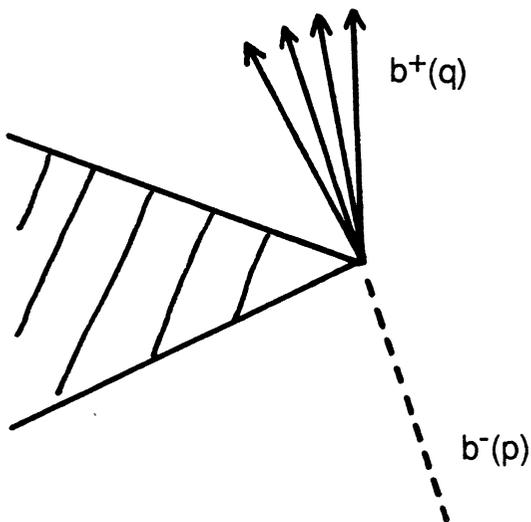


Figure 3.1.



$b^-(p) \subset SS(u|_{\Omega})$
et isolée

Figure 3.2 (Théorème A).



$q \in E \cap \{f=0\}$
 q : voisin de p

$b^-(p) \cap SS(u|_{\Omega}) = \emptyset$
et $p \in SS_{\Omega}(u)$

Figure 3.3 (Théorème B).

4. Application au problème de Dirichlet

(4.1) **Notations.** Soit $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ l'ouvert défini en (1.2). On utilisera les notations de (1.2) et on pose en outre $U_j = \partial\Omega \cap N_j \setminus N_0$ ($j = 1, 2$); alors $\partial\Omega = U_1 \cup U_2 \cup N_0$ (disjoints).

Soit E une fibre (non-vide) de la projection $\rho_0|_{T^*_M X}$ (voir Section 3). On fixe E et on pose $x_0 = \pi(E)$.

Soit $P = P(x, D)$ un opérateur différentiel de degré deux, à coefficients analytiques, défini près de x_0 . On note $f = \sigma(P)$, le symbole principal de P . Dans toute cette section on suppose:

$$(4.1.1) \quad \text{Im } f|_{T^*_M X} = 0,$$

$$(4.1.2) \quad C = \{f = 0\} \cap E \text{ est une courbe fermée non-singulière (i.e. une ellipse) dans } E (\cong \mathbf{R}^2).$$

Remarquons que (4.1.2) implique $df \wedge \omega \neq 0$ sur C , et que dans ce cas Y_1 et Y_2 sont non caractéristiques pour P .

Pour $p \in C$ on note $b^+(p)$ et $b^-(p)$ la courbe bicaractéristique positive et négative de P issue de p . On pose (voir Figure 4.1):

$$\begin{aligned} C^\pm(j) &= \{p \in C \mid d\pi \dot{b}(p) \notin T_{x_0} N_j \text{ et } \pi(b^\pm(p)) \subset \Omega_j\}, \\ C^c(j) &= C \setminus (C^+(j) \cup C^-(j)) \quad (j = 1, 2). \end{aligned}$$

Pour $p \in C$ on note $p_{(j)'} (j = 1, 2)$ le point réfléchi par N_j ; i.e. le point tel que $\rho_j^{-1} \rho_j(p) \cap C = \{p, p_{(j)'}\}$, où ρ_j désigne la projection $T^*X \times_X Y_j \rightarrow T^*Y_j$ (Figure 4.2).

(4.2) **Résultat.** Soit u une solution hyperfonction de l'équation différentielle

$$(4.2.1) \quad Pu = 0 \quad \text{sur } \Omega.$$

On note $u|_{N_j} (j = 1, 2)$ la valeur au bord (la première trace) de $u|_\Omega$, sur N_j . On suppose que u satisfait la condition de Dirichlet sur chaque $U_j (j = 1, 2)$:

$$(4.2.2) \quad (u|_{N_j})|_{U_j} = g_j|_{U_j} \quad \text{avec } g_j \in \Gamma(\overline{U_j}; \mathcal{A}_{N_j}) \quad (j = 1, 2).$$

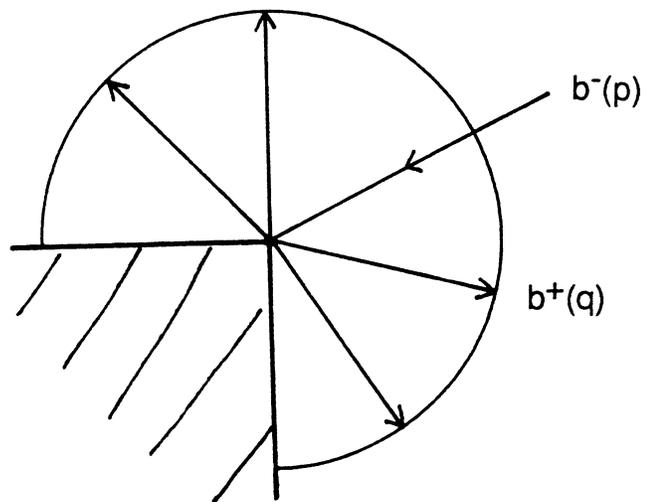
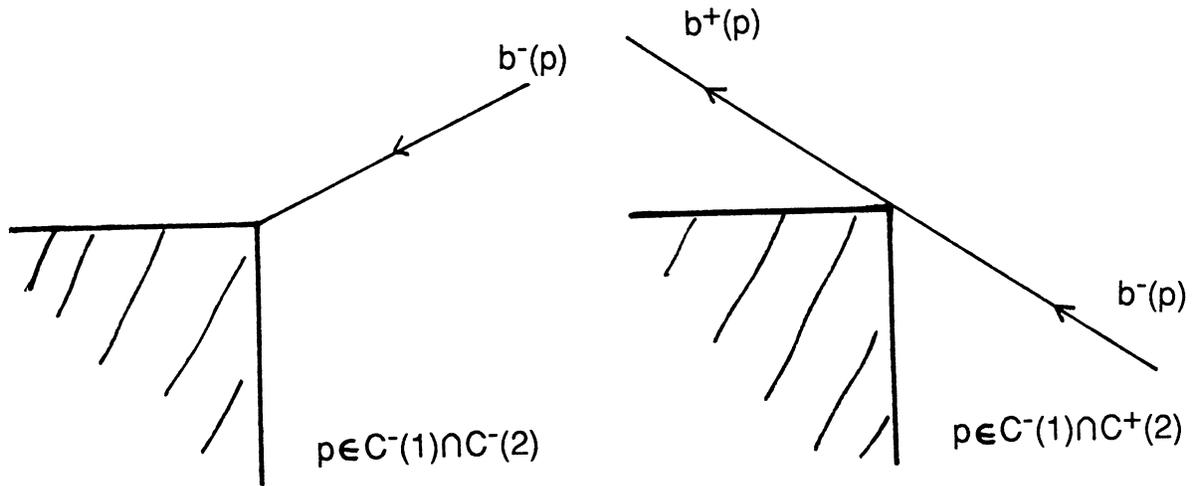
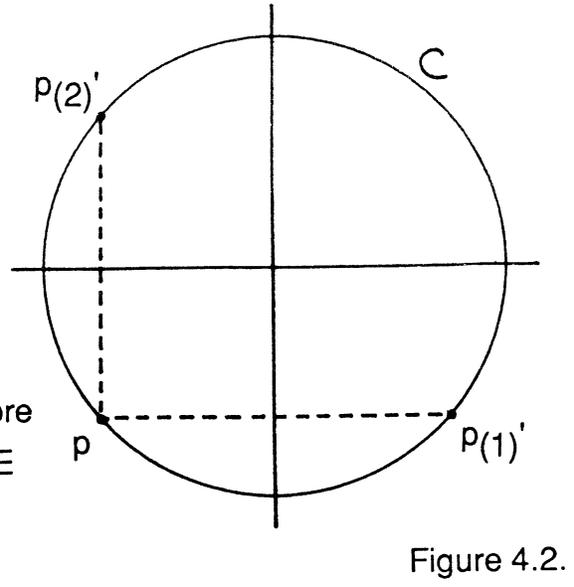
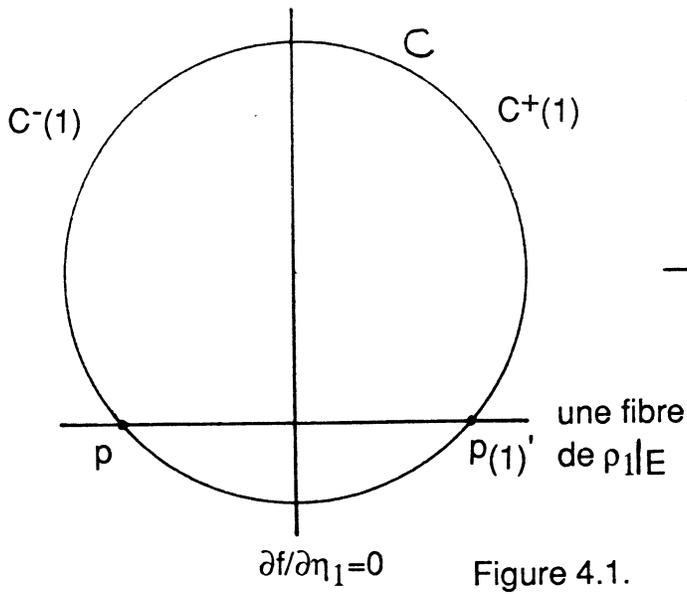
Pour les solutions du problème de Dirichlet (4.2.1), (4.2.2) sur Ω on a le résultat suivant qui décrit la diffraction par un coin de la singularité incidente simple (voir Figure 4.4):

Théorème 4.2.1. — Soit $p \in C^-(1) \cup C^-(2)$. Supposons que p vérifie l'une des conditions suivantes:

$$(a)_{12} : p \in C^-(1) \cap \overline{C^-(2)} \text{ et } p_{(1)'} \notin C^c(2)$$

$$(b)_{12} : p \in C^-(1) \cap C^+(2)$$

(ou la condition $(a)_{21}$ (resp. $(b)_{21}$) obtenue en permutant le rôle de Ω_1 et Ω_2). Soit u une solution hyperfonction du problème de Dirichlet (4.2.1), (4.2.2) sur Ω . Si $b^-(p) \subset \text{SS}(u|_\Omega)$ et si $b^-(q) \cap \text{SS}(u|_\Omega) = \emptyset$ pour tout $q \in C^-(1) \cup C^-(2)$, $q \neq p$, alors $b^+(q) \subset \text{SS}(u|_\Omega)$ pour tout $q \in C^+(1) \cup C^+(2)$.



(4.3) Un Lemme. Nous commençons par le lemme suivant sur la réflexion des singularités sur un coin:

LEMME 4.3.1. — Soit u une solution hyperfonction de l'équation différentielle $Pu = 0$ sur Ω_1 . Supposons que u satisfait la condition de Dirichlet sur U_1 : $(u|_{N_1})|_{U_1} = g_1|_{U_1}$ pour $g_1 \in \Gamma(\overline{U_1}; \mathcal{A}_{N_1})$. On a: (a) Soit \mathcal{U}^+ un ouvert (pas nécessairement connexe) de $C^+(1)$; on pose $\mathcal{U}^- = \rho_1^{-1}\rho_1(\mathcal{U}^+) \cap C^-(1)$. Si $\mathcal{U}^+ \cap \text{SS}_{\Omega_1}(u) = \emptyset$ et si $\mathcal{U}^- \cap \text{SS}_{\Omega_1}(u) \neq \emptyset$, alors $\mathcal{U}^- \subset \text{SS}_{\Omega_1}(u)$. (Le résultat est évidemment encore valable en intervertissant \pm). En particulier on a: (b) Soit $p \in C$. Si $p \in \text{SS}_{\Omega_1}(u)$ et si $C \not\subset \text{SS}_{\Omega_1}(u)$ dans chaque voisinage de p , alors $p_{(1)'} \in \text{SS}_{\Omega_1}(u)$.

Ce lemme se démontre en utilisant le théorème de division microdifférentielle et le "watermelon theorem".

(4.4) Démonstration du Théorème 4.2.1. Soit $p \in C^-(1)$. Soit u une solution hyperfonction du problème de Dirichlet (4.2.1), (4.2.2). On suppose que u satisfait l'hypothèse du Théorème 4.2.1. Remarquons que pour $q \in C^-(1)$ (resp. $q \in C^-(2)$) on a $q \in \text{SS}_{\Omega_1}(u)$ (resp. $q \in \text{SS}_{\Omega_2}(u)$) si et seulement si $b^-(q) \subset \text{SS}(u|_{\Omega})$.

Le résultat se démontre différemment suivant les cas de figure. On va démontrer le cas $(a)_{12}^-$ où $p \in C^-(1) \cap \overline{C^-(2)}$ et $p_{(1)'} \in C^+(1) \cap C^-(2)$. D'abord, comme $\text{SS}_{\Omega_1}(u) \cap C^-(1) = \{p\}$, on a par le Lemme 4.3.1: $p_{(1)'} \in \text{SS}_{\Omega_1}(u)$. Comme $p_{(1)'} \notin \text{SS}_{\Omega_2}(u) \cap C^-(2) (= \{p\})$, il résulte du Théorème B qu'il existe un voisinage de $p_{(1)'}$ dans C contenu dans $\text{SS}_{\Omega_1}(u)$. En utilisant le Lemme 4.3.1 on a alors: $C^+(1) \subset \text{SS}_{\Omega_1}(u)$. En particulier on a: $C^+(1) \cap C^+(2) \subset \text{SS}_{\Omega_1}(u)$; alors $C^+(1) \cap C^+(2)$ est contenu dans $\text{SS}_{\Omega_2}(u)$ car ces deux assertions sont équivalents à $b^+(q) \subset \text{SS}(u|_{\Omega})$ ($\forall q \in C^+(1) \cap C^+(2)$). En utilisant à nouveau le Lemme 4.3.1 (dans lequel on intervertit Ω_1 et Ω_2) on a $C^+(2) \subset \text{SS}_{\Omega_2}(u)$; d'où le résultat.

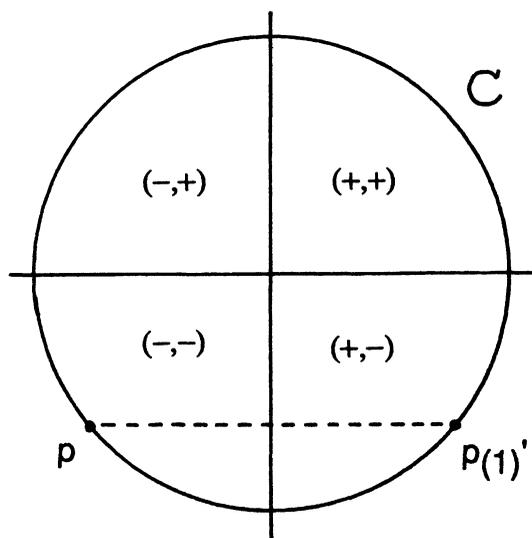


Figure 4.5.

Notes

Pour d'autres articles se rapportant au sujet de cet exposé cf. J. Cheeger et M. Taylor [1], J.-P. Varrenne [14], M. Rouleux [15]. Ces articles traitent la diffraction d'une onde simple par un coin (et aussi par une singularité conique dans [1] et [15]); leurs résultats donnent une majoration des singularités microlocales diffractées.

Bibliographie

- [1] Cheeger, J. and M. Taylor, On the diffraction of the waves by conical singularities I, *Comm. P.A.M.* **35**, 275-331, (1982); II, *ibid.* 487-529, (1982).
- [2] Kashiwara, M. and P. Schapira, *Microlocal Study of Sheaves*, Astérisque 128, Soc. Math. de France (1985).
- [3] Kataoka, K., A microlocal approach to general boundary value problems, *Publ. RIMS, Kyoto Univ.* **12**, Suppl., 147-153 (1977).
- [4] —, On the theory of Radon transformations of hyperfunctions, *J. Fac. Sci. Univ. Tokyo*, **28**, 331-443 (1981).
- [5] Keller, J. B., A geometrical theory of diffraction, *J. Opt. Soc. Am.* **52**, 116-130 (1962).
- [6] Sato, M., T. Kawai, and M. Kashiwara, *Microfunctions and pseudo-differential equations*, *Lecture Notes in Math.* 287, Springer-Verlag, 265-529 (1973).
- [7] Schapira, P., Propagation at the boundary of analytic singularities, in "Singularities of Boundary Value Problems", Reidel Publ. Co., 185-212 (1981).
- [8] —, Front d'onde analytique au bord II, *Séminaire E.D.P. Ecole Polyt.*, Exp. 13 (1986).
- [9] —, Microfunctions for boundary value problems, in "Prospect in Algebraic Analysis," dedicated to Prof. M. Sato, Academic Press, 809-819 (1989).
- [10] —, Propagation of regularity up to non smooth boundary, *Journée E.D.P. Saint-Jean-de-Monts*, *Publ. Ecole Polyt.* (1987).
- [11] Uchida, M., Un théorème d'injectivité du morphisme de restriction pour les microfonctions, *C. R. Acad. Sci. Paris (série I)* **t.308**, 83-85 (1989).
- [12] —, On the unique continuation property of the sheaf $\mathcal{C}_{K|X}$, *Prépublication de Université de Tokyo* (sept. 1989).
- [13] —, Microlocal analysis of diffraction at the corner of an obstacle, *Prépublication de Université de Tokyo* (oct. 1989).
- [14] Varrenne, J.-P., Diffraction par un angle ou un dièdre, *C. R. Acad. Sci. Paris (série A)* **t.290**, 175-178 (1980).
- [15] Rouleux, M., Diffraction analytique sur une variété à singularité conique, *Comm. P.D.E.* **11(9)**, 947-988 (1986).

M. Uchida
Université de Tokyo
Dépt. de Mathématiques
Faculté des Sciences
Hongô, Bunkyo-ku
113 TOKYO (Japon)