Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

P. Levy-Bruhl
A. Mohamed
J. Nourrigat

Étude spectrale d'opérateurs sur des groupes nilpotents

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. nº 18, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

ETUDE SPECTRALE D'OPERATEURS SUR DES GROUPES NILPOTENTS.

P. LEVY-BRUHL, A. MOHAMED et J. NOURRIGAT

Exposé n°XVIII

24 Avril 1990

I. OPERATEUR DE SCHRODINGER.

On s'intéresse d'abord à l'opérateur suivant :

(1.1) $$P = \sum_{j=1}^{n} (D_j - A_j(x))^2 + V(x)$$

où $D_j = \dfrac{1}{i}\dfrac{\partial}{\partial x_j}$ et les A_j et V sont des polynômes réels sur $\mathbb{R}^n$, de degré $\leq r$. On suppose que $V(x) \geq 0$ pour tout x, et on pose :

(1.2) $$B_{jk} = \frac{\partial A_j}{\partial x_k} - \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

Rappelons la proposition suivante :

Proposition 1 [5]. L'opérateur P est essentiellement auto-adjoint, et les deux propriétés suivantes sont équivalentes :

1. La résolvante de P est compacte.

2. Il n'existe aucune rotation d'axes qui transforme tous les polynômes B_{jk} et V en des fonctions indépendantes d'une des coordonnées.

Nous supposons désormais que la condition 2 est satisfaite, et nous désignons par $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de P (répétées selon leur multiplicité), qui sont $\leq\lambda$. Pour préparer le lecteur aux généralisations du §II, rappelons l'encadrement de $N(\lambda)$ donné dans [11]. On pose :

(1.3) $$M(x) = \sum_{|\alpha|\leq r} |\partial^\alpha V(x)|^{1/(|\alpha|+2)} + \sum_{\alpha, j, k} |\partial^\alpha B_{jk}(x)|^{1/(|\alpha|+2)}$$

La propriété 2 ci-dessus équivaut à dire que $M(x) \to \infty$ quand $|\xi| \to \infty$. On pose aussi :

(1.4) $$M(x, \xi) = |\xi| + M(x)$$

Pour tout $\lambda > 0$, désignons par $N_0(\lambda)$ le volume, dans $\mathbb{R}^{2n}$, de l'ensemble des points (x, ξ) tels que $M(x, \xi)^2 \leq \lambda$. On démontre dans [11] le résultat suivant :

Proposition 2 [11]. Il existe une constante $C>1$, ne dépendant que des entiers n et r, telle qu'on ait :

(1.5) $$C^{-1} N_0(C^{-1}\lambda) \leq N(\lambda) \leq C N_0(C\lambda)$$

pour tout $\lambda \geq 1$, et pour tous potentiels $A_1, \dots A_n$ et V, de degré $\leq r$, vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Lorsque le potentiel magnétique $(A_1, \dots A_n)$ est nul, ce résultat avait été énoncé sous une autre forme, et démontré, dans Fefferman [3].

On peut compléter les résultats de [11] par un encadrement de la trace $Z(t)$ du noyau de l'équation de la chaleur associée à P :

$$Z(t) = Tr\,(e^{-tP})$$

On pose $Z_0(t) = \int\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-tM(x,\xi)^2}\, dx\, d\xi \qquad \forall t>0.$

Proposition 3. Il existe une constante $C>0$, ne dépendant que des entiers n et r, telle que :

(1.6) $\qquad C^{-1} Z_0(Ct) \leq Z(t) \leq C\, Z_0(C^{-1} t)$

pour tout $t>0$, et pour tous potentiels $A_1, \dots A_n$ et V, de degré $\leq r$, vérifiant les hypothèses ci-dessus.

Rappelons que, pour certains potentiels tels que $V(x, y) = x^2 y^2$ dans $\mathbb{R}^2$, le potentiel magnétique étant nul, D. Robert [16] et B.Simon [17] ont donné un équivalent de $N(\lambda)$ et de $Z(t)$. L'estimation de l'intégrale $Z_0(t)$ nous permet seulement de donner un encadrement, qui s'écrit, dans ce cas, pour t assez petit :

$$C^{-1} \frac{|\log t|}{t^{3/2}} \leq Z(t) \leq C\, \frac{|\log t|}{t^{3/2}}$$

Remarquons que, pour un potentiel comme celui de cet exemple, la formule classique de Weyl n'a aucun sens, puisque l'intégrale qui y apparaît est divergente.

II. REPRESENTATIONS DE GROUPES NILPOTENTS.

Commençons par énoncer le résultat en partant de la forme explicite des opérateurs étudiés, qui généralise celle de (1.1). On considère, dans $\mathbb{R}^n$, p opérateurs différentiels d'ordre ≤ 1, notés $\pi(X_1)$, ... $\pi(X_p)$. On fait les hypothèses suivantes :

(H1) Chacun des opérateurs X_j est de la forme suivante :

(2.1) $\pi(X) = A_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + A_2(x_1) \dfrac{\partial}{\partial x_2} + \ldots + A_n(x_1, \ldots x_{n-1}) \dfrac{\partial}{\partial x_n} + i\, B(x)$

où les A_j et B sont des polynômes réels, ne dépendant que des variables indiquées.

(H2) Il existe un entier $r \geq 1$ tel que tous les commutateurs itérés, de longueur $\geq r+1$, des opérateurs $\pi(X_j)$, sont nuls.

On s'intéresse alors à l'opérateur suivant :

(2.2) $$\pi(P) = -\sum_{j=1}^{p} \pi(X_j)^2$$

Pour toute suite finie $I = (i_1, \ldots i_m)$ d'entiers compris entre 1 et p, on note X_I le commutateur itéré $\pi(X_I) = (ad\ \pi(X_{i_1})) \ldots (ad\ \pi(X_{i_{m-1}}))\ \pi(X_{i_m})$, on note $\pi(X_I)(x, \xi)$ le symbole complet de cet opérateur, et on pose $|I| = m$. On pose aussi :

(2.3) $$M_\pi(x, \xi) = \sum_{|I| \leq r} |\pi(X_I)(x, \xi)|^{1/|I|}$$

On démontre dans [5] la proposition suivante :

Proposition 4 [8], cf. aussi [5]. Sous ces hypothèses, l'opérateur $\pi(P)$ est auto-adjoint, et à résolvante compacte, si, et seulement si :

(H3) $M_\pi(x, \xi) \to \infty$ quand $|(x, \xi)| \to \infty$.

On suppose désormais que les hypothèses (H1), (H2) et (H3), sont vérifiées, et on note $N(\lambda)$ le nombre de valeurs propres de $\pi(P)$ (répétées selon leur multiplicité), qui sont $\leq \lambda$. Pour obtenir un encadrement de $N(\lambda)$, on note $N_0(\lambda)$ le volume, dans $\mathbb{R}^{2n}$, de l'ensemble des (x, ξ) tels que $M_\pi(x, \xi)^2 \leq \lambda$. Nous pouvons énoncer le résultat principal, d'abord sous une forme "explicite".

Théorème 5. Il existe une constante $C>0$, ne dépendant que des entiers p et r, telle qu'on ait :

(2.4) $\quad C^{-1} N_0(C^{-1}\lambda) \le N(\lambda) \le C N_0(C\lambda)$

pour tout système d'opérateurs $\pi(X_1) \dots \pi(X_p)$ vérifiant les hypothèses (H1), (H2) et (H3).

On remarque que les hypothèses (H1), (H2) et (H3) décrivent exactement l'ensemble des représentations unitaires irréductibles de groupes nilpotents. Nous pouvons donc réexposer le théorème 5 sous une forme équivalente, mais plus algébrique. On note $\mathscr{G}$ l'algèbre de Lie nilpotente libre, à p générateurs $X_1, \dots X_p$, de rang de nilpotence r. On adopte, pour les crochets itérés des générateurs, la même notation X_I que ci-dessus. On note δ_t ($t>0$) les dilatations naturelles de l'algèbre de Lie $\mathscr{G}$ (application linéaires telles que $\delta_t \; X_I = t^{|I|} X_I$), on note $\delta_t^* : \mathscr{G}^* \to \mathscr{G}^*$ l'application transposée de δ_t. On note $|||\quad|||$ une "norme homogène" quelconque dans $\mathscr{G}^*$ (c'est-à-dire une fonction continue ≥ 0, ne s'annulant qu'à l'origine, et vérifiant $|||\delta_t^* \ell||| = t\,|||\ell|||$ si $t>0$ et $\ell \in \mathscr{G}^*$). Par exemple, on peut prendre :

$$|||\ell||| = \sum |\ell(X_I)|^{1/|I|}$$

D'après la théorie de Kirillov, on sait que toute représentation unitaire irréductible du groupe $exp\,\mathscr{G}$ correspond à une certaine orbite $\mathcal{O}_\pi \subset \mathscr{G}^*$. En fait, les opérateurs $\pi(X_j)$ vérifient alors les hypothèses ($H1$), ($H2$) et ($H3$) ci-dessus, avec un entier n qui dépend de π, et, pour tout $X \in \mathscr{G}$, l'opérateur $\pi(X)$ est de la forme (2.1). L'orbite $\mathcal{O}_\pi$ coïncide avec l'ensemble des formes linéaires $X \to \frac{1}{i}\,\pi(X)\,(x, \xi)$, où (x, ξ) décrit $\mathbb{R}^{2n}$. L'orbite $\mathcal{O}_\pi$ est munie d'une mesure canonique μ : quand on identifie $\mathcal{O}_\pi$ avec $\mathbb{R}^{2n}$ comme ci-dessus, cette mesure est simplement $dx\, d\xi$. (voir [8] et [5]). On pose

(2.5) $$N_\pi(\lambda) = \mu\,(\{\ell \in \mathcal{O}_\pi\,,\ |||\,\ell\,|||^2 \leq \lambda\})$$

L'énoncé suivant est donc équivalent au théorème 5.

Théorème 5'. Il existe une constante $C>0$, ne dépendant que des entiers p et r, telle qu'on ait :

(2.6) $$C^{-1} N_\pi(C^{-1}\lambda) \ \leq\ N(\lambda) \ \ \leq C\, N_\pi(C\lambda)$$

pour toute représentation unitaire irréductible π du groupe $exp\, \mathcal{G}$.

Ce résultat est à comparer avec celui de D. Manchon [9], démontrant une conjecture de Karasev-Maslov [7]. En général, le résultat de [9] ne s'applique pas à notre opérateur (2.2), mais à une classe d'opérateurs qui contient le suivant :

$$\pi(A) = -\sum_{|I|\leq r} \pi(X_I)^2$$

Ces opérateurs sont, eux aussi, autoadjoints à résolvante compacte, et l'encadrement de leur $N(\lambda)$, donné dans [9], s'exprime comme dans la formule classique de Weyl. Cette formule n'aurait en général pas de sens pour nos opérateurs, les intégrales qui y apparaissent étant divergentes.

On donne aussi un encadrement de la trace $Z(t) = Tr\,(e^{-t\pi(P)})$ en posant :

$$Z_0(t) = \int\!\!\int_{\mathbb{R}^{2n}} e^{-tM(x,\xi)^2}\, dx\, d\xi \ = \int_{\mathcal{O}_\pi} e^{-t\,|||\ell|||^2}\, d\mu\,(\ell)$$

Théorème 6. Il existe une constante $C>0$, ne dépendant que des entiers p et r, telle qu'on ait :

(2.7) $$C^{-1} Z_0(Ct) \ \leq\ Z(t) \leq C\, Z_0(C^{-1} t)$$

pour toute représentation unitaire irréductible π du groupe $exp\, \mathcal{G}$.

L'idée de la preuve est d'appliquer la formule du minimax en utilisant un système convenable de fonctions de $L^2(\mathbb{R}^n)$. A défaut des propriétés qu'on attendrait, (être une base orthogonale, se déduire d'une seule fonction à partir d'une suite de transformations unitaires, rendre les normes des espaces de Sobolev associés à notre opérateur équivalentes à celles d'espaces ℓ^2 avec poids, ...), ces fonctions vérifient une longue liste de propriétés plus techniques, et qui s'approchent autant que possible de celles qu'on voudrait. On s'inspire à la fois des idées de Perelomov [15] (états cohérents), et de Meyer [10] (ondelettes).

III. PROBLEMES OUVERTS.

Soit maintenant V une variété compacte sans bord, munie d'une mesure $d\mu$. Soit X_1 , ... X_p un système d'opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, formellement autoadjoints. Avec les notations précédentes, on note X_I les commutateurs itérés, et $X_I(x, \xi)$ leurs symboles principaux (homogènes de degré 1). On suppose qu'il existe un entier r tel que les X_I ($|I|\leq r$) forment un système elliptique d'ordre 1. Rappelons que cette condition est nécessaire et suffisante pour que le système des X_j soit sous-elliptique avec perte de $1 - 1/r$ dérivée (cf [1]). On pose alors :

$$M(x, \xi) = \sum_{|I|\leq r} |X_I(x, \xi)|^{1/|I|} \qquad \forall (x, \xi)\in T^* V \tag{3.1}$$

On s'intéresse à l'opérateur $P = \sum_{j=1}^{p} X_j{}^2$. Pour encadrer son $N(\lambda)$, on note $dxd\xi$ une mesure symplectique dans T^*V, et $N_0(\lambda)$ la mesure le l'ensemble des $(x, \xi)\in T^*V$ tels que $M(x, \xi)^2\leq\lambda$. On peut conjecturer le résultat suivant :

Conjecture 7. Il existe une constante $C>0$ (dépendant des X_j) telle qu'on ait

$$C^{-1} N_0(C^{-1}\lambda) \leq N(\lambda) \leq C N_0(C\lambda) \text{ pour } \lambda>0 \text{ assez grand.} \tag{3.2}$$

Un encadrement du $N(\lambda)$ a été obtenu par Feffermen-Phong [4] lorsque les X_j sont des champs de vecteurs réels. Pour tous $R>0$ *et* $x\in V$, soit $B(x, R)$ la "boule" centrée en x et de "rayon" R pour la métrique associée dans [4] à l'opérateur P. On pose :

$$N_1(\lambda) = \int_V \frac{d\mu(x)}{\mu(B(x, \lambda^{-1/2}))}$$

et on montre dans [4] que

$$C^{-1} N_1 (C^{-1} \lambda) \leq N(\lambda) \leq C N_1 (C\lambda) \text{ pour } \lambda>0 \text{ assez grand.}$$

La conjecture 7 n'est pas incompatible avec ce résultat. En effet (dans une carte locale), si l'on note $A(x, \mu)$ le volume de l'ensemble des $\xi \in \mathbb{R}^n$ tels que $M(x, \xi) \leq \mu$, il semble qu'on puisse écrire, en combinant les techniques de [4] et celles de Nagel-Stein-Wainger [12] :

$$C^{-1} \mu(B(x, (C\mu^{-1})^{-1} \leq A(x, \mu) \leq C \mu(B(x, (C\mu)^{-1})^{-1}$$

lorsque les X_j sont des champs de vecteurs réels. La conjecture 7 serait donc une extension au cas pseudodifferentiel, qu'on pourrait peut-être obtenir avec les techniques de [14], et de [2] et [3].

Réferences

[1] P.BOLLEY, J.CAMUS, J.NOURRIGAT : La condition de Hörmander pour les opérateurs pseudodifférentiels. *Comm. in P.D.E*, 7 (1982), p.197-221.

[2] J.M. BONY, N. LERNER : Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur. Préprint.

[3] C.L. FEFFERMAN : The uncertainty principle. *Bull. A.M.S*, 9 (1983), p.129-206.

[4] C.L. FEFFERMAN, D.H. PHONG : Subelliptic eigenvalue problems. Dans : Conference on harmonic analysis in honor of A. Zygmund. Beckner, ed. Wadsworth (1982).

[5] B. HELFFER, J. NOURRIGAT : Hypoellipticité maximale pour des opérateurs polynômes de champs de vecteurs. Progress in Math. 58. Birkhauser, 1985.

[6] L. HORMANDER : The analysis of linear partial differential operators. Springer, 1985.

[7] KARASEV, V. MASLOV : Algebras with general commutation relations and their applications II. *J. of Soviet Math*, 1981.

[8] A. KIRILLOV : Unitary representations of nilpotent groups. *Russian Math. Survey*, 17 (1962), p.53-104.

[9] D. MANCHON : Formule de Weyl pour les groupes de Lie nilpotents. Thèse, Paris, 1989.

[10] Y. MEYER : Ondelettes et opérateurs. Hermann (Paris), 1990.

[11] A. MOHAMED, J. NOURRIGAT : Encadrement du $N(\lambda)$ pour des opérateurs de Schrödinger avec champ magnétique. A paraître au *J. Math. pures et appl.*

[12] A. NAGEL, E.M. STEIN, S. WAINGER : Balls and metrics defined by vector fields. *Acta Math*, 1985.

[13] J. NOURRIGAT : Inégalités L^2 et représentations de groupes nilpotents. *J. Funct. Analysis*, 74, 2 (1987), *p*.300–327.

[14] J. NOURRIGAT : Subelliptic systems. *Comm. in P.D.E*, 15, 3 (1990),p.341-405.

[15] A. PERELOMOV : Generalized coherent states and their applications.Texts and monographs in Physics. Springer, 1981.

[16] D. ROBERT : Comportement asymptotique des valeurs propres d'opérateurs de Schrödinger à potentiels "dégénérés". *J. Math. pures et appl*, 61 (1982), p.275-300.

[17] B. SIMON : Non classical eigenvalue asymptotics. *J. Funct. Analysis*, 53 (1983), p.84-98.

P. LEVY-BRUHL et J. NOURRIGAT
Département de Mathématiques
Université de Reims.
Moulin de la Housse, B.P. 347.
51062 Reims Cédex.

A. MOHAMED
Département de Mathématiques
Université de Nantes
2, rue de la Houssinière
44072 Nantes Cédex.