G. Lebeau

Contrôle et stabilisation hyperboliques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. n° 16, p. 1-14

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A18_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CONTROLE ET STABILISATION HYPERBOLIQUES

G. LEBEAU

Exposé n°XVI

20 Mars 1990

Contrôle et stabilisation hyperboliques

GILLES LEBEAU
UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
DÉPARTEMENT DE MATHÉMATIQUES
91405 ORSAY CEDEX, FRANCE

Introduction

Les résultats qui suivent ont été obtenu en collaboration avec C. Bardos et J. Rauch.

On se propose de décrire comment l'analyse microlocale des problèmes aux limites, et plus particulièrement le théorème de propagation des singularités de R. MELROSE et J. SJÖSTRAND [5] permettent d'obtenir des résultats essentiellement optimaux sur le contrôle et la stabilisation des solutions de l'équation des ondes dans un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$. On renvoie à l'article [1] pour les résultats analogues concernant les équations et domaines dépendant du temps, ainsi que l'étude de la contrôlabilité dans les espaces de Sobolev autres que H^1, et à [3] pour la contrôlabilité d'équations non-hyperboliques de type Schrödinger.

On trouvera dans le livre de J.L. LIONS [4] une exposition générale sur le sujet, ainsi que les résultats obtenus par les techniques de multiplicateurs [non-microlocalisés]. On pourra aussi consulter l'article de survey de RUSSEL [6].

Notations

On désigne par Ω un ouvert connexe borné de $\mathbb{R}^n_x$, à bord $\partial\Omega$ analytique (ou C^∞ sans contact d'ordre infini avec ses droites tangentes) et par $\square = \partial_t^2 - \Delta_x$ l'opérateur des ondes.

On note ∂_n la dérivée normale unitaire extérieure.

Soit $\overline{X}$ la variété à bord $\overline{X} = \overline{\Omega} \times \mathbf{R}_t$, $\partial X = \partial\Omega \times \mathbf{R}_t$ son bord, $X = \Omega \times \mathbf{R}_t$ son intérieur, $\dot{T}^*\overline{X} = \dot{T}^*(\mathbf{R}^n_x \times \mathbf{R}_t)|_{\overline{X}}$, et p la projection canonique

$$\dot{T}^*\overline{X} \setminus T^*_{\partial X} \xrightarrow{p} \dot{T}^*X \cup \dot{T}^*\partial X \ . \tag{1}$$

On notera ici $\dot{T}_b^*X = \dot{T}^*X \cup \dot{T}^*\partial X$, muni de sa topologie naturelle. On désigne par $\operatorname{Car}\square$ la variété caractéristique de l'opérateur des ondes

$$\operatorname{Car}\square = \left\{(x,t;\xi,\tau)\,;\,\tau^2 = |\xi|^2\right\} \tag{2}$$

et on pose :

$$\Sigma_b = p(\operatorname{Car}\square)\ . \tag{3}$$

On renvoie à [**5**] pour la définition d'un rayon; par tout point $\rho \in \Sigma_b$, il passe un unique rayon maximal.

Le fibré cotangent au bord $\dot{T}^*\partial X$ est la réunion disjointe :

$$\dot{T}^*\partial X = \mathcal{E} \cup \mathcal{G} \cup \mathcal{H} \tag{4}$$

$\left[\text{ici } \dot{T}^* = T^* \setminus \{\text{section nulle}\}\right]$

où les régions $\mathcal{E}$ (elliptique), $\mathcal{G}$ (glancing), $\mathcal{H}$ (hyperbolique) sont définies par :

$$\#\left\{p^{-1}(\rho) \cap \operatorname{Car}\square\right\} = 0\ (\mathcal{E}),\ 1\ (\mathcal{G}),\ 2\ (\mathcal{H})\ . \tag{5}$$

On a

$$\Sigma_b \cap \dot{T}^*\partial X = \mathcal{G} \cup \mathcal{H}\ . \tag{6}$$

Pour une distribution prolongeable u solution de $\square u = 0$ dans X, son front d'onde au bord, $WF_b(u)$ est le sous-ensemble de $\dot{T}_b^*X$ défini par $\left[\text{voir } [\mathbf{2}], [\mathbf{5}]\right]$

$$\left\{\begin{array}{ll} 1) & WF_b(u) \cap \dot{T}^*X = WF(u) \\ 2) & \text{Pour } \rho \in \dot{T}^*\partial X,\ \rho \notin WF_b(u) \text{ ssi il existe un o.p.d} \\ & \text{tangentiel } A \text{ elliptique en } \rho \text{ tel que } Au \in C^\infty(\overline{X}). \end{array}\right. \tag{7}$$

Pour ω ouvert de $\mathbb{R}^d$, on note $H^s(\omega)$ l'espace des distributions f sur ω qui possèdent un prolongement $\underline{f}$ à $\mathbb{R}^d$, avec $\underline{f} \in H^s(\mathbb{R}^d)$. C'est un espace de Banach muni de la norme quotient.

Pour u distribution prolongeable solution de $\square u = 0$ dans X, et $\rho \in \dot{T}_b^*X$, on écrira $u \in H_\rho^s$ ssi il existe un o.p.d A de degré s, elliptique en ρ (tangentiel si $\rho \in \dot{T}^*\partial X$) tel que $Au \in L^2(X)$.

DÉFINITION 1. Un point $\rho \in \dot{T}^*\partial X$ est non-diffractif si $\rho \in \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$, ou : $\rho \in \mathcal{G}$ et le rayon passant par ρ sort de $\overline{X}$ dans tout voisinage de ρ.

DÉFINITION 2. Soit Γ une partie ouverte de $\partial\Omega$, $T > 0$. On dit que le couple (Γ, T) contrôle géométriquement Ω ssi tout rayon $s \mapsto \gamma(s)$ issu de $t = 0$ en $s = 0$ rencontre Γ en un point non diffractif à un instant $t \in]0, T[$.

On remarquera que cette définition est stable par petites perturbations.

§ 1. Contrôlabilité exacte pour Dirichlet

THÉORÈME 1. *Soit Ω comme précédemment et (Γ, T) contrôlant géométriquement Ω. Il existe $C_0 > 0$ tel que pour toutes données de Cauchy $(u_0, u_1) \in L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$, il existe un contrôle $g \in L^2(\partial X)$ tel que :*

(8) $\quad \text{support}\,(g) \subset \bar{\Gamma} \times [0, T]\ ;\ \|g\|_{L^2} \leq C_0\left(\|u_0\|_{L^2} + \|u_1\|_{H^{-1}}\right)$

et tel que la solution du problème d'évolution

$$\text{(9)} \qquad \begin{cases} \Box u = 0 \quad \text{dans } X \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = u_1\ ;\ u|_{\partial X} = g \end{cases}$$

vérifie $u(t,x) \equiv 0$ pour $t > T$.

PREUVE : On désigne par E_0 l'espace d'énergie

$$\text{(10)} \qquad E_0 = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)$$

et on pose $E_{-1} = L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)$. Pour $v = (v_0, v_1) \in E_0$, on identifie v à la solution du problème d'évolution

$$\text{(11)} \qquad \Box v = 0 \ \text{ dans } X\ ;\ v|_{t=0} = v_0 \quad \left.\frac{\partial v}{\partial t}\right|_{t=0} = v_1\ .$$

On sait alors que $\partial_n v|_{\partial X} \in L^2_{\text{loc}}(\partial X)$ et plus précisément, il existe $C_1 > 0$ tel que pour tout $v \in E_0$, et $T_1 < T_2$ on ait :

$$\text{(12)} \qquad \|\partial_n v\|^2_{L^2(\partial\Omega \times]T_1, T_2[)} \leq C_1(1 + |T_2 - T_1|)\, \|v\|^2_{E_0}\ .$$

Rappelons la méthode H.U.M de J.L. Lions qui permet de construire le contrôle g : les espaces E_0 et E_{-1} sont en dualité par :

$$\text{(13)} \qquad \langle u | v \rangle = \int_\Omega u_1 v_0 - u_0 v_1 \qquad u \in E_{-1},\ v \in E_0\ .$$

Pour $v \in E_0$, soit $u(t,x)$ la solution du problème :

$$\text{(14)} \qquad \begin{cases} \Box u = 0 \ \text{ dans } X\ ;\ u|_{t=T} = 0 \ \left.\dfrac{\partial u}{\partial T}\right|_{t=T} = 0 \\ u|_{\partial X} = \overline{\partial_n v} \cdot 1_{\Gamma \times]0,T[}\ . \end{cases}$$

On a $u \in C^0\left(\mathbb{R}_t, L^2(\Omega)\right) \cap C^1\left(\mathbb{R}_t, H^{-1}(\Omega)\right)$.

Posons $\Lambda(v) = \left(u|_{t=0}, \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}\right) \in E_{-1}$. Pour tout $w \in E_0$ on a alors :

$$\text{(15)} \qquad \langle \Lambda(v) | w \rangle = \int_0^T \int_\Gamma \overline{\partial_n v} \cdot \partial_n w$$

et Λ est continue de E_0 dans E_{-1} d'après (12). Comme on a $u(t,x) \equiv 0$ pour $t > T$, il suffit de prouver que Λ est bijectif. Comme $\langle \Lambda(v) | v \rangle = \displaystyle\int_0^T \int_\Gamma |\partial_n v|^2$, le théorème 1 est conséquence de :

PROPOSITION 1. *Il existe $C_2 > 0$ tel que pour tout $v \in E_0$, on ait :*

(16) $$\|v\|_{E_0}^2 \leq C_2 \int_0^T \int_\Gamma |\partial_n v|^2 \ .$$

Compte tenu de (12) cette proposition exprime que sur E_0, les normes $\|v\|_{E_0}$ et $\|\partial_n v\|_{L^2(\Gamma \times]0,T[)}$ sont équivalentes. Montrons (16). Par (11) on a identifié E_0 à :

(17) $$\left\{ v(t,x) \in H^1_{\mathrm{loc}\,(t)}(\Omega \times \mathbb{R}_t) \ ; \ \Box v = 0 , \ v|_{\partial X} = 0 \right\} .$$

Posons :

(18) $$G = \left\{ u \in L^2(\Omega \times]-2T, 2T[), \Box u = 0 , u|_{\partial X} = 0 , \partial_n u|_{\Gamma \times]0,T[} \in L^2 \right\}$$

muni de la norme :

(19) $$\|u\|_G = \|u\|_{L^2(\Omega \times]-2T,2T[)} + \|\partial_n u\|_{L^2(\Gamma \times]0,T[)} \ .$$

Alors G est un espace de Banach et on a une injection canonique continue $i : E_0 \hookrightarrow G$. Le point clé de la démonstration consiste à prouver la :

PROPOSITION 2. *i est surjective.*

En effet, par le théorème du graphe fermé, on aura alors $E_0 = G$ algébriquement et topologiquement, et $\| \ \|_{E_0} \leq$ Cte $\| \ \|_G$. Comme l'injection de E_0 dans $L^2(\Omega \times]-2T, 2T[)$ est compacte, il reste à vérifier que $N = \left\{ u \in E_0 \ ; \partial_n u|_{\Gamma \times]0,T[} = 0 \right\}$ est réduit au vecteur nul; pour $u \in N$ on a $\|u\|_{E_0} \leq$ Cte $\|u\|_{L^2(\Omega \times]-2T,2T[)}$, donc la boule unité de N est compacte et N est de dimension finie, stable par ∂_t puisque $E_0 = G$. Si $u \in N$ est vecteur propre de ∂_t, on a $u(t,x) = e^{\lambda t} g(x)$; avec $(\lambda^2 - \Delta) g = 0$, $g|_{\partial\Omega} \equiv 0$, $\left.\dfrac{\partial g}{\partial n}\right|_\Gamma \equiv 0$ donc $g \equiv 0$ par le théorème d'Holmgren (ou l'unicité pour les elliptiques d'ordre deux réels si on veut remplacer Δ par un opérateur plus général), donc $N = \{0\}$, d'où le théorème 1.

Pour démontrer que i est surjective, il suffit de vérifier que si $u \in G$, on a $u \in H^1_\rho$ pour tout $\rho \in T_b^* X \cap \{t = 0\}$. Comme $\Box u = 0$ et $u|_{\partial X} = 0$, on a $WF_b(u) \subset \Sigma_b$, et on peut donc se restreindre aux $\rho \in \Sigma_b$. Compte tenu de l'hypothèse de contrôle géométrique, le résultat est alors conséquence d'un théorème de propagation H^1 sur les rayons, et d'un lemme de relèvement aux points non diffractifs.

THÉORÈME 2 (R. Melrose, J. Sjöstrand). *Soit u distribution prolongeable solution de $\Box u = 0$ dans X, $u|_{\partial X} \in H^1$. Si $\rho \in \Sigma_b$, et $u \in H^1_\rho$, on a $u \in H^1_{\rho'}$ en tout point ρ' du rayon passant par ρ.*

REMARQUE. Le problème mixte étant bien posé dans H^1 pour l'équation des ondes avec condition de Dirichlet, le Théorème 2 est conséquence directe du Théorème de propagation pour $WF_b(u)$, voit [**5**], [**1**].

LEMME DE RELÈVEMENT. *Soit u distribution prolongeable solution de $\square u = 0$ dans X et $\rho_0 \in \dot{T}^*\partial X$ un point non diffractif. Si $u|_{\partial X} \in H^1_{\rho_0}$ et $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial X} \in L^2_{\rho_0}$, alors on a $u \in H^1_{\rho_0}$.*

PREUVE : On choisit un système de coordonnées locales $(x_n, x') = x$ centré en $\pi(\rho_0)$ tel que $\overline{X} = \{x_n \geq 0\}$ et on remplace alors comme d'habitude $\square$ par un opérateur P de la forme $P = \partial_n^2 - Q(x_n, x', D_{x'})$. On supposera que $\rho_0 \in \mathcal{G}$, le cas $\rho_0 \in \mathcal{E} \cup \mathcal{H}$ étant plus simple. On a alors $\rho_0 = (0; \xi_0') \in \dot{T}^*\partial X$ et on pose $\beta_0 = (x_n = 0, x' = 0; \xi_n = 0, \xi' = \xi_0') \in \dot{T}^*\overline{X}$ qui est le point caractéristique au dessus de ρ_0. On note

(20)
$$K = \left\{(x,\xi) \in \dot{T}^*\overline{X},\, x = 0 \ \xi^2 = \xi_0'^2,\, \xi' = \lambda \xi_0',\, \lambda \geq 0\right\}$$

(21)
$$K' = \left\{\beta = (x,\xi) \in K,\, \xi' \neq 0\right\} ; K_\infty = K - K' = K \cap T^*_{\partial X}\overline{X}$$

(22)
$$K_0' = K' - \{\beta_0\} .$$

Soit $\underline{u}$ le prolongement de u par zéro à $x_n < 0$. On a par hypothèse :

(23) $$P\underline{u} = \varphi_0 \delta_{x_n=0} + \varphi_1 \delta'_{x_n=0} \text{ avec } \varphi_0 \in L^2_{\rho_0},\ \varphi_1 \in H^1_{\rho_0} .$$

Il en résulte par ellipticité :

(24) $$\underline{u} \in H^{3/2}_\beta \text{ pour } \beta \in K_0'$$

et par propagation des singularités, puisque ρ_0 est non diffractif :

(25) $$\underline{u} \in H^{1/2}_{\beta_0} .$$

Choisissons T_0 un o.p.d de degré 0, égal à Id près du fibré normal $T^*_{\partial X}\overline{X}$ (donc vérifiant la transmission) et à support près de $T^*_{\partial X}\overline{X}$ (donc ne rencontrant pas $\operatorname{Car} P$). Alors si $A(x_n, x', D_{x'})$ est un o.p.d tangentiel de degré d, à support assez près de ρ_0, on a d'après (23) et la théorie elliptique standard :

(26) $$A \cdot T_0\, \underline{u}|_{\pm x_n > 0} \in C^k\left(\pm x_n \geq 0 ; H^{1-k-d}(\partial X)\right) .$$

En choisissant $d = 1$ et en écrivant $A\underline{u} = AT_0\,\underline{u} + A(1 - T_0)\underline{u}$, on voit que le lemme de relèvement sera conséquence, d'après (26) et (24) de :

(27) $$\underline{u} \in H^1_{\beta_0} .$$

Soit donc C_1 un o.p.d de degré 1 elliptique en β_0, à support près de β_0, $C_1^\varepsilon = C_1 \cdot \theta(\varepsilon \langle |D| \rangle)$ avec $\theta \in C_0^\infty$, $\theta = 1$ près de l'origine une mollification usuelle de C_1. Soit alors R_1^ε, l'o.p.d de degré 1, à support près de la demi-bicaractéristique de P qui sort de $\overline{X}$, solution de $(R_1^\varepsilon)^* = -R_1^\varepsilon$ et de :

(28) $$P^* R_1^\varepsilon - R_1^\varepsilon P = (C_1^\varepsilon)^*(C_1^\varepsilon) \text{ (modulo régularisant uniforme en } \varepsilon) .$$

On a, par la propriété de support de R_1^ε :

(29) $(\underline{u},(P^* R_1^\varepsilon - R_1^\varepsilon P)\underline{u}) = 2\,\mathrm{Re}(P\underline{u}, R_1^\varepsilon \underline{u})$

$$= 2\,\mathrm{Re}\,(\varphi_0, R_1^\varepsilon \underline{u}|_{\partial X}) - 2\,\mathrm{Re}\,(\varphi_1, \partial_n R_1^\varepsilon \underline{u}|_{\partial X}) \ .$$

D'après (25), on sait a priori qu'on a :

(30) $\quad R_1^\varepsilon \underline{u} \in C^k\left(x_n, H^{-1-k}(\partial X)\right)$ (uniformément en ε)

et il suffit donc de prouver uniformément en ε :

(31) $\quad R_1^\varepsilon \underline{u}|_{x_n=0} \in L^2(\partial X) \quad \partial_{x_n} R_1^\varepsilon \underline{u}|_{x_n=0} \in H^{-1}(\partial X)$

puisque le WF de ces traces est concentré uniformément en ε près de ρ_0. A ce stade, on omet ε, toutes les constructions qui suivent étant uniformes en ε. On remarque alors que (31) sera conséquence de :

(32) $\quad R_1 \underline{u}|_{x_n<0} \in C^k\left(x_n \leq 0\,; H^{-k}(\partial X)\right) \quad k = 0,1$.

Par le théorème de division sur les symboles principaux, on a :

(33) $$R_1 = \widetilde{A}_1 + \partial_n \widetilde{A}_0 + S_{-1}P + R_0$$

où $\widetilde{A}_i = E_0 A_i$, A_i tangentiel de degré i, à support près de ρ_0, E_0, S_{-1}, R_0 o.p.d de degré respectifs $0,-1,0$, à support près de β_0, et $E_0 = \mathrm{Id}$ près (support A_i) $\cap$ Car P. (Voir figure)

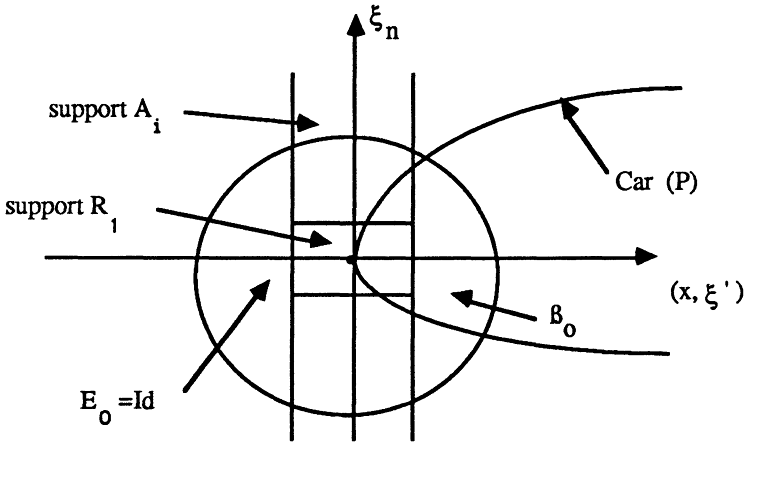
(34) $$R_1 \underline{u} = A_1 E_0 \underline{u} + \partial_n A_0 E_0 \underline{u} + v$$

avec $v = [E_0, A_1]\underline{u} + \partial_n [E_0, A_0]\underline{u} + S_{-1}(\varphi_0 \delta + \varphi_1 \delta') + R_0 \underline{u}$ donc d'après (25) on a $v \in C^k(x_n\,; H^{-k}(\partial X))$. On a aussi :

(35) $\quad A_1 E_0 \underline{u} = A_1 \underline{u} - A_1 T_0 \underline{u} + A_1 (E_0 - 1)(1 - T_0)\underline{u} + A_1 E_0 T_0 \underline{u}$

(36) $$\begin{aligned} \partial_n A_0 E_0 \underline{u} &= \partial_n A_0 \underline{u} - \partial_n A_0 T_0 \underline{u} \\ &\quad + \partial_n A_0 (E_0 - 1)(1 - T_0)\underline{u} + \partial_n A_0 E_0 T_0 \underline{u} \ . \end{aligned}$$

D'après (25), on a $A_1(E_0 - 1)(1 - T_0)\underline{u} \in C^k(x_n; H^{-k}(\partial X))$, $A_0(E_0 - 1)(1 - T_0)\underline{u} \in C^k(x_n, H^{1-k}(\partial X))$. Comme $E_0 T_0 \underline{u} \in C^\infty(\overline{X})$ et $A_1 \underline{u}|_{x_n<0} = A_0 \underline{u}|_{x_n<0} = 0$, (32) est conséquence de (26), et le lemme de relèvement est démontré.



§ 2. Stabilisation du problème de Neuman

Dans cette partie, on supposera que $\partial\Omega$ est réunion de deux composantes disjointes $\partial\Omega = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$, et on se donne une fonction positive $\lambda(x) \in C^\infty(\Gamma_1, \mathbb{R}_+)$.

On s'intéresse aux solutions du problème d'évolution dans $X_+ = X \cap (t > 0)$

$$(1) \qquad \begin{cases} \Box u = 0, \ u|_{\Gamma_0 \times \mathbb{R}_+^*} = 0, \ \dfrac{\partial u}{\partial n} + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1 \times \mathbb{R}_+^*} = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \in H^1_{0,\Gamma_0}, \qquad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \in L^2 \end{cases}$$

où $H^1_{0,\Gamma_0} = \Big\{ u_0 \in H^1(\Omega) \, ; \, u_0|_{\Gamma_0} = 0 \Big\}$.

Ce problème mixte est bien posé dans $t \geq 0$, et on a $u(t,x) \in C^0(\mathbb{R}_+, H^1_{0,\Gamma_0}) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2)$.

Pour tout $t > 0$, on a $\sqrt{\lambda} \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1 \cap (\lambda > 0)} \in L^2\left(]0,t[\times \Gamma_1 \cap (\lambda > 0)\right)$ et avec $E(t) = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int_\Omega |\nabla_x u|^2 + |u'_t|^2$

$$(2) \qquad E(0) - E(t) = \int_0^t \int_{\Gamma_1} \lambda \left| \frac{\partial u}{\partial t} \right|^2 .$$

Théorème 3. *On suppose qu'il existe $T > 0$ tel que $(\lambda > 0, T)$ contrôle géométriquement Ω. Il existe alors $C > 0$ telle que pour toutes données (u_0, u_1) on ait :*

$$(3) \qquad E(t) \leq \frac{1}{C} e^{-Ct} E(0)$$

i.e on a décroissance exponentielle uniforme de l'énergie.

Remarque. La partie Γ_0 du bord sur laquelle on a la condition de Dirichlet évite que les constantes soient solutions de (1). On peut aussi supprimer Γ_0 et raisonner modulo les constantes.

Preuve du théorème 3 : Soient t_1, t_2 deux instants positifs tels que $t_2 > t_1 > T$ et $\varepsilon \in]0, t_2 - t_1[$. Soit $H = H^1_{0,\Gamma_0} \times L^2$ l'espace d'énergie identifié aux solutions de (1),

$$(4) \quad G = \Big\{ u \in L^2(]0,t_2[\times \Omega) \, ; \, \Box u = 0 \, , \, u|_{\Gamma_0} = 0 \, , \, \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1} = 0 \, , \\ \text{et } \sqrt{\lambda} \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1 \cap \lambda > 0} \in L^2(]0,t_2[\times \Gamma_1 \cap \lambda > 0) \Big\}$$

muni de la norme :

$$(5) \qquad \|u\|_G = \|u\|_{L^2(]0,t_2[\times\Omega)} + \left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{L^2(]0,t_2[\times\Gamma_1\cap\lambda>0)}$$

et pour $s = 0, 1$:
(6)

$$F^s = \left\{u \in H^s(]t_1, t_1+\varepsilon[\times\Omega), \Box u = 0, u|_{\Gamma_0} = 0, \frac{\partial u}{\partial n} + \lambda\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1} = 0\right\}$$

muni de la norme :

$$(7) \qquad \|u\|_{F^s} = \|u\|_{H^s(]t_1,t_1+\varepsilon[\times\Omega)} \ .$$

Alors H, G, F^0, F^1 sont des espaces de Banach.

Soit i l'injection canonique de H dans G, qui est continue d'après (2), r l'application canonique de restriction de G dans F^0. Si $u \in G$, et $\rho \in \dot{T}^*\partial X|_{]0,t_2[\times(\lambda>0)}$, on a $\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{\Gamma_1} \in L^2_\rho$ donc $\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} \in L^2_\rho$ par la condition aux limites, d'où $u|_{\Gamma_1} \in H^1_\rho$, car $(\tau = 0) \subset \mathcal{E}$ et on a toujours $WF_b(u) \subset \Sigma_b$. Maintenant pour le problème (1), on a encore la propagation microlocale [voir[**5**], II] de la régularité H^1 sur les rayons vers les temps positifs. C'est ce fait qui simplifie l'étude de la stabilisation Neuman. Dans le problème de la stabilisation Dirichlet, il y a des singularités dans la région elliptique du bord, et la situation est plus compliquée.

Soit alors $\rho \in \Sigma_b \cap \{t = t_1\}$, γ_- le $\frac{1}{2}$ rayon d'extrémité ρ contenu dans $t \leq t_1$. Par hypothèse, il existe $\rho' \in \gamma_-$ non diffractif tel que $\rho' \in \dot{T}^*\partial X|_{]0,t_2[\times(\lambda>0)}$; par le lemme de relèvement et propagation on a donc $u \in H^1_\rho$. L'image de r est donc contenue dans F_1 et par le théorème du graphe fermé, r se factorise continuement à travers F_1. Par décroissance de l'énergie, il existe donc $C > 0$ tel que :

$$(8) \qquad \forall u \in H \quad E(t_2) \leq C\,\|i(u)\|_G^2$$

donc par (2) :

$$(9) \qquad \forall u \in H \quad \|u\|_H^2 \leq (1+C)\,\|u\|_G^2 \ .$$

Comme dans le § 1, en utilisant la compacité de l'injection de H dans $L^2(]0,t_2[\times\Omega)$, les espaces $N_{t_2} = \left\{u \in H \ ; \sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{(\Gamma_1\times\lambda>0)\times]0,t_2[} \equiv 0\right\}$ sont de dimensions finis, décroissant en t_2, donc invariant par ∂_t pour presque tout t_2, et si $v(x)e^{\mu t} \in N_{t_2}$ on a $v \equiv 0$ si $\mu \neq 0$ par unicité comme dans § 1 et $\Delta v = 0$, $v|_{\Gamma_0} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial n}\Big|_{\Gamma_1} = 0$ si $\mu = 0$ donc aussi $v = 0$ et donc $N_{t_2} = \{0\}$ pour tout $t_2 > T$. Il existe donc $C' > 0$ tel que :

$$(10) \qquad \forall u \in H \quad E(0) \leq C' \int_0^{t_2}\int_{\Gamma_1} \lambda \left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^2$$

d'où par (2) $E(t_2) \leq E(0)\left[1 - \frac{1}{C'}\right]$ et la décroissance exponentielle résulte alors de la propriété de semi-groupe.

§ 3. Stabilisation du problème de Dirichlet : un exemple de stabilisation instable

La situation ici est différente de celle du § 2. On se donne une hypersurface S lisse dans $\Gamma = \partial\Omega$, qui sépare le bord en deux ouverts Γ^-, Γ^+, de sorte que $\Gamma = \Gamma^- \cup S \cup \Gamma^+$ et une fonction continue positive $\lambda(x)$ sur Γ, avec $\lambda|_{\Gamma^-} \equiv 0$, $\lambda|_{\Gamma^+} > 0$ et C^∞. On suppose que près de chaque point de S, il existe un système de coordonnées locales (y, x), $y \in \mathbb{R}^{d-2}$, $x \in \mathbb{R}$ tel que Γ^+ soit défini par $x > 0$ et :

$$\text{(1)} \qquad \sqrt{\lambda} = a(y,x)\, x_+^{\alpha/2} \quad , \ a \in C^\infty \ , \quad a > 0 \ .$$

Ici, α est un réel strictement positif. Alors λ [resp. $\sqrt{\lambda}$] est un multiplicateur sur $H^s(\partial\Omega)$ pour $|s| < \frac{1}{2} + \alpha$ $\left[\text{resp. } \frac{1}{2} + \frac{\alpha}{2}\right]$.

L'espace d'énergie des données de Cauchy sera :

$$\text{(2)} \qquad H = H^1(\Omega) \oplus L^2(\Omega)$$

et on posera $H_0 = \left\{(u_0, u_1) \in H \ ; \ u_0|_{\Gamma_-} = 0\right\}$.

On s'intéresse aux solutions du problème mixte :

$$\text{(3)} \qquad \begin{cases} \Box u = 0 \ \text{ dans } \ \Omega \times]0, \infty[\ \ ; \ \ \dfrac{\partial u}{\partial t} + \lambda \dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0 \\ u|_{t=0} = u_0 \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0} = u_1 \quad (u_0, u_1) \in H \ . \end{cases}$$

Ici, le générateur infinitésimal est l'opérateur A non borné sur H :

$$\text{(4)} \qquad \begin{cases} A(x_0, x_1) = (x_1, \Delta x_0) \\ D(A) = \left\{x = (x_0, x_1) \in H \ ; \ Ax \in H \ ; \ x_1|_\Gamma + \lambda \dfrac{\partial x_0}{\partial n}\Big|_\Gamma = 0\right\}. \end{cases}$$

On note $H_+^s(\Gamma) = \left\{u \in H^s(\Gamma) \, ; \, u|_{\Gamma^-} \equiv 0\right\}$. Alors pour $x = (x_0, x_1) \in D(A)$, on a $\dfrac{\partial x_0}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}$, $x_1|_\Gamma \in H_+^{1/2}$, et on obtient :

$$\text{(5)} \qquad \sqrt{\lambda} \frac{\partial x_0}{\partial n}|_\Gamma \in L_+^2, \ (Ax|x) = -\int_\Gamma \left|\sqrt{\lambda} \frac{\partial x_0}{\partial n}\right|^2$$

car il n'y a pas de distribution non nulle dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ à support dans S. On vérifie alors que A est maximal monotone. Pour toute donnée $(u_0, u_1) \in H$, il existe alors une unique solution de (3)

$$\text{(6)} \qquad u(t,x) \in C^0(\mathbb{R}_+ \ ; H^1) \cap C^1(\mathbb{R}_+, L^2)$$

et $(u, u_t') \in C^0(\mathbb{R}_+, H_0)$ si $(u_0, u_1) \in H_0$.

On a $\sqrt{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in L^2(]0,T[\times\Gamma)$ et

$$E(0)-E(T)=\int_0^T\int_\Gamma\left|\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial n}\right|^2 . \tag{7}$$

THÉORÈME 4. *On suppose $\alpha\in\,]0,1]$ et qu'il existe T tel que (Γ_+,T) contrôle géométriquement Ω. Il existe alors $C>0$ tel que pour toute donnée $(u_0,u_1)\in H_0$ on ait :*

$$E(t)\le\frac{1}{C}e^{-Ct}E(0) .$$

PREUVE : On choisit à nouveau $t_2>t_1>T$, $\varepsilon\in\,]0,t_2-t_1[$ et on pose :

$$G=\Big\{u\in H^{1-\delta}(]0,t_2[\times\Omega),\ \Box u=0\ \ \frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\ u|_{\Gamma_-}=0 \tag{8}$$
$$\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\in L^2(]0,t_2[\times\Gamma)\ ;\ u|_\Gamma\in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}\Big\}$$

avec $\delta\in\left]0,\dfrac{\alpha}{2}\right[$ de sorte que les conditions aux limites sont bien définies, et pour $s=1-\delta,1$

$$F^s=\Big\{u\in H^s(]t_1,t_1+\varepsilon[\times\Omega),\Box u=0,\ \frac{\partial u}{\partial t}+\lambda\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma=0,\ u|_{\Gamma_-}=0\Big\}. \tag{9}$$

On munit F^s de la norme H^s et G de la norme :

$$\|u\|_G=\|u\|_{H^{1-\delta}(]0,t_2[\times\Omega)}+\left\|\sqrt{\lambda}\frac{\partial u}{\partial n}\right\|_{L^2(]0,t_2[\times\Gamma)} \tag{10}$$

et on a toujours des applications continues :

$$H\overset{i}{\hookrightarrow}G\overset{r}{\to}F^{1-\delta} . \tag{11}$$

Pour $u\in G$, on a $u|_\Gamma\in H^{1/2}_{\mathrm{loc}}$ donc si $\rho\in\mathcal{E}$ on a bien $u\in H^1_\rho$. On a aussi $\dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_\Gamma=\sqrt{\lambda}\cdot\sqrt{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial n}\in L^2$ donc $u|_\Gamma\in H^1_\rho$ si $\rho\in\dot{T}^*\partial X\setminus(\tau=0)$. Comme $(\tau=0)\subset\mathcal{E}$, on peut encore appliquer le théorème de propagation de Melrose-Sjöstrand (avec condition de Dirichlet). Comme sur Γ_+ on a toujours localement $\dfrac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma\in L^2$ et $u|_\Gamma\in H^1$, on obtient donc à nouveau $\mathrm{Im}\,(r)\subset F_1$. Si on sait que G est un Banach, on conclut alors comme dans le § 2. $\Big[$Pour l'unicité on remarque que $v\in H^1(\Omega)$, $\Delta v=0$ $v|_{\Gamma_-}=0$ $\dfrac{\partial v}{\partial n}|_{\Gamma_+}=0\Rightarrow v=0\Big]$.

Vérifions que G est un Banach. Soit $\beta(t)\in C_0^\infty(]0,t_2[)$; il s'agit de vérifier qu'il existe C tel que :

$$\forall u\in G\quad \|\beta u|_\Gamma\|_{H^{1/2}(]0,t_2[\times\Gamma)}\le C\,\|u\|_G . \tag{12}$$

On posera $v = u|_\Gamma$, et $\theta = \sqrt{\lambda}\dfrac{\partial u}{\partial n} \in L^2$; on a $\|\theta\|_{L^2} \le \|u\|_G$, $\left\|\dfrac{\partial v}{\partial t}\right\|_{L^2} \le$ Cte $\|u\|_G$. On a :

$$\int_0^{t_2}\int_\Gamma \beta^2 \frac{\partial u}{\partial n} v = \int_0^{t_2}\int_{\Gamma_+} \beta\theta\frac{\beta v}{\sqrt{\lambda}} \ . \tag{13}$$

En effet, le membre de gauche est bien défini car pour $\rho \in \dot{T}^*\partial X \setminus (\tau = 0)$, $v \in H^1_\rho$, $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in H_\rho^{-\frac{1}{2}-\delta}$ et si $\tau = 0$, $v \in H^{1/2}_\rho$ donc $\dfrac{\partial u}{\partial n} \in H^{-1/2}_\rho$ par ellipticité. Le membre de droite est bien défini car pour $v \in H^{1/2}_+$ et $\alpha \le 1$, $\dfrac{v}{\sqrt{\lambda}} \in L^2$ et on a (par une inégalité de type Hardy) :

$$\left\|\frac{\beta v}{\sqrt{\lambda}}\right\|_{L^2(]0,t_2[\times\Gamma)} \le \text{Cte } \|\beta v\|_{H_+^{1/2}(]0,t_2[\times\Gamma)} \ . \tag{14}$$

Pour prouver (13) on écrit $v = \sum \varphi_\alpha v$ où φ_α est une partition de l'unité; lorsque le support de φ_α rencontre S, on écrit $\varphi_\alpha v = \lim\limits_\varepsilon (\varphi_\alpha v)_\varepsilon$où $(\varphi_\alpha v)_\varepsilon$ est le translaté de $\varepsilon > 0$ de $\varphi_\alpha v$ à l'intérieur de Γ_+, alors :

$$\iint \beta^2 \frac{\partial u}{\partial n}\varphi_\alpha v = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint \beta^2\frac{\partial u}{\partial n}(\varphi_\alpha v)_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint \beta\theta\frac{\beta(\varphi_\alpha v)_\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$$

et $\beta\dfrac{(\varphi_\alpha v)_\varepsilon}{\sqrt{\lambda}}$ est borné dans L^2. De (13), il résulte :

$$\left|\int_0^{t_2}\int_\Gamma \beta\frac{\partial u}{\partial n}\beta v\right| \le \text{Cte } \|u\|_G \ \|\beta v\|_{1/2} \ . \tag{15}$$

Si E_0 est un o.p. de degré 0 sur $]0,t_2[\times\Gamma$ qui localise près de $\tau = 0$, dont le symbole vaut 1 au voisinage de ($\tau = 0 \times$ support β) on en déduit :

$$\left|\int_\Gamma\int_0^{t_2} E_0\left(\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)E_0(\beta v)\right| \le \text{Cte } \left(\|u\|_G^2 + \|u\|_G \ \|\beta v\|_{1/2}\right) \ . \tag{16}$$

En effet, $\|(1-E_0)(\beta v)\|_{H^1} \le$ Cte $\|u\|_G$ et $\left\|\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right\|_{-\frac{1}{2}-\delta} \le$ Cte $\|u\|_G$. On estime à présent la norme $H^{1/2}$ de v près de $\tau = 0$ à l'aide de l'opérateur de Calderon dans la région elliptique.

Par la théorie elliptique, puisque $(\tau = 0) \subset \mathcal{E}$, il existe A_1 o.p.d de degré 1, à symbole positif, défini près de $\tau = 0$ tel que :

$$E_0\left(\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right) = E_0\beta(A_1 v) + g \tag{17}$$

où $g \in C^\infty$ et $\|g\|_{L^2} \le$ Cte $\|u\|_G$ et $E_0\beta A_1 = A_1 E_0\beta + A_0$, où A_0 est de degré 0. Comme $\|\beta v\|_{L^2} \le$ Cte $\|u\|_G$, on en déduit :

$$\int_\Gamma\int_0^{t_2} A_1(E_0\beta v)\cdot(E_0\beta v) \le \text{Cte } (\|u\|_G^2 + \|u\|_G \ \|\beta v\|_{1/2}) \ . \tag{18}$$

Comme βv est estimé dans H^1 aux points où $\tau \neq 0$ par $\|u\|_G$ (12) est conséquence de (18), ce qui achève la preuve du théorème 4.

Lorsque $\alpha > 1$, il n'y a pas décroissance uniforme de l'énergie.

PROPOSITION 3. *Soit $\alpha \in]1, \infty[$. Pour tout ε, T, il existe des données de Cauchy (u_0, u_1) dans H_0, telles que $E(0) = 1$ et $E(T) \geq 1 - \varepsilon$.*

PREUVE : On notera K l'opérateur de Poisson sur Ω :

$$\Delta K(f) = 0 \ ; \ K(f)|_\Gamma = f \tag{19}$$

et E_1 l'opérateur de Neumann :

$$E_1(f) = \partial_n K(f)|_\Gamma \ . \tag{20}$$

Alors E_1 est un o.p.d elliptique de degré 1, positif et on a :

$$\int_\Omega \nabla K(f) \overline{\nabla K(g)} = \int_\Gamma E_1(f) \bar{g} = \int_\Gamma f \overline{E_1(g)} \tag{21}$$

donc on définit un produit scalaire sur $H_+^{1/2}(\Gamma)$ par :

$$\langle f, g \rangle = \int_\Gamma f \overline{E_1(g)} \ . \tag{22}$$

On note $(f, g)_0 = \displaystyle\int_\Gamma f \bar{g}$ et on munit $H^{1/2}(\Gamma)$ du produit scalaire :

$$(f, g)_{1/2} = \int_\Gamma f \overline{E_1(g)} + (f, g)_0 \ . \tag{23}$$

Soit A l'opérateur non borné sur $H^{1/2}(\Gamma)$:

$$Af = \lambda E_1(f) \ ; \ D(A) = \left\{ f \in H^{1/2} \, ; Af \in H^{1/2} \right\} \ . \tag{24}$$

Alors A est fermé, pour $f \in D(A)$, on a $\sqrt{\lambda} E_1(f) \in L_+^2$ et :

$$(Af, f)_{1/2} = \int_\Gamma \left| \sqrt{\lambda} E_1(f) \right|^2 + (\lambda E_1(f), f)_0 \ . \tag{25}$$

Si $g \in D(A^*)$, on a $\left| \displaystyle\int_\Gamma E_1(f) \overline{\lambda E_1(g)} \right| \leq \text{Cte } \|f\|_{1/2}$ pour tout $f \in C_0^\infty(\Gamma)$, donc $D(A^*) = D(A)$ et pour μ assez grand, $\mu + A$ est maximal monotone. Notons e^{-tA} le semi-groupe engendré par A; On a $u(t, x) = e^{-tA} u_0(x)$ qui appartient à $C^0(\mathbb{R}_+, H_+^{1/2})$ si $u_0 \in H_+^{1/2}$. De plus, comme $\alpha > 1$, $[\lambda, \vec{X}]$ est borné sur $H^{1/2}$ si $\vec{X}$ est un champ de vecteur, et on a $u \in C^0(\mathbb{R}_+, H^s)$ si $u_0 \in H^s$ pour $s \in \left[0, \dfrac{3}{2}\right]$.

Fixons un point x_0 de S et soit z une équation locale de S, $(z > 0) = \Gamma^+$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\Gamma)$ à support près de x_0, égal à 1 près de x_0 et posons :

$$\omega_n(x) = \varphi(x) z_+^{1/n} \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{26}$$

$$v_n(t, x) = e^{-tA} \omega_n(x) \ . \tag{27}$$

Alors on a $\sup_n \|A^k\omega_n\|_{H^{1/2}} < +\infty$ pour tout $k > 0$ et $\lim_{n\to\infty} \|\omega_n\|_{H^{1/2}} = +\infty$, et pour $\delta > 0$ $\sup_n \|\omega_n\|_{H^{\frac{1}{2}-\delta}} < +\infty$. On a aussi :

$$(28) \qquad \int_\Gamma \left|\sqrt{\lambda} E_1 v_n(t,\cdot)\right|^2 = \frac{d}{dt}\frac{1}{2}\langle v_n(t), v_n(t)\rangle = \left\langle e^{-2tA} A\omega_n, \omega_n\right\rangle \ .$$

Comme $A\omega_n$ est borné dans $H^{\frac{1}{2}+\delta}$ pour $\delta \in]0,\alpha-1[$ on a :

$$(29) \qquad \sup_n \left\|\sqrt{\lambda} E_1 v_n(t,\cdot)\right\|_{L^2} \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}_+)$$

$$(30) \qquad \forall k > 0 \quad \partial_t^k v_n \text{ est borné dans } C^0(\mathbb{R}_+ \, ; H^{1/2})$$

$$(31) \qquad v_n \text{ est borné dans } C^0(\mathbb{R}_+, H^{\frac{1}{2}-\delta}) \text{ pour tout } \delta > 0 \ .$$

On peut alors construire $u_n(t,x)$, $t \in I =]1, T+4[$, $x \in \Omega$ solution de $\Box u_n = 0$, $u_n|_\Gamma = v_n$, avec $u_n \in H^1(I\times\Omega)$, u_n borné dans $H^{1-\delta}(I\times\Omega)$ et $\partial_t^k u_n$ bornés dans $H^1(I\times\Omega)$ pour tout $k \geq 1$.

Soit $\psi_n = \dfrac{\partial u_n}{\partial n} - E_1 v_n$; alors ψ_n est borné dans $C^k_{\mathrm{loc}}(I\, ; H^{3/2}(\Gamma))$ pour tout $k \geq 0$ (en effet la seule difficulté provient des points $\tau = 0$, et près de ces points on a $\dfrac{\partial u_n}{\partial n} = A_1 v_n$ où A_1 est un o.p.d de degré 1 tel que $(A_1 - E_1) = A_{-1} D_t^2$ où A_{-1} est de degré -1).

Soit θ_n solution de :

$$(32) \qquad \frac{\partial\theta_n}{\partial t} + \lambda E_1 \theta_n = \lambda\psi_n \quad \theta_n|_{t=2} = 0 \ .$$

Comme λ est un multiplicateur sur $H^{3/2}$ on a $\theta_n \in C^\ell\left([2,T+3], H_+^{\frac{3}{2}-\ell}(\Gamma)\right)$ pour $\ell = 0,1,2$ donc $K\theta_n = G_n \in H^2(]2,T+3[\times\Omega)$. Soit w_n solution de :

$$(33) \quad \Box w_n = -\Box G_n \, ; \partial_t w_n + \lambda\partial_n w_n|_\Gamma = 0 \, ; w_n = \frac{\partial w_n}{\partial t} = 0 \text{ en } t = 2 \ .$$

Alors w_n est borné dans $H^1(]2,T+3[\times\Omega)$. Posons :

$$(34) \qquad \phi_n = u_n - G_n - w_n \ .$$

On a $\Box\phi_n = 0$, $\partial_t\phi_n + \lambda\partial_n\phi_n|_\Gamma = 0$, $\phi_n|_{\Gamma^-} = 0$ et $\sqrt{\lambda}\dfrac{\partial\phi_n}{\partial n}$ est borné dans $L^2(]2,T+3[\times\Gamma)$ car G_n est borné dans H^2, $\sqrt{\lambda}\dfrac{\partial u_n}{\partial n} = \sqrt{\lambda}\psi_n + \sqrt{\lambda}E_1 v_n$, et :

$$(35) \qquad E_w(t) - E_w(2) = -\int_2^t\int_\Gamma \left|\sqrt{\lambda}\frac{\partial w}{\partial n}\right|^2 - \int_0^{t_2}\int_\Omega w_t'\Box G_n \ .$$

Comme :

$$(36) \qquad E_{\phi_n}(2) - E_{\phi_n}(t) = \int_2^t\int_\Gamma \left|\sqrt{\lambda}\frac{\partial\phi_n}{\partial n}\right|^2$$

et que $\int_2^t E_{\phi_n}(s)\,ds \to \infty \ (n \to \infty, t > 2)$ puisque v_n est non borné dans $H^{1/2}$, on obtient la proposition 3 en posant :

$$(u_0, u_1) = [E_{\phi_n}(2)]^{-1} \, (\phi_n(2), \phi'_n(2)) \ .$$

□

Références

[1] C. BARDOS, G. LEBEAU, J. RAUCH : *Sharp sufficient conditions for the observation, Control and stabilization of waves from the boundary*, A paraître au SIAM.

[2] L. HÖRMANDER : *The analysis of linear partial differential operators*, Springer Verlag.

[3] G. LEBEAU : *Contrôle de l'équation de Schrödinger*, A paraître au Journal de Math Pures et Appliquées.

[4] J.L. LIONS : *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués*, Masson Collection RMA, Paris 1988.

[5] R. MELROSE ET J. SJÖSTRAND : *Singularities of boundary value problems, I, II*, C.P.A.M, 31 (1978), 35 (1982).

[6] D.L. RUSSEL : *Controlability and stabilization theory for linear partial diff. equation. Recent progress and open questions*, SIAM Rev.20 (1978).

Gilles LEBEAU

Centre de Mathématiques
Ecole Polytechnique

91128 PALAISEAU CEDEX