Séminaire Équations aux dérivées partielles – École Polytechnique

R. Coifman
P. L. Lions
Y. Meyer
S. Semmes

Compacité par compensation et espaces de Hardy

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1989-1990), exp. nº 14, p. 1-8
<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1989-1990____A16_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1989-1990

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

COMPACITE PAR COMPENSATION ET ESPACES DE HARDY

R. COIFMAN, P.L. LIONS, Y. MEYER et S. SEMMES

Exposé n°XIV

28 Novembre 1989

I Introduction

La méthode de compacité par compensation, introduite par L. Tartar ([15], [16]), F. Murat ([12], [13]), à rapprocher des travaux de J. Ball [1] sur l'élasticité non linéaire, a permis d'identifier des quantités non linéaires qui possèdent des propriétés remarquables de continuité faible. Ces quantités non linéaires interviennent dans de nombreux modèles d'équations aux dérivées partielles de la Mécanique des Milieux continus, de la Physique ou de la Géométrie. Ce phénomène de passage à la limite pour des convergences faibles - ou compacité faible - a de nombreuses applications et nous renvoyons le lecteur aux références ci-dessus pour un bref aperçu de celles-ci. L'interprétation proposée dans [15], [16], [12], [13] de ces phénomènes est basée sur des mécanismes de compensation algébriques et différentielles.

Nous avons établi dans [3] des résultats généraux que nous présentons ici (en partie) illustrant un phénomène de léger gain de régularité de ces quantités non linéaires par rapport à leur régularité apparente. Ces résultats de régularité permettent une meilleure compréhension des phénomènes évoqués ci-dessus, en tout cas le pensons-nous !, et surtout les précisent en renforçant le type de convergence concernée. En outre, ils entraînent divers résultats de régularité dans plusieurs problèmes de Géométrie, de Mécanique des Fluides ou pour les équations elliptiques.

Ce gain de régularité consiste à remplacer L^1 par l'espace de Hardy généralisé (introduit par E. Stein et G. Weiss [14]) que nous noterons $\mathcal{H}^1$. Rappelons deux définitions équivalentes de $\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N) &= \{f \in L^1(\mathbf{R}^N)/R_j f \in L^1(\mathbf{R}^N), 1 \in j \leq N\} \\ &= \{f \in L^1(\mathbf{R}^N)/\sup_{t>0} |f * h_t| \in L^1(\mathbf{R}^N)\}\end{aligned}$$

où $R_j = \frac{\partial}{\partial x_j}(-\Delta)^{-1/2}$ et $h_t = \frac{1}{t^N} h(\frac{\cdot}{t}), h \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^N), h \geq 0, \int_{\mathbf{R}^N} h dx = 1$. Nous donnons dans ce qui suit quelques exemples de nos résultats ainsi que des conséquences ou extensions de ceux-ci.

Signalons enfin que notre étude a été motivée par un résultat de S. Müller [10].

II L'exemple du Jacobien.

Théorème 1.— *Si* $N \geq 2, u_i \in W^{1,p_i}(\mathbf{R}^N)$ *avec* $1 < p_i < \infty$ *et* $\sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = 1 (i = 1, \cdots, N)$, *alors* $\det(\nabla u) \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$.

Remarques

1) On peut donner une version locale de ce résultat : il suffit de remplacer $W^{1,p_i}, \mathcal{H}^1$ par $W^{1,p_i}_{\text{loc}}, \mathcal{H}^1_{\text{loc}}$.

2) Le théorème 1 s'applique bien sûr au cas particulier où $u \in W^{1,N}(\mathbf{R}^N)^N$.

3) Si $N \geq 2, u_i \in W^{1,p_i}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ avec $1 < p_i < \infty, \sum_{i=1}^N \frac{1}{p_i} = 1 (i = 1, \cdots, N)$, et si $\det(\nabla u) \geq 0$ alors d'après le théorème 1 on déduit

$$\det(\nabla u) \log(1 + \det(\nabla u)) \in L^1_{\text{loc}}, \tag{1}$$

et on retrouve ainsi (en l'étendant légèrement) le résultat de S. Müller [10].

4) Sous les hypothèses du théorème 1, on déduit que $\det(\nabla u) \in W^{-1,N'}(\mathbf{R}^N)$, résultat dû à L. Tartar [17] - voir aussi H. Wente [18] pour un résultat antérieur si $N = 2$ et H. Brézis et J.M. Coron [2].

5) Sous les hypothèses du théorème 1 en suposant de plus que $N = 2$, on considère la solution p ("nulle à l'infini") de

$$-\Delta p = \det(\nabla u) \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}'(\mathbf{R}^2) \ . \tag{2}$$

En fait, le raisonnement ci-dessous prouve qu'il existe une unique solution $p \in C_0(\mathbf{R}^2)$. D'après le théorème 1 et le fait que R_j envoie $\mathcal{H}^1$ dans $\mathcal{H}^1$, on voit que

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^2), 1 \leq i, j \leq 2 \ . \tag{3}$$

Et ceci implique en particulier

$$p \in \mathcal{F}L^1(\mathbf{R}^2) \ , \tag{4}$$

et on retrouve ainsi un résultat de L. Tartar [17].

III La Pression en Mécanique des Fluides.

Motivé par les résultats de L. Tartar [17], nous présentons le

Théorème 2.— *Si $N \geq 2$ et si $u \in W^{1,2}(\mathbf{R}^N)^N$ vérifie* $\mathrm{div} u = 0$ *alors*

$$\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N) \ . \tag{5}$$

Remarque : Le même résultat reste vrai localement.

Le théorème 2 permet de préciser la régularité des solutions faibles de l'équation de Navier-Stokes incompressible en trois dimensions : en effet, soit $u \in L^2(0,T;W^{1,2}(\mathbf{R}^3)^3)$, $p \in L^1(0,T;L^3(\mathbf{R}^3))(\forall T < \infty)$ vérifiant

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (u.\nabla)u - \nu\Delta u + \nabla p = 0, \mathrm{div} u = 0 \quad \text{dans} \quad]0,\infty[\times \mathbf{R}^3 \tag{6}$$

où $\nu \geq 0$. Alors, on déduit aisément de (6) la relation suivante

$$-\Delta p = \sum_{i,j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \quad \text{dans} \quad \mathbf{R}^3. \tag{7}$$

Cette équation elliptique permet d'obtenir grâce au Théorème 2 le

Corollaire 3.—

1) *Pour tous $1 \leq i,j \leq 3$, $\frac{\partial^2 p}{\partial x_i \partial x_j} \in L^1(0,T;\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^3))$ et en particulier $\nabla p \in L^1(0,T;L^{3/2,1}(\mathbf{R}^3))^3 (\forall T \in]0,\infty[)$.*
2) *∇p et $(u.\nabla)u \in L^2(0,T;\mathcal{H}^1(\mathbf{R}^3))^3 \quad (\forall T \in]0,\infty[)$.*
3) *Enfin, $u \in L^1(0,T;C_0)^3$ et si $\frac{\partial u_i}{\partial x_j}(0)$ est une mesure bornée sur $\mathbf{R}^3$ alors $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in L^\infty(0,T;L^1(\mathbf{R}^3))$ pour tous $1 \leq i,j \leq 3 \quad (\forall T \in]0,\infty[)$.*

Remarques : La régularité L^1 de ∇u est une conséquence immédiate du Théorème 2 et d'un argument de P. Constantin [3] tandis que la régularité $L^1(C_0)$ avait été obtenue par L. Tartar -voir C. Guillopé, C. Foias et R. Temam [6].

IV L'exemple du div-rot.

Théorème 4.— *Soient $N \geq 2, p \in]1,\infty[, E \in L^p(\mathbf{R}^N)^N, B \in L^{p'}(\mathbf{R}^N)^N$ vérifiant div $E = 0$, rot $B = 0$. Alors $E.B \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$.*

Remarque : Le résultat reste vrai localement auquel cas on peut se contenter de supposer que

$$\mathrm{rot} B \in W^{-1,r}_{\mathrm{loc}}, \mathrm{div} E \in W^{-1,s}_{\mathrm{loc}} \quad \text{avec} \quad r > p', s > p \tag{8}$$

et on obtient alors que $E.B \in \mathcal{H}^1_{\mathrm{loc}}$.

V Esquisses de deux démonstrations possibles.

De nombreuses (!) démonstrations sont possibles : nous renvoyons à [3] pour un exposé détaillé de toutes ces démonstrations (dont les domaines de validité varient). Nous nous contentons ici d'en illustrer deux. La première consiste en une simple intégration par parties et nous allons la détailler sur l'exemple du Théorème 4 : pour démontrer que $E.B \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$, il suffit d'estimer

$$|E.B * h_t(x)| = |\int (E.\nabla\pi)(y)\frac{1}{t^N}h(\frac{x-y}{t})dy|$$

où $B = \nabla\pi$ et $\pi \in W^{1,p'}(\mathbf{R}^N)$. En intégrant par parties et en utilisant le fait que div $E = 0$, on en déduit

$$|E.B * h_t(x)| \leq |\int E(y)[\pi(y) - \bar{\pi}]\frac{1}{t^{N+1}}\nabla h(\frac{x-y}{t})dy|$$

où $\bar{\pi}$ est un scalaire quelconque. Sans supposer la généralité, nous pourrons supposer que Supp $h \subset B_1$ et nous choisissons alors $\bar{\pi} = \fint_{B(x,t)} \pi dy$. On obtient ainsi :

$$|E.B * h_t(x)| \leq C_0 \fint_{B(x,t)} |E(y)| \quad |\frac{\pi(y) - \bar{\pi}}{t}|dy \tag{9}$$

où $C_0 = \|\nabla h\|_\infty$. En utilisant les inégalités de Hölder d'une part et de Sobolev-Poincaré d'autre part, on déduit de (9)

$$|E.B * h_t(x)| \leq C_1(\fint_{B(x,t)} |E|^\alpha dy)^{1/\alpha}(\fint_{B(x,t)} |\nabla\pi|^\beta dy)^{1/\beta}$$

où $1 \leq \alpha < p$, $1 \leq \beta < p'$ et $\frac{1}{\beta} + \frac{1}{\alpha} = 1 + \frac{1}{N}$. D'où en particulier

$$\sup_{t>0} |E.B * h_t| \leq C_1(\sup_{t>0} \fint_{B(x,t)} |E|^\alpha dy)^{1/\alpha}(\sup_{t>0} \fint_{B(x,t)} |B|^\beta dy)^{1/\beta} \tag{10}$$

et on conclut aisément grâce au théorème maximal.

Une autre démonstration possible consiste à appliquer le résultat de R. Coifman, R. Rochberg et G. Weiss [4] : nous allons illustrer ce type de démonstration sur l'exemple du Théorème 2. En effet, vérifier (5) revient à vérifier que $C = \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ opère sur VMO. Soit donc $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$, on introduit $f_i = (-\Delta)^{1/2}u_i$ de sorte que $f_i \in L^2(\mathbf{R}^N)^N$ et $\sum_{i=1}^N R_i f_i = 0$ et on considère

$$\begin{aligned}\int \varphi C dy &= \sum_{i,j=1}^N \int \varphi R_j f_i R_i f_j dy \\ &= \sum_{i,j=1}^N \{\int [\varphi, R_j] f_i R_i f_j dy + \int R_j(\varphi f_i) R_i f_j dy\}\end{aligned}$$

et par dualité on trouve

$$\int \varphi C dy = \sum_{i,j=1}^{N} \{ \int [\varphi, R_j] f_i R_i f_j dy \tag{11}$$

puisque $R_j^* = -R_j$ et $\sum_j R_j R_i f_j = R_i(\sum_j R_j f_j) = 0$. Et on conclut puisque, d'après [4], on a

$$\|[\varphi, R_j] f_i\|_{L^2} \leq C_1 \|\varphi\|_{BMO} \|f_i\|_{L^2}.$$

Cette démonstration montre aussi la continuité faible de C puisque $[\varphi, R_j]$ est compact dans L^2 si $\varphi \in VMO$.

En fait, ce type de démonstration montre également le

Théorème 5.— *Soient* $j \in \{1, \cdots, N\}, p \in]1, \infty[, f \in L^p(\mathbf{R}^N), g \in L^{p'}(\mathbf{R}^N)$. *Alors,* $(R_j f)g + f(R_j g) \in \mathcal{H}^1(\mathbf{R}^N)$.

En fait, il est clair que ce résultat dont l'esprit relève de la méthode de compacité par compensation est équivalent au résultat de [4].

VI Extensions

Les résultats précédents admettent diverses extensions. Tout d'abord, une étude algébrique générale est possible à la manière de [15], [16], [12], [13] et signalons que la forme la plus générale possible du résultat n'est pas encore connue (semble-t-il !) puisque nous avons besoin de l'hypothèse de rang constant non seulement pour des quantités multilinéaires d'ordre supérieur à 3 mais aussi pour des quantités bilinéaires. Cette hypothèse de rang constant (dans la terminologie de [12], [13]) est bien sûr vérifiée dans les exemples décrits ci-dessus mais elle l'est aussi dans les situations "géométriques" de produits de formes différentielles. Signalons un exemple où elle n'est pas vérfiée : soit $u \in L^N_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)^N$, on suppose que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \in W^{-1,r}_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N) \quad \text{avec} \quad r > N' \quad \text{pour} \quad 1 \leq i \neq j \leq N \ ; \tag{12}$$

et on considère $C = \prod_{i=1}^{N} u_i$. Sur cet exemple, il se trouve que l'on peut vérifier que $C \in \mathcal{H}^1_{\text{loc}}(\mathbf{R}^N)$ ce qui pourrait constituer une indication sur le fait que l'hypothèse de rang constant est superflue.

Une autre direction intéressante concerne les phénomènes séquentiels : si on considère des suites bornées de fonctions dans les résultats précédents, les quantités nonlinéaires (comme $E^n.B^n$ par exemple) sont bien sûr bornées dans $\mathcal{H}^1$ et convergent donc faiblement (à une sous suite près) pour la topologie faible $*$ de $\mathcal{H}^1$ vers la même quantité nonlinéaire formée à partir des limites faibles (en d'autres termes si : $E^n \overset{n}{\rightharpoonup} E \quad w - L^p, B^n \overset{n}{\rightharpoonup} B$ $w - L^{p'}$ avec div $E^n = 0$, rot $B^n = 0$, alors $E^n.B^n \rightharpoonup E.B \quad w.\mathcal{H}^1_*$). Une des conséquences de ce renforcement de la convergence faible au sens des distributions est la possibilité d'utiliser la compatibilité de la convergence faible $*$ dans $\mathcal{H}^1$ avec la convergence p.p. ou plus généralement la convergence au sens de Chacon (voir P. Jones et J.L. Journé [9], ou [3] pour plus de détails).

Enfin, nous voudrions conclure en illustrant une autre direction à l'aide de quelques exemples. L'idée est de "passer au-dessous de L^1" en permettant donc à u (où à E et B) d'être moins régulier (i.e. dans des classes L^p -par exemple - ne permettent pas de définir les quantités nonlinéaires étudiées dans L^1). Cette démarche et à rapprocher des résultats de B. Hanouzet et J.L. Joly [7], [8]. Il nous faut alors introduire les espaces

$$\mathcal{H}^p(\mathbf{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbf{R}^N) / \sup_{t>0} |f * h_t| \in L^p(\mathbf{R}^N)\},$$

pour $0 < p < 1$. De plus, si on considère les quantités $\det \nabla u, \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ou $E.B$, on voit que l'on peut formellement les écrire (sous forme conservatrice) au sens des distributions de la manière suivante : $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^N)$

$$\langle \det \nabla u, \varphi \rangle = -\langle u.Adj(\nabla u), \nabla \varphi \rangle, \tag{13}$$

où Adj désigne la matrice des cofacteurs,

$$\langle \sum_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i}, \varphi \rangle = \sum_{i,j} \langle u_i u_j, \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i \partial x_j} \rangle \ , \tag{14}$$

si div $u = 0$.

$$\langle E.B, \varphi \rangle = \langle \pi E, \nabla \varphi \rangle, \quad \text{si} \quad \mathrm{div} E = 0, B = \nabla \pi \tag{15}$$

$$\langle (R_j f)g + f(R_j g), \varphi \rangle = \int f.[\varphi, R_j] g dx \ . \tag{16}$$

Ces formulations ont un sens si $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)$ avec $p \geq \frac{N^2}{N+1}$ dans le cas de (13) ; $u \in L^2(\mathbf{R}^N)$ dans le cas de (14) ; $E \in L^p(\mathbf{R}^N), B \in L^q(\mathbf{R}^N)$ avec rot $B = 0$ et $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{N}$ dans le cas de (15) ; et $f \in L^p(\mathbf{R}^N), g \in L^q(\mathbf{R}^N)$ avec $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \leq 1 + \frac{1}{N}$.

On démontre alors le

Théorème 6.—

1) Si $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)^N$ avec $p > \frac{N^2}{N+1}$, alors $\det(\nabla u) \in \mathcal{H}^{p/N}(\mathbf{R}^N)$.

2) Si $u \in W^{1,p}(\mathbf{R}^N)^N$ avec $p > \frac{2N}{N+2}$, alors $\sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \in \mathcal{H}^{p/2}(\mathbf{R}^N)$.

3) Si $E \in L^p(\mathbf{R}^N)^N, B \in L^q(\mathbf{R}^N)^N$ et div $E = 0$, rot $B = 0$, $1 < p, q < \infty$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \frac{1}{N}$ alors $E.B \in \mathcal{H}^r(\mathbf{R}^N)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

4) Si $f \in L^p(\mathbf{R}^N), g \in L^q(\mathbf{R}^N)$ avec $1 < p, q < \infty, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \frac{1}{N}$ et si $1 \leq j \leq N$, alors $(R_j f)g + f(R_j g) \in \mathcal{H}^p(\mathbf{R}^N)$ avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$.

Remarques :

1) On peut également étudier les cas limite $p = \frac{N^2}{N+1}, \frac{2N}{N+2}$ ou $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ mais les espaces $\mathcal{H}^p$ doivent alors être remplacés par des espaces un peu plus compliqués.

2) Dans le cas de 3) (ou de 4)) on peut aussi considérer la situation où $E \in \mathcal{H}^p(\mathbf{R}^N), B \in \mathcal{H}^q(\mathbf{R}^N)$ avec $p > \frac{N}{N+1}, q > \frac{N}{N+1}$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} < 1 + \frac{1}{N}$. Alors, le résultat reste vrai avec $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ - on convient bien sûr que $\mathcal{H}^p(\mathbf{R}^N) = L^p(\mathbf{R}^N)$ si $p > 1$.

3) Les quantités det $\nabla u, \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}, E.B$ ont été définies au sens des distributions et appartiennent donc d'après le Théorème 6 à un espace de Hardy : elles possèdent donc une partie ponctuelle (qui est la limite p.p. des régularisées ou des sommes finies de leurs décompositions atomiques) qui dépendent continûment de u ou de E, B. Ces parties ponctuelles sont donc automatiquement égales p.p. aux quantités mesurables que l'on obtient en formant ponctuellement ces quantités. En particulier si les distributions $\det(\nabla u), \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ ou E.B sont des mesures, alors bien sûr les définitions ponctuelles sont alors les parties régulières de ces mesures et on retrouve ainsi un résultat récent de S. Müller [11].

Références

[1] J. Ball : Arch. Rat. Mech. Anal., **63** (1977), p.337-403.

[2] H. Brézis et J.M. Coron : Comm. Pure Appl. Math., **37** (1984), p.149-187.

[3] R. Coifman, P.L. Lions, Y. Meyer et S. Semmes : en préparation, voir aussi C.R. Acad. Sci. Paris, **309** (1989), p.945-949.

[4] R. Coifman, R. Rochberg et G. Weiss : Ann. Math., **103** (1976), p.611-635.

[5] P. Constantin : Remarks on the Navier-Stokes equations, preprint.

[6] C. Guillopé, C. Foias et R. Temam : J. Diff. Eq., **57** (1985), p.440-449.

[7] B. Hanouzet et J.L. Joly : C.R. Acad. Sci., **294** (1982), p. 745-747.

[8] B. Hanouzet et J.L. Joly : Exposé n°XIV, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz. Ecole Polytechnique, 1982.

[9] P. Jones et J.L. Journé : On weak convergence in $H^1(\mathbf{R}^d)$, preprint.

[10] S. Müller : Proc. A.M.S., **21** (1989), p.245-248.

[11] S. Müller : Det=det- A remark on the distributional determinant, preprint.

[12] F. Murat : Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa, **5** (1978), p.489-507 et **8** (1981), p.69-102.

[13] F. Murat : In International Meeting on Recent Methods in Nonlinear Analysis, Rome, May 8-12 1978, Pitagore Edit., Bologne, 1979.

[14] E. Stein et G. Weiss : Acta Math., **103** (1960), p.25-62.

[15] L. Tartar : In Nonlinear Analysis and Mechanics, Heriot-Walt Symposium, IV Pitman, Londres, 1979.

[16] L. Tartar : In Systems of Nonlinear Partial Differential Equations, Reidel, Dordrecht, 1983.

[17] L. Tartar : In Macroscopic modelling of turbulent flows, Lecture Notes in Physics, 230, Springer, Berlin, 1985.

[18] H. Wente : Manuscripta Math., **11** (1974), p. 141-157.

R. Coifman
Department of Mathematics
Yale University
New Haven
CT 06520

P.L. Lions
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris cedex 16

Y. Meyer
CEREMADE
Université Paris-Dauphine
Place de Lattre de Tassigny
75775 Paris cedex 16

S. Semmes
Rice University
Houston
Texas 77251