Jean-Michel Bismut

Métriques de Quillen et plongements complexes

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 20, p. 1-19

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

METRIQUES DE QUILLEN ET PLONGEMENTS COMPLEXES

Jean-Michel BISMUT

Exposé n°XX

19 Décembre 1989

Métriques de Quillen et plongements complexes

par

Jean-Michel BISMUT

Les métriques de Quillen sur le déterminant de la cohomologie d'un fibré holomorphe sur une variété complexe compacte X possèdent un grand nombre de propriétés remarquables. Bien que ces métriques soient calculées à l'aide d'invariants globaux de la variété considérée, le théorème de courbure de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, Théorème 0.1] assure en particulier que la courbure de la connexion holomorphe Hermitienne sur le fibré en droites qui est l'inverse du déterminant de la cohomologie est calculable explicitement à l'aide de données locales.

Soit maintenant $i : Y \to X$ un plongement de variétés compactes complexes, soit η un fibré holomorphe sur Y, et (ξ, v) un complexe de fibrés holomorphes sur Y résolvant le faisceau $i_* \mathcal{O}_Y(\eta)$. Tautologiquement les droites inverses des déterminants de la cohomologie de η et ξ sont canoniquement isomorphes. Si on introduit des métriques sur TX, TY, ξ, η, une question naturelle est de comparer les métriques de Quillen sur ces déterminants.

C'est précisément l'objet d'un article récent de Lebeau et moi-même [BL2], dont les résultats sont annoncés dans [BL1]. Disons pour simplifier qu'il s'agit au premier abord de comparer des invariants spectraux sur X et Y.

Le résultat essentiel de Bismut-Lebeau [BL1,2] assure que le rapport des métriques de Quillen relatives à X et Y - l'une calculée à l'aide de la théorie de Hodge de X, l'autre à l'aide de la théorie de Hodge de Y - est calculable localement sur X et Y, par une formule complètement explicite, faisant intervenir des classes caractéristiques préalablement construites dans [BGS4], [B2], [GS].

Sur le plan technique, il s'agit essentiellement de déformer de manière adéquate une théorie de Hodge sur X en une théorie de Hodge sur Y. Une obstruction à une telle déformation est en particulier la notion de théorie de Hodge transverse [B2], [BL2].

L'objet de cet exposé est modeste : il s'agit essentiellement de décrire rapidement les deux membres de la formule de [BL2], l'un des membres étant de nature globale sur X et Y, l'autre de nature locale. Un tel résultat rentre dans une classe de résultats raffinant le théorème d'Atiyah-Singer [AS].

Les preuves de [BL2] font intervenir des manière précise des données de géométrie différentielle locales ou globales sur X ou Y, des techniques d'indice local, des méthodes d'analyse semi-classique (tout phénomène de type "instanton" étant heureusement exclu !), la théorie spectrale dans des situations très dégénérées. On est en particulier souvent amener à donner dans [BL2] une description matricielle de certains opérateurs différentiels. Les propriétés de vitesse finie de propagation pour les équations hyperboliques interviennent aussi de manière cruciale dans [BL2].

Pour un exposé plus complet sur les métriques de Quillen, nour renvoyons à notre article de revue [B4].

La lecture de l'introduction de [BL2] peut être utile également pour une présentation très complète des résultats de [BL2] et des techniques qui y sont utilisées.

a) L'inverse du déterminant de la cohomologie.

Soit X une variété compacte complexe, de dimension complexe $\dim X = \ell$. Soit ξ un fibré holomorphe sur X.

Soit $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$ le complexe de Dolbeault associé aux sections C^∞ de $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$, sur lequel agit naturellement l'opérateur $\bar\partial$. Pour $0 \leq p \leq \ell$, soit $H^p(X, \xi)$ le $p^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie du complexe $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$. Classiquement [GrH, p 84], les $H^p(X, \xi)$ sont de dimension finie. On pose $H(X, \xi) = \bigoplus_{p=0}^{\ell} H^p(X, \xi)$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, on pose

$$\det(E) = \Lambda^{\max} E \tag{1}$$

Si λ est une droite complexe, on désigne par λ^{-1} la droite duale.

Définition 1 : On appelle inverse du déterminant de la cohomologie la droite complexe

$$\lambda(\xi) = \bigotimes_{i=0}^{\ell} \det\left(H^i(X, \xi)\right)^{(-1)^{i+1}} \tag{2}$$

b) Métrique de Quillen sur l'inverse du déterminant de la cohomologie

Soit g^{TX} une métrique Hermitienne sur TX, soit h^ξ une métrique Hermitienne sur ξ. g^{TX} et h^ξ induisent un produit Hermitien sur $\Lambda(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi$. Soit dv_{TX} la mesure de volume sur X canoniquement associée à g^{TX}.

Si $\alpha, \alpha' \in \Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$, on pose

$$\langle \alpha, \alpha' \rangle_{L_2} = \frac{1}{(2\pi)^{\dim X}} \int_X \langle \alpha, \alpha' \rangle dv_{TX} \tag{3}$$

Soit $\bar\partial^*$ l'adjoint formal de $\bar\partial$ relativement au produit Hermitien $\langle\ ,\ \rangle_{L_2}$ sur $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$.

Par la théorie de Hodge [GrH, p 80] on peut identifier canoniquement $H(X, \xi)$ aux formes harmoniques, i.e.

$$(4) \qquad H(X, \xi) \cong \{\alpha \in \Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)\ ,\ \bar\partial\alpha = 0\ ,\ \bar\partial^*\alpha = 0\}.$$

De (3), (4), on tire que le produit Hermitien $\langle\ ,\ \rangle_{L_2}$ induit sur $\lambda(\xi)$ une métrique notée $|\ \ |_{\lambda(\xi)}$.

La métrique $|\ \ |_{L_2}$ est une "mauvaise" métrique sur $\lambda(\xi)$. En effet soit $\pi : M \to S$ une submersion holomorphe de fibre compacte X et soit ξ un fibré holomorphe sur X. Pour chaque $s \in S$, on peut construire la fibre inverse du déterminant de la cohomologie $\lambda(\xi_{|X_s})$, obtenue par restriction de ξ à la fibre $X_s = \pi^{-1}(s)$. Par une construction de géométrie algébrique de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM], on peut construire canoniquement un fibré holomorphe $\lambda^G(\xi)$ sur S, dans la fibre $\lambda^G(\xi)_s$ est canoniquement isomorphe à $\lambda(\xi_{|X_s})$. Si g^{TX} et h^ξ sont des métriques Hermitiennes sur TX (qui est maintenant le fibré tangent relatif aux fibres X) et sur ξ, par la construction précédente, on peut munir les fibres $\lambda^G(\xi)_s \cong \lambda(\xi)_s$ du fibré $\lambda^G(\xi)$ de métriques notées $|\ \ |_{\lambda^G_s(\xi)}$. Toutefois les métriques $|\ \ |_{\lambda^G_s(\xi)}$ n'induisent pas une métrique C^∞ ou même continue sur le fibré $\lambda^G(\xi)$, ceci essentiellement à cause du fait que la dimension des groupes de cohomologie $H^p(X_s, \xi_{|X_s})$ n'est pas localement constante.

On va maintenant introduire une nouvelle métrique sur $\lambda(\xi)$, dite métrique de Quillen, qui n'aura pas les inconvénients décrits plus haut. Soit P le projecteur orthogonal sur le sous-espace de $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$ formé des formes harmoniques (qui annulent donc $\bar\partial$ et $\bar\partial^*$) relativement au produit Hermitien $\langle\ ,\ \rangle_{L_2}$. On pose $P^\perp = 1 - P$. On désigne par $[(\bar\partial + \bar\partial^*)^2]^{-1}$ l'inverse de l'opérateur $(\bar\partial + \bar\partial^*)^2$ agissant sur l'orthogonal à l'espace des formes harmoniques (qui forment le noyau de $(\bar\partial + \bar\partial^*)^2$).

Soit N_V l'opérateur de nombre agissant sur $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$. Si $0 \leq p \leq \dim X$, si $\alpha \in \Omega^{(0,1)}(\xi, \bar\partial)$ (i.e. si α est une section C^∞ de $\Lambda^p(T^{*(0,1)}X) \otimes \xi)$, alors $N_V\alpha = p\alpha$.

Soit τ l'opérateur définissant la $\mathbb{Z}_2$ graduation évidente sur $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$, i.e. $\tau = (-1)^{N_V}$. Si A est un opérateur à trace agissant sur $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$, la supertrace $\mathrm{Tr}_s[A]$ est données par la formule

(5)
$$\mathrm{Tr}_s[A] = \mathrm{Tr}[\tau A]$$

Définition 2 : Pour $s \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(s) > \dim X$, on pose

(6)
$$\theta_\xi(s) = -\mathrm{Tr}_s[N_V[(\bar\partial + \bar\partial^*)^2]^{-s} P^\perp].$$

Alors par Seeley [S], $\theta_\xi(s)$ s'étend en une fonction méromorphe de $s \in \mathbb{C}$ qui est holomorphe en $s = 0$.

Définissons les métriques de Quillen [Q2], [BGS3, Section 1d)].

Définition 3 : On appelle métrique de Quillen sur la droite complexe $\lambda(\xi)$ et on note $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$, la métrique

(7)
$$\| \ \|_{\lambda(\xi)} = | \ |_{\lambda(\xi)} \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_\xi}{\partial s}(0)\right\}$$

Le facteur $\exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\partial\theta_\xi}{\partial s}(0)\right\}$ (ou son carré) est appelé torsion analytique de Ray et Singer [RS].

La métrique $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$ est "naturelle". En effet si $\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial)$ était un complexe de dimension finie, la droite $\bigotimes_{i=0}^{\dim X} (\det\, (\Omega^{(0,\bullet)}(\xi, \bar\partial))^{(-1)^{i+1}}$ serait à la fois canoniquement isomorphe à la droite $\lambda(\xi)$ (par un argument élémentaire d'algèbre homologique) et porterait une métrique naturelle. La métrique $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$ (qui aurait un sens encore dans ce cas) serait exactement cette métrique naturelle. Cette métrique garde un sens ici, grâce aux propriétés des fonctions zêta d'opérateurs elliptiques.

c) Propriétés des métriques de Quillen

Les métriques de Quillen possèdent des propriétés très remarquable, démontrées dans [BGS1, 2, 3].

Une première propriété essentielle est que comme il est montré dans [BGS1, Théorème 0.1], dans la situation d'une submersion holomorphe $\pi : M \to S$ de fibre X, les métriques de Quillen $\| \ \|_{\lambda_s^G(\xi)}$ induites sur les fibres $\lambda_s^G(\xi)$ par l'isomorphisme $\lambda_s^G(\xi) \cong \lambda(\xi_{|X_s})$ induisent une métrique C^∞ $\| \ \|_{\lambda^G(\xi)}$ sur le fibré $\lambda^G(\xi)$ de Grothendieck-Knudsen-Mumford [KM]. En d'autres termes, la construction de la métrique de Quillen, qui est une construction d'analyse, est compatible aux constructions de géométrie algébrique de [KM].

Dans une telle situation, sur le fibré holomorphe Hermitien $(\lambda^G(\xi), \| \ \|_{\lambda^G(\xi)})$, il existe une unique connexion holomorphe préservant la métrique notée $\nabla^{\lambda^G(\xi)}$.

Le résultat essentiel de [BGS1, Théorème 0.3] assure que quand M est Kählérienne, et quand les métriques g^{TX} induisent une métrique Kählérienne sur les fibres X de π, alors la courbure de $\nabla^{\lambda(\xi)}$ est calculable par intégration dans la fibre de π: $M \to B$ d'une forme différentielle explicite et locale sur M. Cette formule représente un raffinement au niveau des formes différentielles des versions cohomologiques du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck. En particulier la première classe de Chern de $\lambda(\xi)$ - qui est un élément de $H^2(S, Q)$ - est ici représentée à un facteur près en théorie de Chern-Weil par la courbure de la connexion unitaire $\nabla^{\lambda(\xi)}$.

Il découle des résultats de [BGS3, Théorème 1.23]que quand on varie la métrique g^{TX} dans la classe des métriques Kählériennes sur X, et h^ξ dans la classe des métriques Hermitiennes sur ξ, on peut explicitement calculer la variation de la métrique $\| \ \|_{\lambda(\xi)}$ sur la droite $\lambda(\xi)$ à l'aide de formules locales sur X, faisant intervenir des classes caractéristiques secondaires des fibrés et des métriques considérés, dites classes de Bott-Chern [BoC]. Les formules de variation de métriques de Quillen sont appelées formules d'anomalie généralisées.

Par ailleurs, un énoncé conjectural sur les métriques de Quillen peut être formulé à partir du Théorème de courbure de [BGS1, 2, 3]. En effet des constructions canoniques d'algèbre homologique permettent d'exhiber des isomorphismes canoniques entre certaines droites complexes $\lambda(\xi)$. Si on munit ces droites $\lambda(\xi)$ de métriques de Quillen, on peut chercher à calculer la norme de l'isomorphisme. L'énoncé conjectural est que cette norme est calculable localement à l'aide de classes caractéristiques secondaires.

Un cas typique où un tel énoncé conjectural est démontré est la situation où les deux droites $\lambda(\xi)$ sont identiques et portent des métriques de Quillen distinctes. Dans ce cas l'énoncé conjectural est vrai et s'exprime par les formules d'anomalie de [BGS 3].

Une telle situation apparaît aussi dans le travail de Bismut-Lebeau [BL2] annoncé dans [BL1] dont nous décrivons les résultats à la Section 1h). Les Sections 1d)-1g) sont consacrées à la description des objets apparaissant dans la formule principale de [BL1, 2].

d) Immersion complexes et résolutions de fibrés.

Soit maintenant $i : Y \to X$ un plongement de variétés compactes complexes.

Soit η un fibré holomorphe sur Y. Soit (ξ, v) un complexe de fibré holomorphes sur X tel que $\mathcal{O}_X(\xi, v)$ est une résolution projective du faisceau $i_*\mathcal{O}_Y(\eta)$.

Quelques explications sont ici bienvenues. Un complexe (ξ, v) s'écrit sous la forme

(8) $$0 \to \xi_m \xrightarrow[v]{} \xi_{m-1} \cdots \xrightarrow[v]{} \xi_0 \to 0$$

où les ξ_j $(0 \leq j \leq m)$ sont des fibrés holomorphes sur X, v est un morphisme holomorphe appliquant ξ_j dans ξ_{j-1} tel que $v^2 = 0$. Soit r une application holomorphe de restriction $\xi_{0|Y} \to \eta$. Soit $\mathcal{O}_X(\xi_j)$ $(0 \leq j \leq m)$ le faisceau des sections holomorphes de ξ_j sur X. Soit $\mathcal{O}_Y(\eta)$ le faisceau des sections holomorphes de η sur Y. $i_*\mathcal{O}_Y(\eta)$ est alors un faisceau sur X.

Dire que $\mathcal{O}_X(\xi, v)$ est une résolution de $\mathcal{O}_Y(\eta)$, c'est dire qu'on a la suite exacte de faisceaux

$$0 \to \mathcal{O}_X(\xi_m) \underset{v}{\to} \mathcal{O}_X(\xi_{m-1}) \to \dots \underset{v}{\to} \mathcal{O}_X(\xi_0) \underset{r}{\to} i_*\mathcal{O}_Y(\eta) \to 0 . \tag{9}$$

Soient maintenant $\lambda(\xi_j)$ $(0 \leq j \leq \eta)$ et $\lambda(\eta)$ les droites complexes qui sont les inverses des déterminants de la cohomologie de ξ_j et η. On pose

$$\lambda(\xi) = \bigotimes_{j=0}^{m} \left(\lambda(\xi_j)\right)^{(-1)^j} \tag{10}$$

Un argument simple utilisant des suites spectrales montre que les droites complexes $\lambda(\eta)$ et $\lambda(\xi)$ sont canoniquement isomorphes [KM]. Soit σ l'élément non nul de $\lambda^{-1}(\eta) \otimes \lambda(\xi)$ définissant l'isomorphisme canonique.

Soit g^{TX} une métrique Kählérienne sur TX, induisant une métrique Kählérienne g^{TY} sur TY. Soit $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$, g^{η} des métriques Hermitiennes sur $\xi_0, \dots, \xi_m, \eta$. Soit $h^{\xi} = \bigoplus_0^m h^{\xi_j}$ la métrique sur $\xi = \bigoplus_0^m \xi_j$ somme directe des h^{ξ_j}. Soit $\| \ \|_{\lambda(\xi_j)}$ $(1 \leq j \leq m)$, $\| \ \|_{\lambda(\eta)}$ les métriques de Quillen associées sur $\lambda(\xi_j)$ $(1 \leq j \leq m)$, $\lambda(\eta)$. $(\lambda(\eta))^{-1} \otimes \lambda(\xi)$ est alors naturellement muni d'une métrique qu'on note $\| \ \|_{(\lambda(\eta))^{-1}\otimes\lambda(\xi)}$.

L'objet de l'article de Bismut-Lebeau [BL2] est de montrer que $\mathrm{Log}(\|\sigma\|^2_{(\lambda(\eta))^{-1}\otimes\lambda(\xi)})$ est calculable explicitement par une formule locale sur X et sur

Y, faisant intervenir des classes caractéristiques secondaires de l'immersion, des fibrés et des métriques considérés.

Le résultat de [BL2] est une illustration frappante du principe conjectural décrit plus haut, à savoir que tout isomorphisme algébrique de fibrés déterminants a une traduction métrique qui s'exprime à l'aide de quantités locales.

e) Courants de Bott-Chern

Après avoir décrit le membre de gauche de la formule de [BL2], qui est $\mathrm{Log}(\|\sigma\|^2_{(\lambda(\eta))^{-1}\otimes\lambda(\xi)})$, nous allons maintenant brièvement décrire son membre de droite.

On identifie le fibré normal N à Y dans X à l'orthogonal dans TY à $TX_{|Y}$ pour la métrique $g^{TX_{|Y}}$. Soit g^N la métrique correspondante sur N.

On a introduit dans [B1] une hypothèse de compatibilité entre les métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}, g^N, g^\eta$. En effet on montre dans [B1] à partir de résultats classiques sur les résolutions que si pour $y \in Y$, $H_y(\xi, v)$ désigne l'homologie du complexe de dimension finie $(\xi, v)_y$, alors on a un isomorphisme canonique $H_y(\xi, v) \cong (\Lambda N^* \otimes \eta)_y$. De plus par la théorie de Hodge du complexe $(\xi, v)_y$, $H_y(\xi, v)$ s'identifie aux éléments "harmoniques" de $(\xi, v)_y$ (qui annulent donc v et v^*) et hérite donc d'une métrique h^H associée aux métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$.

On fait alors l'hypothèse (A) de [B1] que les métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ sont telles que l'isomorphisme $H(\xi, v) \cong \Lambda N^* \otimes \eta$ est une isométrie. Par [B1, Proposition 1.6], on peut toujours choisir les métriques $h^{\xi_0}, \dots, h^{\xi_m}$ de façon telle que ce soit le cas.

Faisons maintenant une revue rapide de la théorie de Chern-Weil. Soit en effet E un fibré vectoriel de dimension k sur une variété B, soit ∇^E une connexion sur E, R^E sa courbure. Soit P un polynôme ad-invariant défini sur les matrices (k, k). Alors $P\left(\frac{-R^E}{2i\pi}\right)$ est une forme différentielle fermée sur B, dont la classe de cohomologie ne dépend pas de ∇^E . La classe de cohomologie de $P\left(\frac{-R^E}{2i\pi}\right)$ est une classe caractéristique de E.

Si A est une matrice (k, k), on pose

(11)
$$\mathrm{ch}(A) = \mathrm{Tr}[\exp(A)]$$
$$\mathrm{Td}(A) = \det\left(\frac{A}{1-\exp(-A)}\right)$$

ch et Td sont appelés respectivement caractère de Chern et genre de Todd.

Si B est une variété complexe, (E, g^E) est un fibré holomorphe Hermitien sur B, soit ∇^E la connexion holomorphe Hermitienne correspondante. Dans une telle situation on utilise la notation $P(E, g^E)$ au lieu $P\left(\frac{-R^E}{2i\pi}\right)$.

On pose

(12)
$$\mathrm{ch}\left(\xi, h^\xi\right) = \sum_{i=0}^{m} (-1)^i \,\mathrm{ch}\left(\xi, h^{\xi_i}\right).$$

Soit δ_Y le courant d'intégration sur Y. Il résulte du Théorème de Riemann-Roch-Grothendieck pour les immersions que les courants $\mathrm{ch}(\xi, h^\xi)$ et $\frac{\mathrm{ch}(\eta, g^\eta)}{\mathrm{Td}(N,g^N)}\,\delta_Y$ sont cohomogues. Par ailleurs ces courants sont somme de courants de type (p, p).

Dans [B1], nous construisons une famille à un paramètre $u \in [0, +\infty]$ de courant sur X, sommes de courants de type (p, p), dépendant continûment de u, telle que

(13)
$$\omega_0 = \mathrm{ch}(\xi, h^\xi)$$
$$\omega_\infty = \frac{\mathrm{ch}(\eta, g^\eta)}{\mathrm{Td}(N,g^N)}\,\delta_Y$$

qui sont fermés et mutuellement cohomologues.

Soit en effet v^* l'adjoint de v. On pose $V = v + v^*$. Alors V est une section impaire de ξ, i.e. V échange ξ_{pair} et ξ_{impair}. Soit $\nabla^{\xi} = \bigoplus_{j=0}^{m} \nabla^{\xi}{}_j$ la connexion holomorphe Hermitienne sur (ξ, h^{ξ}). Alors pour $u \geq 0$, $A_u = \nabla^{\xi} + \sqrt{u}\, V$ (qui est la somme d'une connexion préservant la $\mathbb{Z}$ graduation de ξ et d'une section impaire de End(ξ)) est une superconnexion au sens de Quillen [Q1]. Dans le formalisme de Quillen (où variables de Grassmann impaires dans $\Lambda(T_R^*X)$ et éléments impairs de End(ξ) anticommutent), la courbure A_u^2 de la superconnexion A_u est un tenseur donné par

$$A_u^2 = \left(\nabla^{\xi}\right)^2 + \sqrt{u}\, \nabla^{\xi} V + u V^2 \tag{14}$$

Dans (14), $(\nabla^{\xi})^2$ est la courbure de la connexion ∇^{ξ}, $\nabla^{\xi}V$ est la dérivée covariante de V. Soit τ l'involution de ξ, telle que $\tau = +1$ sur ξ_{pair}, -1 sur ξ_{impair}. Pour $u > 0$, on pose

$$\omega_u = \varphi \mathrm{Tr}_s[\exp(- A_u^2)] \tag{15}$$

où φ envoie $\alpha \in \Lambda^{pair}(T_R^*X)$ vers $(2\pi i)^{\frac{-\deg\alpha}{2}}\alpha$. Par Quillen [Q1], on sait que pour $u \geq 0$, la forme ω_u est fermée et est cohomologue à ω_0.

De [B1, Théorème 3.2], il résulte que quand $u \to +\infty$, on a la convergence de courants

$$\lim_{u\to+\infty} \omega_u = \frac{\mathrm{ch}(\eta, g^{\eta})}{\mathrm{Td}(N,g^N)}\, \delta_Y \tag{16}$$

Soit N_H l'opérateur de nombre agissant sur ξ par multiplication par j sur $\xi_j (0 \leq j \leq m)$.

On pose

$$\beta_u = \varphi \operatorname{Tr}_s \left[N_H \exp\left(- A_u^2 \right) \right] \tag{17}$$

Soit $(Td^{-1})' (x_1, \ldots, x_q)$ le polynôme caractéristique

$$(Td^{-1})' (x_1, \ldots, x_q) = \frac{\partial}{\partial b} \{ Td^{-1}(x_1 + b, \ldots , x_q + b) \}_{b=0}. \tag{18}$$

Alors il résulte de [BGS1, Théorème 1.15], [B1, Théorème 2.4], que pour $u > 0$

$$\frac{\partial}{\partial u} \omega_u = \frac{1}{u} \frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \beta_u . \tag{19}$$

De plus par [B1, Théorème 4.3], quand $u \to + \infty$, on a la convergence de courants

$$\lim_{u \to + \infty} \beta_u = - \left(Td^{-1} \right)' \left(N, g^N \right) \operatorname{ch} \left(\eta, g^\eta \right) \delta_Y \tag{20}$$

Plus précisément, on démontre dans [B1] que si β_∞ désigne le membre de droite de (20), alors on a une estimation microlocale dans l'espace des courants dont le front d'onde est inclus dans N_R^*

$$\beta_u - \beta_\infty = O\left(\frac{1}{\sqrt{u}} \right) \tag{21}$$

Suivant Bismut-Gillet-Soulé [BGS4, Définition 2.1], on est donc amené à poser la définition suivante.

Définition 4 : Pour $s \in \mathbb{C}, 0 < \operatorname{Re}(s) < \frac{1}{2}$, on pose

$$R\left(\xi, h^\xi \right)(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{+\infty} u^{s-1} \left(\beta_u - \beta_\infty \right) du \tag{22}$$

On vérifie très simplement que $R(\xi, h^\xi)(s)$ s'étend en une fonction holomorphe de s près de 0. On pose

(23) $$T\left(\xi, h^\xi\right) = \frac{\partial}{\partial s} R\left(\xi, h^\xi\right)(0).$$

On montre alors dans [BGS4, Théorème 2.5] le résultat suivant.

Théorème 5 : Le courant $T(\xi, h^\xi)$ est somme de courants de type (p, p) et son front d'onde est inclus dans N^*_R. De plus $T(\xi, h^\xi)$ vérifie l'équation de courants sur X

(24) $$\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} T(\xi, h^\xi) = Td^{-1}(N, g^N)\, ch(\eta, g^\eta)\, \delta_Y - ch(\xi, h^\xi)$$

Preuve : (24) résulte en particulier de (19). Les propriétés de front d'onde de $T(\xi, h^\xi)$ découlent de (21). □

On appelle $T(\xi, h^\xi)$ un courant de Bott-Chern.

f) Classes de Bott-Chern.

Considérons maintenant la suite exacte de fibrés holomorphes Hermitiens

(25) $$0 \to TY \to TX_{|Y} \to N \to 0.$$

Par les résultats de [BoC], [BGS1, Section 1f)], à une telle suite exacte, on peut associer de manière unique une classe de formes C^∞ sur Y qui sont sommes de formes de type (p, p), modulo des ∂ ou $\bar{\partial}$ cobords, qu'on note $\widetilde{Td}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$, telle que

(26) $$\frac{\bar{\partial}\partial}{2i\pi} \widetilde{Td}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right) = Td\left(TX, g^{TX}\right) - Td\left(TY, g^{TY}\right) Td\left(N, g^N\right).$$

La construction de [BGS1] est relative à une suite exacte courte arbitraire de fibrés holomorphes Hermitiens $0 \to L \to M \to N \to 0$. On impose des propriétés fonctorielles évidentes à la classe $\widetilde{\mathrm{Td}}$, qui est en particulier telle que si la suite exacte courte considérée est scindée holomorphiquement et métriquement, $\widetilde{\mathrm{Td}}$ s'annule. La classe $\widetilde{\mathrm{Td}}$ est appelée classe de Bott-Chern.

g) Le genre R de Gillet et Soulé

Soit ζ la fonction zêta de Riemann. On introduit maintenant le genre R de Gillet et Soulé [GS].

Définition 6 : Soit $R(x)$ la série formelle

$$R(x) = \sum_{\substack{n \geq 1 \\ n \text{ impair}}} \left(\sum_{1}^{n} \frac{1}{j} + 2 \frac{\zeta'(-n)}{\zeta(-n)} \right) \frac{\zeta(-n)\, x^n}{n!} \tag{27}$$

On associe à la fonction R le genre additif correspondant $\sum_{1}^{q} R(x_i)$.

Remarque 7 : La série formelle $R(x)$ a été obtenue par Gillet et Soulé [GS] dans un calcul de la torsion analytique de $\mathbb{P}^n(\mathbb{C})$ muni de la métrique de Fubini-Study. Cette série est réapparue dans un calcul complètement distinct de [B2], qui joue un rôle essentiel dans la preuve du résultat fondamental de [BL1, 2].

h) Calcul de $\mathrm{Log}\left(\|\sigma\|^2_{(\lambda^{-1}(\eta)) \otimes \lambda(\xi)}\right)$

Nous énoncons maintenant le résultat de Bismut-Lebeau [BL1, 2].

Théorème 7 : On a l'identité

$$\begin{aligned} \mathrm{Log}\left(\|\sigma\|^2_{(\lambda(\eta))^{-1} \otimes \lambda(\xi)}\right) = & - \int_X \mathrm{Td}\left(TX, g^{TX}\right) T\left(\xi, h^{\xi}\right) \\ & + \int_Y \mathrm{Td}^{-1}\left(N, g^{N}\right) \mathrm{ch}\left(\eta, g^{\eta}\right) \widetilde{\mathrm{Td}}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right) \\ & - \int_X \mathrm{Td}(TX)\, R(TX)\, \mathrm{ch}(\xi) + \int_Y \mathrm{Td}(TY)\, R(TY)\, \mathrm{ch}(\eta) \end{aligned} \tag{28}$$

Remarque 8 : Du Théorème 7, on tire en particulier que $\mathrm{Log}\left(\|\sigma\|^2_{(\lambda(\eta))^{-1}\otimes\lambda(\xi)}\right)$ est donné par une formule locale sur X et Y. Ce résultat est moins inattendu qu'on ne pourrait le croire, compte tenu du théorème de courbure de Bismut-Gillet-Soulé [BGS1, Théorème 0.1] relatif à la métrique de Quillen sur l'inverse du déterminant de l'image directe.

Remarque 9 : La preuve du Théorème 7 donnée dans [BL2] est simple dans son principe, très complexe dans sa réalisation.

Soit N_V^X, N_H les opérateurs agissant sur $\Lambda^p\left(T^{*(0,1)}X\right)\widehat{\otimes}\,\xi_j$ par multiplication par p, j .

Pour $u > 0$, $T > 0$, on pose

$$A_{u,T} = uD^X + TV$$

On montre alors dans [BL2 , Théorème 3.5] que la 1 forme sur $R_+^* \times R_+^*$

$$\alpha = \frac{du}{u}\mathrm{Tr}_s\left[N_V^X \exp\left(- A_{u,T}^2\right)\right] - \frac{dT}{T}\mathrm{Tr}_s\left[N_H \exp\left(- A_{u,T}^2\right)\right] \tag{29}$$

est fermée.

Soit β la 1 forme sur $R_+^* \times R_+^*$ déduite de α par le changement de variables $u \to u$, $T \to uT$. Soit Γ un rectangle de côtés parallèles aux axes dans $R_+^* \times R_+^*$. Alors $\int_\Gamma \beta = 0$.

L'idée essentielle de [BL2] est de déformer deux cotés du rectangle vers les axes $\overrightarrow{OT}$, $\overrightarrow{Ou}$, et donc en particulier de repousser les deux autres cotés du rectangle vers l'infini. Dans ce processus la dernière étape est la déformation de la demi droite d'origine $(0, \varepsilon)$ dans le repère $(\overrightarrow{OT}, \overrightarrow{Ou})$ parallèle à $\overrightarrow{OT}$ quand $\varepsilon \to 0$. Cette dernière étape est l'une des plus difficiles (et intéressantes !) de [BL2].

En général, les difficultés analytiques rencontrées dans [BL2] ont une origine géométrique très précise.

Disons seulement ici que pour $u > 0$, quand $T \to +\infty$, certaines supertraces relatives à $\exp(-(uD^X + TV)^2)$ convergent vers des supertraces correspondantes relatives à $\exp(-(uD^Y)^2)$, et ceci grâce à la notion de théorie de Hodge transverse [B2, Section 1], [BL2, Section 7]. Toutefois quand $T \to +\infty$, les expressions locales sur X obtenues par développement asymptotique des noyaux de la chaleur quand $u \to 0$ relatifs à $\exp(-(uD^X + TV)^2)$ ne convergent pas au sens des courants vers les expressions correspondantes pour $\exp(-(uD^Y)^2)$. De manière équivalente on ne peut pas échanger les limites quand $T \to +\infty$ et $u \to 0$.

Une grande partie du travail de [BL2] consiste à mesurer l'impossibilité d'échanger ces limites, d'où l'apparition d'un terme correctif $\mathbb{B}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$ qui est local sur Y, et s'obtient par un calcul compliqué dans les fibres de $TX_{|Y}$ où interviennent différents oscillateurs harmoniques. $\mathbb{B}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$ ne possède pas a priori de formule explicite.

A ce stade, la situation pourrait paraître désespérée. Toutefois le théorème de courbure de [BGS1] garantit en principe que $\mathbb{B}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$ doit pouvoir être effectivement calculable. Le calcul de $\mathbb{B}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$ a été mené complètement dans [B2] modulo des ∂ et $\bar{\partial}$ cobords qui sont sans effet sur le calcul. Le vrai miracle est en effet que la forme $\mathbb{B}\left(TY, TX_{|Y}, g^{TX_{|Y}}\right)$ est un cas particulier d'un objet universel (ou fonctoriel) relatif à une suite exacte courte arbitraire $0 \to L \to M \to N \to 0$ de fibrés holomorphes Hermitiens. Dans [B2], on calcule $\mathbb{B}(L, M, N)$ par déformation de la suite considérée en une suite scindée. La formule de [B2] exprime $\mathbb{B}(L, M, g^M)$ (modulo des ∂ et $\bar{\partial}$ cobords) à l'aide de la classe $\widetilde{\mathrm{Td}}\left(L, N, g^N\right)$ et d'un genre additif D évaluée sur N, où D est très proche de R.

Pour préciser les choses au plan analytique, disons seulement que la fonction $\widehat{A}(x) = (x/2)\,/\,\mathrm{sh}\,(x/2)$ est étroitement liée au noyau de la chaleur sur le groupe d'Heisenberg. Cette fonction définit le genre multiplicatif de Hirzebruch. Par ailleurs les preuves modernes du Théorème d'indice local d'Atiyah-Singer [Ge], [B3], [BeV] font apparaître la forme de Chern-Weil $\widehat{A}$ évaluée sur la courbure du fibré tangent comme étant associée au noyau de la chaleur sur le groupe de Heisenberg, qui dépend ici de la courbure de TX (où X est la variété considérée).

La classe $\mathbb{B}\left(TY,\ TX_{|Y},\ g^{TX_{|Y}}\right)$ apparaît d'un certain point de vue comme une obstruction à la déformation des formes d'indice local sur X en formes d'indice local sur Y, et ceci via des opérateurs agissant sur le groupe d'Heisenberg.

C'est dire l'importance de certaines techniques d'indice local dans [BL2] essentiellement inspirés de Getzler [G].

L'expression de certains opérateurs différentiels sous forme de matrices (2, 2) ou (3, 3) joue aussi un rôle important dans [BL2].

Disons pour terminer que les propriétés de la propagation à vitesse finie des solutions d'équations hyperboliques sont aussi utilisées dans [BL2], en particulier pour rendre compatibles les techniques d'indice local et les techniques matricielles de [BL2].

On renvoie le lecteur à l'introduction de [BL2] pour plus de détails sur les techniques qui sont utilisées dans [BL2]. La lecture de la totalité de [BL2] ne devrait pas poser de difficultés majeures au lecteur averti.

REFERENCES

[AS] Atiyah, M.F., Singer I.M. : The index of elliptic operators. III Ann. of Math. 87, 546-604 (1968).

[B1] Bismut, J.M.: Superconnection currents and complex immersions. Invent. Math. (1990), 59-113.

[B2] Bismut, J.M.: Koszul complexes, harmonic oscillators and the Todd class. J.A.M.S. 3, 159-256 (1990).

[B3] Bismut, J.M.: The Atiyah-Singer index Theorem : a probabilistic approach. I : The index Theorem. J. Funct. Anal. 57, 56- 99 (1984).

[B4] Bismut, J.M. : Superconnexions, indice local des familles, déterminant de la cohomologie et métriques de Quillen. A paraître.

[BGS1] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. I. Comm. Math. Phys. 115, 49-78 (1988).

[BGS2] Bismut J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. II. Comm. Math. Phys. 115, 79-126 (1988).

[BGS3] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Analytic torsion and holomorphic determinant bundles. III. Comm. Math. Phys. 115, 301-351 (1988).

[BGS4] Bismut, J.M., Gillet, H., Soulé, C.: Bott-Chern currents and complex immersions. Duke Math. Journal 60, 255-284(1990).

[BL1] Bismut, J.M., Lebeau, G. Immersions complexes et métriques de Quillen. C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I. Math 309, 487-491 (1989).

[BL2] Bismut, J.M., Lebeau, G. Complex immersions and Quillen metrics. Preprint Orsay 90-13 (1990).

[BoC] Bott, R, Chern S.S. : Hermitian vector bundles and the equidistribution of the zeros of their holomorphic sections. Acta Math. 114. 71-112 (1968).

[Ge] Getzler, E. : A short proof of the Atiyah-Singer Index Theorem. Topology 25, 111-117 (1986).

[GS] Gillet, H., Soulé, C : Analytic torsion and the arithmetic Todd genus. A paraître dans Topology.

[GrH] Griffiths, P., Harris, J., Principles of Algebraic Geometry. New-York : Wiley 1978.

[KM] Knudsen, F.F., Mumford, D. : The projectivity of the moduli space of stable curves, I : Preliminaries on "det" and "div". Math. Scand. 39, 19-55 (1976).

[[Q1] Quillen, D.: Superconnections and the Chern character. Topology, 24, 89-95 (1985).

[Q2] Quillen, D.: Determinants of Cauchy-Riemann operators over a Riemann surface. Funct. Anal. Appl. 14, 31-34 (1985).

[RS] Ray, D.B., Singer ,I.M. : Analytic torsion for complex manifolds. Ann.of Math.98, 154-177 (1973) .

[S] Seeley, R.T. : Complex powers of an elliptic operator. Proc. Symp. Pure and Appl. Math. AMS 10, 288-307 (1967).

Département de Mathématique
Bâtiment 425
Université Paris-Sud
91405 - Orsay
FRANCE