SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

P. GÉRARD

Compacité par compensation et régularité 2-microlocale

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 6, p. 1-18

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A6_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

COMPACITE PAR COMPENSATION ET REGULARITE 2-MICROLOCALE.

P. GERARD

Exposé n°VI

20 Décembre 1988

Introduction

Un problème très courant en analyse non linéaire consiste à "passer à la limite" dans une expression non linéaire $F(u_\varepsilon)$ connaissant sur la suite (u_ε) les informations minimales qui assurent que (u_ε) et $(F(u_\varepsilon))$ admettent une limite au sens des distributions (ce qui, à l'extraction près d'une sous-suite, équivaut à certaines estimations à priori). Dans ce cadre, la situation la plus simple - et d'un intérêt tout particulier en raison des nombreux exemples tirés de la Physique - est le cas d'une suite (u_ε) localement bornée dans L^2, et d'une fonction F quadratique. On sait alors que, pour que

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{entraîne} \quad F(u_\varepsilon) \rightharpoonup F(u), \tag{0.1}$$

une condition suffisante - et essentiellement nécessaire si on ne suppose rien de plus sur (u_ε) et F - est que u_ε reste dans un compact de L^2_{loc} pour la topologie forte, ou, ce qui revient au même, que $u_\varepsilon \rightarrow u$ pour cette même topologie. Pour aller plus loin, on dispose actuellement de deux types d'ingrédients. D'une part la "compacité par compensation", due à F. Murat [M] et L. Tartar [T], qui assure que, si (u_ε) est solution d'un système d'équations aux dérivées partielles à coefficients constants avec lequel la forme quadratique F vérifie une condition de compatibilité, alors (0.1) a lieu. D'autre part, (0.1) peut être obtenue si F fait intervenir une moyenne de u_ε sur un groupe de variables par rapport auquel le sytème d'équations aux dérivées partielles dont (u_ε) est solution, varie suffisamment. Ce dernier outil, plus récent, a été introduit par F. Golse, P.L. Lions, B. Perthame, R. Sentis, et a permis de traiter de nombreux problèmes issus de la Cinétique Physique (voir par exemple [BGPS], [Go], [DPL1,2]).

Nous souhaitons ici donner un cadre général à ces deux outils. L'argument principal consiste en une généralisation microlocale des mesures de défaut de compacité dont P.L. Lions [L] a montré l'intérêt dans ce type de problèmes (dans un cadre légèrement différent, puisque sa méthode de concentration-compacité concerne des suites de solutions de problèmes elliptiques, mais avec des nonlinéarités F plus fortes). Nous obtenons ainsi un théorème de compacité par compensation à coefficients variables et un théorème de moyennisation optimal.

Note. Nous avons très récemment appris que L. Tartar venait d'obtenir indépendamment le même résultat d'existence d'une mesure de défaut microlocale (Proposition Définition 1.2) et qu'il l'avait appliqué à certains problèmes d'homogénéisation.

1. Mesure de défaut de compacité microlocale.

- Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^n$.

Pour une suite bornée (u_ε) de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, on dispose d'un critère simple de (relative) compacité dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$:

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \sup_\varepsilon \int |(\varphi u_\varepsilon)(x+h) - (\varphi u_\varepsilon)(x)|^2 dx \underset{h\to 0}{\to} 0 \ ,$$

ou encore, en utilisant la transformation de Fourier,

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega), \sup_\varepsilon \int_{|\xi|\geq R} |\widehat{\varphi u}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \underset{R\to+\infty}{\to} 0 \ . \tag{1.1}$$

La formule (1.1) permet de microlocaliser cette notion, suivant la

Définition 1.1.— *Soit $(x_0,\xi_0) \in T^*\Omega \setminus 0$. On dit que (x_0,ξ_0) n'appartient pas au front d'onde de compacité de la suite (u_ε) (noté $WF_c(u_\varepsilon)$), ou encore que u_ε reste dans un compact de L^2 près de (x_0,ξ_0), s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ non nulle en x_0 et un voisinage conique Γ de ξ_0 tels que*

$$\sup_\varepsilon \int_{|\xi|\geq R, \xi\in\Gamma} |\widehat{\varphi u}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \underset{R\to+\infty}{\to} 0 \ . \tag{1.2}$$

- Il est aisé de vérifier que $WF_c(u_\varepsilon)$ a toutes les bonnes propriétés d'un front d'onde (action des opérateurs pseudodifférentiels, des opérateurs intégraux de Fourier, propagation des singularités) et qu'en particulier $(x_0,\xi_0) \notin WF_c(u_\varepsilon)$ si et seulement s'il existe un opérateur pseudodifférentiel classique $\chi(x,D)$ elliptique d'ordre 0 en (x_0,ξ_0) tel que la suite $(\chi(x,D)u_\varepsilon)$ soit relativement compacte dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

- L'originalité d'une régularité aussi faible que la compacité est que le défaut de régularité peut être rendu **quantitatif**. Ce fait est bien connu dans le cadre de la régularité locale (non microlocale). Rappelons-en le principe. Quitte à extraire une sous-suite, on peut supposer que u_ε converge vers $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega)$ pour la topologie faible. Alors les $|u_\varepsilon - u|^2$ forment une suite bornée de fonctions positives localement intégrables sur Ω, donc (quitte à extraire à nouveau une sous-suite) convergent vaguement vers une mesure de Radon positive sur Ω, appelée mesure locale de défaut de la suite (extraite) (u_ε). Une telle mesure a été utilisée de façon systématique par P.L. Lions dans sa méthode de concentration compacité ([L]). On prend l'habitude de ne raisonner que sur des sous-suites de (u_ε) admettant une telle mesure, étant entendu que, s'il en est besoin, on vérifie trivialement que le support singulier de la suite entière (u_ε) est la réunion des supports des mesures de défaut ainsi obtenues.

- La proposition suivante généralise cette notion au cadre microlocal, et au cas d'une suite de fonctions à valeurs vectorielles dont on peut prendre en compte la polarisation.

Proposition-Définition 1.2.— *Soit* (u_ε) *une suite bornée de* $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$. *Il existe une sous-suite, notée encore* (u_ε), *convergeant faiblement vers* $u \in L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$, *et une mesure de Radon* μ *sur* $S^*\Omega$ *(fibré en sphères au-dessus de* Ω*) à valeurs dans les matrices hermitiennes positives* $N \times N$, *telles que, pour tout opérateur pseudodifférentiel* A *classique d'ordre* 0, *à valeurs dans les matrices* $N \times N$, *dont le noyau est à support compact, on ait, si* $a = a(x, \xi)$ *est le symbole principal de* A,

$$\lim_{\varepsilon}(A(u_\varepsilon - u), (u_\varepsilon - u)) = \int_{S^*\Omega} tr(a(x,\xi)\mu(dxd\xi)) \tag{1.3}$$

(tr désigne l'application trace sur les matrices $N \times N$*). La mesure* μ *est entièrement caractérisée par la relation (1.3), et appelée mesure de défaut de compacité microlocale pour la suite extraite* (u_ε).

Démonstration. Compte tenu de la séparabilité de $C_0^\infty(S^*\Omega, M_N(\mathbf{C}))$, on se ramène classiquement au lemme suivant :

Lemme 1.3.— *Soit* (u_ε) *une suite bornée de* $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ *convergeant faiblement vers* u, *et soit* A *comme dans la proposition ci-dessus. On suppose que le symbole* a *de* A *est à valeurs dans les matrices hermitiennes* ≥ 0. *Alors*

$$\liminf_{\varepsilon} \operatorname{Re}(A(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u) \geq 0 \quad \textit{et} \quad \lim \operatorname{Im}(A(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u) = 0$$

Preuve du lemme 1.3. L'inégalité de Gårding précisée (voir [H]) et le calcul symbolique pseudodifférentiel assurent qu'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ et $C > 0$ telles que

$$\operatorname{Re}(A(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u) \geq -C\|\varphi(u_\varepsilon - u)\|^2_{-1/2}, |\operatorname{Im}(A(u_\varepsilon - u), u_\varepsilon - u)| \leq C\|\varphi(u_\varepsilon - u)\|^2_{-1/2}$$

où $\|.\|_s$ désigne la norme Sobolev $H^s(\mathbf{R}^n)$.

L'injection compacte de $L^2_{\text{comp}}(\mathbf{R}^n)$ dans $H^{-1/2}(\mathbf{R}^n)$ permet d'achever la démonstration. □

- Soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ admettont une mesure de défaut de compacité microlocale μ. Nous dressons ci-dessous les propriétés élémentaires de μ.

(1.4) $tr(\mu)$ est une mesure de Radon positive sur $S^*\Omega$, qui permet d'étudier le défaut de compacité microlocale de la suite (u_ε) sans tenir compte de la polarisation. (voir la formule (1.3) dans le cas où a est scalaire). La projection de $tr(\mu)$ sur Ω est la mesure locale de défaut de la suite (u_ε).

(1.5) Le support de μ et le support de $tr(\mu)$ coincident avec $WF_c(u_\varepsilon)$ (du moins sa projection sur $S^*\Omega$).

(1.6) Si P est un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 à valeurs dans les matrices $M \times N$, alors la suite (Pu_ε) admet pour mesure de défaut

$$\mu^P = p\mu p^* \quad (\text{où} \quad p \quad \text{est le symbole principal de} \quad P)$$

En particulier, (Pu_ε) reste dans un compact si et seulement si $p\mu p^* = 0$, ou, ce qui revient au même car μ est positive, $p\mu = 0$.

(1.7) Si F est un opérateur intégral de Fourier scalaire d'ordre 0 associé à une transformation canonique homogène χ, la suite (Fu_ε) admet pour mesure de défaut microlocale

$$\mu^F = c\chi(\mu)$$

où c est le symbole principal de F^*F. (C'est une conséquence du théorème d'Egorov [H]). La mesure μ n'est donc invariante par transformation canonique qu'à un facteur multiplicatif près ; pour obtenir une mesure invariante, il suffit bien sûr de considérer des suites de demi-densités. En pratique, seule importe le plus souvent la classe de μ modulo la multiplication par une fonction continue non nulle.

(1.8) Le théorème de Darboux et (1.7) entraînent classiquement le théorème de propagation des singularités, qui ici prend la forme suivante :

Si P est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 de symbole principal p scalaire réel, tel que Pu_ε reste dans un compact de L^2, alors $\exp(tH_p)(\mu)$ est absolument continue par rapport à μ pour tout réel t.

Si l'on considère des suites de demi-densités, le facteur d'absolue continuité est relié au symbole sous-principal de P.

L'expression de la mesure associée à une suite de solutions du système de Maxwell en fonction de la mesure associée aux données de Cauchy est donnée à titre d'exemple à la fin de cet article. (formule (3.10)).

- Donnons maintenant quelques exemples simples, d'abord pour des suites scalaires. Si $x_0 \in \mathbf{R}^n$ et $\xi_0 \in S^{n-1}, \varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$, on vérifie aisément que

a) $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n/2}\varphi((x-x_0)/\varepsilon)$ admet pour mesure

$$\mu = (\int |\varphi(x)|^2 dx)\delta(x-x_0) \otimes d\xi,$$

où $d\xi$ est la mesure de Lebesgue sur S_ξ^{n-1}.

b) $u_\varepsilon(x) = e^{ix\xi_0/\varepsilon}$ admet pour mesure

$$\mu = dx \otimes \delta(\xi - \xi_0)$$

c) $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n/2}\varphi((x-x_0)/\varepsilon)e^{-ix.\xi_0/\varepsilon^k}$ admet pour mesure

$$\mu = (\int |\varphi(x)|^2 dx)\delta(x-x_0) \otimes d\xi \quad \text{si} \quad k \le 1$$

et

$$\mu = (\int |\varphi(x)|^2 dx)\delta(x-x_0 \otimes \delta(\xi-\xi_0) \quad \text{si} \quad k > 1.$$

- Pour déterminer la mesure d'une suite de fonctions vectorielles (u_ε), on doit calculer les termes d'interaction

$$\lim_{\varepsilon\to 0}(\chi(x,D)(u_\varepsilon^i - u^i), u_\varepsilon^j - u^j) = \int_{S^*\Omega} \chi(x,\xi)\mu_{ij}(dxd\xi)$$

(χ homogène de degré 0 en ξ). Dans cette situation (et dans bien d'autres) le résultat suivant peut être utile

Proposition 1.4.— *Soient (u_ε) et (v_ε) deux suites bornées de $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$, admettant des mesures de défaut μ et ν étrangères, avec $u_\varepsilon \to u$, $v_\varepsilon \to v$ au sens des distributions. Alors $u_\varepsilon.\bar{v}_\varepsilon \to u.\bar{v}$ au sens des distributions.*

Démonstration. On peut supposer $u = v = 0$, et (u_ε), (v_ε) à supports dans un compact fixe, de sorte que μ et ν sont à supports compacts. Il existe deux boréliens disjoints A et B dans $S^*\Omega$ tels que

$$\forall \varphi \in C(S^*\Omega), \int \varphi\mu = \int_A \varphi\mu, \int \varphi\nu = \int_B \varphi\nu.$$

Fixons $\delta > 0$. Alors il existe un fermé $F \subset A$ et un ouvert $G \supset A$ tels que

$$(tr\mu)(A \setminus F) \leq \delta, (tr\nu)(G) \leq \delta$$

Soit alors $\varphi \in C^\infty(S^*\Omega)$, à valeurs dans $[0,1]$ telle que $\varphi = 1$ sur F, $\varphi = 0$ en dehors de G. Notons ϕ un opérateur d'ordre 0, de symbole principal φ. On a

$$\limsup_\varepsilon |(u_\varepsilon, v_\varepsilon| \leq \limsup_\varepsilon |(u_\varepsilon, \phi v_\varepsilon)| + \limsup_\varepsilon |((1-\phi^*)u_\varepsilon, v_\varepsilon)|$$

Le premier terme est majoré par

$$\limsup_\varepsilon \|u_\varepsilon\| \limsup_\varepsilon \|\phi v_\varepsilon\| \leq C \int \varphi^2 tr\nu \leq C\delta$$

tandis que le second est majoré par

$$\limsup_\varepsilon \|(1-\phi^*)u_\varepsilon\| \limsup_\varepsilon \|v_\varepsilon\| \leq C \int (1-\varphi)^2 tr\mu \leq C\delta,$$

d'où le résultat en faisant tendre δ vers 0. □

2. Front d'onde de polarisation et compacité par compensation.

- Si P est d'ordre 0, de symbole principal scalaire p, et (u_ε) est telle que Pu_ε reste dans un compact de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$, alors on a classiquement

$$WF_c(u_\varepsilon) \subset \{(x,\xi), p(x,\xi) = 0\}. \tag{2.1}$$

(ce résultat découle d'ailleurs trivialement des assertions (1.5) et (1.6)). L'un des faits les plus marquants se rapportant à l'existence d'une mesure de défaut microlocale est que (2.1) admet une réciproque

Proposition 2.1.— *Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 de symbole principal scalaire p, et soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$. On suppose que $p = 0$ sur $WF_c(u_\varepsilon)$. Alors Pu_ε reste dans un compact de $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.*

Démonstration. On peut raisonner sur des suites extraites, donc supposer que (u_ε) admet une mesure de défaut μ. Alors l'hypothèse signifie que $p = 0$ sur le support de μ, soit exactement $p\mu = 0$, ce qu'il fallait démontrer, compte tenu de (1.6). □

Nous nous proposons de généraliser la proposition 2.1 à des opérateurs matriciels, en prenant en compte les annulations algébriques. Pour cela, nous avons besoin de la

Définition 2.2.— *Soit (u_ε) une suite bornée bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$. On dit qu'un point $(x_0, \xi_0, w) \in T^*\Omega \setminus 0 \times \mathbf{C}^N$ n'appartient pas au front d'onde de polarisation en compacité de la suite (u_ε) (noté $WF_c^{pol}(u_\varepsilon)$) s'il existe des opérateurs scalaires d'ordre 0 $A_1, \dots, A_N$, de symboles principaux $a_1, \dots, a_N$, tels que*

(i) $\sum_{j=1}^N a_j(x_0, \xi_0) w^j \neq 0$.

(ii) $\sum_{j=1}^N A_j (u_\varepsilon)^j$ *reste dans un compact de* $L^2_{\text{loc}}(\Omega)$.

- Un tel objet a été introduit dans le cadre des singularités C^∞ par N. Dencker [D]. On vérifie aisément que $WF_c^{\text{pol}}(u_\varepsilon)$ est conique en ξ, linéaire en w, et que

$$WF_c(u_\varepsilon) = \{(x, \xi) \in T^*\Omega, \exists w \neq 0, (x, \xi, w) \in WF_c^{\text{pol}}(u_\varepsilon)\}.$$

Si (u_ε) admet une mesure de défaut μ, et si l'on note

$$Z(\mu) = \{a \in C^\infty(S^*\Omega, \mathbf{C}^N), a\mu = 0\},$$

($a\mu$ est la mesure vectorielle définie par $(a\mu)_i = \sum_{j=1}^N a_j \mu_{ij}$) alors (la projection sur $S^*\Omega \times \mathbf{C}^N$ de) $WF_c^{pol}(u_\varepsilon)$ n'est autre que

$$\{(x, \xi, w), a(x, \xi).w = 0 \quad \forall a \in Z(\mu)\}. \tag{2.2}$$

L'assertion (1.6), et la caractérisation ci-dessus permettent en particulier de retrouver la formule classique

$$WF_c^{pol}(u_\varepsilon) \subset WF_c^{pol}(Pu_\varepsilon) \cup \{(x, \xi, w), p(x, \xi)w = 0\} \tag{2.3}$$

pour tout opérateur matriciel d'ordre 0 P, de symbole principal p. Nous pouvons maintenant énoncer la généralisation de la proposition 2.1. On désigne par $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire hermitien de $\mathbf{C}^N$.

Théorème 2.3.— *(de compacité par compensation). Soient (u_ε) une suite bornée de $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ convergeant faiblement vers u, et Q un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 à valeurs matricielles $N \times N$, de symbole principal q.*

(i) On suppose q hermitien et, pour tout $(x, \xi, w) \in WF_c^{pol}(u_\varepsilon)$,

$$\langle q(x, \xi)w, w \rangle \geq 0$$

Alors $\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega), \liminf_\varepsilon \int \varphi \langle Qu_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle dx \geq \int \varphi \langle Qu, u \rangle dx.$

(ii) On suppose que, pour tout couple d'éléments de $WF_c^{pol}(u_\varepsilon)$ du type $((x, \xi, w_1), (x, \xi, w_2))$,

$$\langle q(x, \xi)w_1, w_2 \rangle = 0$$

Alors $\lim_\varepsilon \langle Qu_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle = \langle Qu, u \rangle$ *au sens des distributions. (ou des mesures).*

Démonstration. L'assertion (ii) découle de l'assertion (i) en décomposant q en ses parties hermitiennes et antihermitiennes, puis en changeant q en $-q$. Prouvons donc l'assertion (i). On peut supposer que (u_ε) admet une mesure de défaut μ. Il s'agit alors de prouver que

$$tr(q\mu) \geq 0,$$

ce qui est une conséquence du lemme élémentaire suivant.

Lemme 2.4.— *Soient T un espace localement compact, μ une mesure de Radon sur T à valeurs dans les matrices hermitiennes positives $N \times N$, et Z le sous-espace de $C(T, \mathbf{C}^N)$ tel que*

$$\forall a \in Z, \quad a\mu = 0.$$

On note $W = \{(t,w) \in T \times \mathbf{C}^N, a(t).w = 0 \quad \forall a \in Z\}$, et on suppose donnée sur T une famille continue q de matrices hermitiennes $N \times N$ telle que

$$\forall (t,w) \in W, \quad \langle q(t)w, w\rangle \geq 0.$$

Alors $tr(q\mu) \geq 0$.

Preuve du lemme 2.4 : Fixons un compact K de T et $\varepsilon > 0$. Un argument élémentaire fondé sur la compacité de $K \times S^{2N-1}$ entraîne qu'il existe $C > 0$ et des éléments $a_1, \ldots, a_k$ de Z tels que

$$\forall (t,w) \in K \times \mathbf{C}^N, \langle q(t)w, w\rangle + C\sum_{j=1}^{k} |a_j(t)w|^2 \geq -\varepsilon |w|^2,$$

ce qui signifie que la famille

$$r(t) = q(t) + C\sum_{j=1}^{k} \bar{a}_j(t) \otimes \bar{a}_j(t) + \varepsilon$$

est une famille continue de matrices hermitiennes positives sur K. En remarquant que

$$\begin{aligned} tr(r\mu) &= tr(q\mu) + C\sum_{j=1}^{k} \langle a_j\mu, a_j\rangle + \varepsilon tr(\mu) \\ &= tr(q\mu) + \varepsilon tr(\mu) \end{aligned}$$

par hypothèse, il suffit de montrer que

$$tr(r\mu) \geq 0 \quad \text{sur} \quad K.$$

Quitte à ajouter ε à r, on peut la supposer définie positive sur K. Alors, près de chaque point t_0 de K, r est combinaison linéaire convexe à coefficients continus de formes hermitiennes définies positives indépendantes de t. (il suffit de prendre un repère affine). On est ainsi ramené au cas où r est constante, et, en la décomposant en carrés de formes linéaires, on obtient le résultat cherché. □

En appliquant la formule (2.3), on obtient comme corollaire un résultat qui généralise aux coefficients variables celui de L. Tartar [T] (voir aussi F. Murat [M] et B. Hanouzet J.L. Joly [HJ]).

Corollaire 2.5.— *Soit P un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 1 à valeurs dans les matrices $M \times N$, et soit Q un opérateur pseudodifférentiel d'ordre 0 à valeurs dans les matrices $N \times N$. On suppose que les symboles principaux p et q de P et Q vérifient $(p(x,\xi)w_1 = p(x,\xi)w_2 = 0) \Rightarrow \langle q(x,\xi)w_1, w_2\rangle = 0$. Alors, si $u_\varepsilon \rightharpoonup u$ dans $L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ faible et si Pu_ε reste dans un compact de $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^M)$,*

$$\langle Qu_\varepsilon, u_\varepsilon\rangle \to \langle Qu, u\rangle \quad \textit{dans} \quad \mathcal{D}'(\Omega).$$

Exemples.

a) L'exemple le plus classique est "à coeffients constants" : si $\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon$ sont deux suites de formes différentielles bornées dans L^2_{loc}, telles que $\alpha_\varepsilon \rightharpoonup \alpha$, $\beta_\varepsilon \rightharpoonup \beta$ et $d\alpha_\varepsilon$, $d\beta_\varepsilon$ restent dans des compacts de H^{-1}_{loc} alors $\alpha_\varepsilon \wedge \beta_\varepsilon \to \alpha \wedge \beta$ dans $\mathcal{D}'$. (Outre les auteurs précédemment cités, voir S. Kichenassamy [K] pour une démonstration différente, sur une variété compacte). Il suffit d'appliquer le corollaire à $u_\varepsilon = (\alpha_\varepsilon, \beta_\varepsilon), P = \begin{pmatrix} d & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}, (Q(\alpha,\beta),(\alpha,\beta)) = \alpha \wedge \beta$. La condition d'annulation se réduit alors à

$$\xi \wedge \alpha = \xi \wedge \beta = 0 \Longrightarrow \alpha \wedge \beta = 0.$$

b) Dans $\mathbf{R}^2$, on se donne 4 champs de vecteurs X_1, X_2, Y_1, Y_2 et (u_ε) une suite bornée de $L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2, \mathbf{C}^2)$ telle que

$$X_1 u^1_\varepsilon + X_2 u^2_\varepsilon \quad \text{et} \quad Y_1 u^1_\varepsilon + Y_2 u^2_\varepsilon$$

appartiennent à un compact de $H^{-1}_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}^2)$.
Alors, si $u^\varepsilon \rightharpoonup 0$,

$$\det(u^1_\varepsilon X_1 + u^2_\varepsilon X_2, u^1_\varepsilon Y_1 + u^2_\varepsilon Y_2) \to 0$$

au sens des distributions.

- Remarque sur la régularité des coefficients.

La méthode de démonstration permet également de traiter le cas de certains systèmes à coefficients continus. En effet, la proposition ci-dessous montre que la multiplication par une fonction continue est un opérateur microlocal du point de vue du défaut de compacité.

Proposition 2.6.— *Soit a une application continue sur Ω à valeurs dans les matrices $M \times N$, et soit (u_ε) une suite de mesure de défaut μ. Alors la suite (au_ε) admet $a\mu a^*$ pour mesure de défaut.*

Démonstration. Soit $\delta > 0$, et soit $b \in C^\infty$ approchant a à δ près en convergence uniforme. Alors la mesure de défaut de (bu_ε) est $b\mu b^*$, qui est proche de $a\mu a^*$ à $0(\delta)$ près. Par ailleurs, pour tout opérateur pseudodifférentiel A d'ordre 0 à noyau supporté dans un compact,

$$(Aau_\varepsilon, au_\varepsilon) - (Abu_\varepsilon, bu_\varepsilon) = ((a^*Aa - b^*Ab)u_\varepsilon, u_\varepsilon),$$

qui est majoré uniformément en ε par

$$C\|a^*Aa - b^*Ab\|_{L^2 \to L^2} = 0(\delta)$$

On termine la démonstration en faisant tendre δ vers 0. □

Il faut prendre néanmoins garde que la formule (2.3) n'est plus vraie pour l'action d'une matrice continue, pour la simple raison que l'ensemble

$$\tilde{Z}(\mu) = \{a \in C(S^*\Omega, \mathbf{C}^N), a\mu = 0\} \tag{2.4}$$

peut être beaucoup plus gros que

$$Z(\mu) = \{a \in C^\infty(S^*\Omega, \mathbf{C}^N), a\mu = 0\}$$

de sorte que

$$\widetilde{WF}_c^{\mathrm{pol}}(u_\varepsilon) = \{(x,\xi,w) \in S^*\Omega \times \mathbf{C}^N, a(x,\xi)w = 0\ \forall a \in Z^0(\mu)\} \tag{2.5}$$

puisse être strictement contenu dans $WF_c^{\mathrm{pol}}(u_\varepsilon)^{(*)}$.

Donnons un exemple très simple : la suite $u_\varepsilon(x) = (e^{ix/\varepsilon}, |x|^{1/2}e^{ix/\varepsilon})$ admet pour mesure de défaut la matrice

$$\mu = \begin{pmatrix} \sigma & |x|^{1/2}\sigma \\ |x|^{1/2}\sigma & |x|\sigma \end{pmatrix}, \quad \text{avec} \quad \sigma = dx \otimes \delta(\xi - 1)$$

et on a

$$\tilde{Z}(\mu) = \{(a_1, a_2) \in C(\mathbf{R} \times \{\pm 1\}, \mathbf{C}^2), a_1(x,1) + |x|^{1/2}a_2(x,1) = 0\}$$

et en particulier

$$\widetilde{WF}_c^{\mathrm{pol}}(u_\varepsilon)|_{x=0,\xi=1} = \mathbf{C} \times \{0\}$$

tandis que

$$Z(\mu) = \{(a_1, a_2) \in C^\infty(\mathbf{R} \times \{\pm 1\}, \mathbf{C}^2), a_1(x,1) + |x|^{1/2}a_2(x,1) = 0\}$$

et donc

$$WF_c^{\mathrm{pol}}(u_\varepsilon)|_{x=0,\xi=1} = \mathbf{C}^2.$$

On peut néanmoins redéfinir le front d'onde de polarisation par les formules (2.4) et (2.5), ce qui permet d'obtenir par exemple le résultat suivant.

Théorème 2.6.— *(Compacité par compensation à coefficients continus) Soient $a_1, \dots, a_n$ des applications continues sur Ω à valeurs dans les matrices $M \times N$, et soit q une application continue sur Ω à valeurs dans les matrices $N \times N$. On suppose que, pour tous $(x, \xi) \in S^*\Omega, (w_1, w_2) \in \mathbf{C}^{2N}$, on a*

$$(\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j(x) w_1 = \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j(x) w_2 = 0) \Rightarrow \langle q(x) w_1, w_2 \rangle = 0$$

Alors, pour toute suite (u_ε) convergeant faiblement vers u dans $L^2_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ et telle que $\sum_{j=1}^n \partial_j(a_j u_\varepsilon)$ reste dans un compact de $H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^M)$, la suite $\langle q u_\varepsilon, u_\varepsilon \rangle$ converge vers $\langle qu, u \rangle$ au sens des distributions.

Démonstration. D'après la proposition 2.6, la mesure de la suite $v_\varepsilon = (a_1 u_\varepsilon, \dots, a_n u_\varepsilon)$ n'est autre que

$$(a_1, \dots, a_n) \mu (a_1, \dots, a_n)^*.$$

Comme $\sum_{j=1}^n \partial_j v_\varepsilon^j$ reste dans un compact de $H^{-1}_{\text{loc}}(\Omega, \mathbf{C}^M)$, on en déduit

$$(\sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j) \mu = 0,$$

ce qui prouve que

$$\widetilde{WF}_c^{\text{pol}}(u_\varepsilon) \subset \{(x, \xi, w), \sum_{j=1}^{n} \xi_j a_j(x) w = 0\}.$$

Le reste de la démonstration se déduit du lemme 2.4. □

Notons que, même dans le cas elliptique, ce résultat n'est pas trivial :

Exemple : Soient $X_1, \dots, X_M$ des champs de vecteurs à coefficients continus qui engendrent l'espace tangent en tous points.

Si $X = \sum_{j=1}^n a_j(x) \partial_j$, on pose

$$\tilde{X} u = \sum_{j=1}^{n} \partial_j (a_j u)$$

Alors toute suite bornée (u_ε) de L^2_{loc} telle que $\tilde{X}_k u_\varepsilon$ reste dans un compact de H^{-1}_{loc} pour tout k, reste elle-même dans un compact de L^2_{loc}.

3. Mesure de défaut de régularité 2-microlocale.

Dans certains problèmes, il peut être utile de distinguer l'oscillation d'une suite bornée (u_ε) de $L^2_{loc}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ en fonction des variables : c'est le cas en particulier dans l'étude des équations de la Cinétique Physique, (Voir en particulier [BGPS], [Go], [DPL 1,2]) pour lesquelles on obtient des conditions suffisantes de passage à la limite dans des termes quadratiques, qui sont de nature différente par rapport à celles que nous venons d'étudier. Nous allons voir que, là encore, l'usage des mesures de défaut microlocales permet d'obtenir aisément des résultats optimaux. Introduisons d'abord deux définitions, que nous formulons, pour plus de simplicité, dans un cadre non intrinsèque.

Définition 3.1.— *On suppose donnée une décomposition $\Omega = \Omega' \times \Omega'', x = (x', x'')$, et on appelle V la sous-variété involutive de $T^*\Omega \setminus 0$ définie par $\{\xi'' = 0\}$. Soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{loc}(\Omega)$, et soit $(x_0, \xi_0) \in V$.*

(i) On dit que (u_ε) est (relativement) compacte modulo V en (x_0, ξ_0) s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ non nulle en x_0, et un voisinage conique Γ de ξ_0 dans $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\forall M > 0, \sup_\varepsilon \int_{\Gamma_{R,M}} |\widehat{\varphi u}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \underset{R \to +\infty}{\longrightarrow} 0, \quad \text{où} \quad \Gamma_{R,M} = \{\xi \in \Gamma, |\xi| \geq R, |\xi''| \leq M\}$$

(ii) On dit que (u_ε) est (relativement) V-compacte en (x_0, ξ_0) s'il existe $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ non nulle en x_0 est un voisinage conique Γ de ξ_0 dans $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ tels que

$$\sup_\varepsilon \int_{\xi \in \Gamma, |\xi''| \geq R} |\widehat{\varphi u}_\varepsilon(\xi)|^2 d\xi \to 0.$$

Remarques 3.2

a) La V-compacité et la compacité modulo V sont deux notions complémentaires l'une de l'autre. Si (u_ε) vérifie (i) et (ii) en (x_0, ξ_0), elle reste dans un compact de L^2 près de (x_0, ξ_0). Si (u_ε) vérifie (i) et (v_ε) vérifie (ii), alors il existe un opérateur pseudodifférentiel χ elliptique d'ordre 0 en (x_0, ξ_0) tel que

$$\langle \chi u_\varepsilon, v_\varepsilon \rangle \to \langle \chi u, v \rangle \quad \text{dans} \quad \mathcal{D}' \quad \text{si} \quad u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{et} \quad v_\varepsilon \rightharpoonup v.$$

b) Ces deux notions peuvent se définir pour une variété involutive V quelconque et sont invariantes par transformation canonique.

c) La V-compacité est la version naturelle de la conormalité dans le cadre compact. Par ailleurs, s'il existe $\alpha > 0$ tel que $((1 - \Delta_{x''})^{\alpha/2} u_\varepsilon)$ soit bornée dans L^2_{loc}, alors (u_ε) est V-compacte.

d) La compacité modulo V en (x_0, ξ_0) entraîne que $\forall \alpha > 0, ((1 - \Delta_{x''})^{-\alpha/2} u_\varepsilon)$ est compacte dans L^2 près de (x_0, ξ_0). Elle est par ailleurs réalisée dès qu'il existe $N > 0$ tel que $((1 - \Delta_{x''})^{-N/2} u_\varepsilon)$ soit compacte dans L^2 près de (x_0, ξ_0). La proposition ci-dessous donne une autre description

Proposition 3.3.— *Soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{loc}(\Omega)$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) (u_ε) est compacte modulo V en (x_0, ξ_0).

(ii) Il existe un voisinage ω de x''_0 dans Ω'' tel que $\forall\varphi \in C_0^\infty(\omega), (\int \varphi u_\varepsilon dx'')$ est compacte en (x'_0, ξ'_0).

Preuve : (i)$\Rightarrow$(ii) est classique, tandis que (ii)$\Rightarrow$(i) s'obtient en changeant φ en $\varphi e^{-ix''\xi''}$ pour tout ξ''. (voir [Gé] pour les détails).

Nous allons utiliser la proposition 3.3 pour mesurer le défaut de compacité modulo V d'une suite (u_ε). Si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega'')$, on peut extraire une sous-suite telle que $(\int \varphi u_\varepsilon dx'')$ admette une mesure de défaut μ_φ. L'espace $C_0^\infty(\Omega'')$ étant séparable, on peut extraire une sous-suite pour toutes les fonctions φ. La proposition suivante décrit la dépendance de μ_φ par rapport à φ.

Proposition 3.4.— *Soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{loc}(\Omega, \mathbf{C}^N)$. Il existe une sous-suite, notée encore (u_ε), convergeant faiblement vers u, et une mesure $\mathcal{K}$ (unique) sur $S^*\Omega'$ à valeurs dans $L^2_{loc}(\Omega'' \times \Omega'', M_N(\mathbf{C}))$ hermitienne positive (au sens des noyaux) telle que $\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega'')$, pour tout opérateur pseudodifférentiel A d'ordre 0 sur Ω', à valeurs dans les matrices $N \times N$, à noyau supporté dans un compact, de symbole principal a,*

$$\lim_\varepsilon (A(\int \varphi(u_\varepsilon - u)dx''), \int \varphi(u_\varepsilon - u)dx'')$$

$$= \int_{S^*\Omega'} \int\int_{\Omega''\times\Omega''} tr(a(x', \xi')\mathcal{K}(dx'd\xi', x''_1, x''_2))\varphi(x''_1)\overline{\varphi(x''_2)}dx''_1 dx''_2$$

Démonstration. On écrit

$$(A(\int \varphi(u_\varepsilon - u)dx''), \int \varphi(u_\varepsilon - u)dx'') = \int\int_{\Omega''\times\Omega''} K_\varepsilon(x''_1, x''_2)\varphi(x''_1)\overline{\varphi(x''_2)}dx''_1 dx''_2,$$

avec

$$K_\varepsilon(x''_1, x''_2) = (A(u_\varepsilon - u)(\cdot, x''_1), (u_\varepsilon - u)(\cdot, x''_2)),$$

qui, par l'inégalité de Schwarz, est borné dans $L^2_{loc}(\Omega'' \times \Omega'')$. Quitte à extraire une sous-suite, on peut donc supposer que K_ε converge faiblement dans $L^2_{loc}(\Omega'' \times \Omega'')$ vers un noyau $K(A)$. Comme pour la proposition 1.2, nous sommes ramenés à prouver l'inégalité suivante :

Lemme 3.5.— *Si a est hermitien ≥ 0, et si $H \in L^2_{comp}(\Omega'' \times \Omega'')$ est un noyau hermitien ≥ 0, alors*

$$\int\int K(A)(x''_1, x''_2)H(x''_1, x''_2)dx''_1 dx''_2 \geq 0$$

Preuve du lemme 3.5 On décompose H suivant une base hilbertienne de vecteurs propres

$$H(x''_1, x''_2) = \sum_j \lambda_j e_j(x''_1)\overline{e_j(x''_2)},$$

la convergence ayant lieu dans $L^2(\Omega'' \times \Omega'')$, les e_j étant à supports dans un compact fixe, et les λ_j sont ≥ 0 et satisfont à

$$\sum_j \lambda_j^2 < +\infty$$

Alors on peut écrire

$$\int\int K_\varepsilon(x_1'', x_2'')H(x_1'', x_2'')dx_1''dx_2'' = \sum_j (Av_\varepsilon^j, v_\varepsilon^j), \tag{3.1}$$

où $v_\varepsilon^j = (u_\varepsilon - u|e_j)$, et l'inégalité de Gårding précisée assure que

$$(Av_\varepsilon^j, v_\varepsilon^j) \geq -C\|\varphi v_\varepsilon^j\|_{-1/2}^2, \tag{3.2}$$

pour une certaine $\varphi \in C_0^\infty(\Omega'')$.

A j fixé, le second membre de (3.2) tend vers 0 avec ε ; par ailleurs, puisque $\lambda_j \to 0$, la série au second membre de (3.1) converge uniformément en ε, ce qui achève la démonstration. □

- Notons qu'un argument élémentaire de densité entraîne l'assertion suivante

(3.3) Soit A un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 sur Ω', à valeurs dans $L^2_{comp}(\Omega'' \times \Omega'', M_N(\mathbf{C}))$ à noyau supporté dans un compact. Soit $a = a(x', \xi', x_1'', x_2'')$ le symbole principal de A, de sorte que $a \in C_0^\infty(S^*\Omega', L^2_{comp}(\Omega'' \times \Omega''))$. Alors, si (u_ε) admet $\mathcal{K}$ pour mesure de défaut de compacité modulo V (au sens de la proposition 3.4).

$$\lim_\varepsilon \int\int dx_1''dx_2''(A(x_1'', x_2'')u_\varepsilon(\cdot, x_1''), u_\varepsilon(\cdot, x_2'')) = \int_{S^*\Omega'} Tr(a(x', \xi')\mathcal{K}(dx'd\xi'))$$

où Tr désigne la trace des opérateurs sur $L^2(\Omega'', \mathbf{C}^N)$, et $a(x', \xi')$ représente l'opérateur de Hilbert-Schmidt de noyau $a(x', \xi', x_1'', x_2'')$.

- Cette remarque conduit en particulier à l'analogue suivant de l'assertion (1.6).

Proposition 3.5.— *Si (u_ε) admet une mesure de défaut $\mathcal{K}$ modulo V, et si P est un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 sur Ω à valeurs dans les matrices $M \times N$, la mesure de défaut modulo V pour (Pu_ε) est égale à*

$$\mathcal{K}^P(dx'd\xi', x_1'', x_2'') = p(x', x_1'', \xi', 0)\mathcal{K}(dx'd\xi', x_1'', x_2'')p(x', x_2'', \xi', 0)^*.$$

Démonstration. Notons $P(x', x'', \xi', \xi'')$ le symbole complet de P. Alors le calcul symbolique pseudodifférentiel entraîne que

$$\forall\varphi \in C_0^\infty(\Omega''), \int \varphi P v dx'' = \int \varphi P_0 v dx'' + \int Q v dx''$$

où $P_0 = P(x', x'', D', 0)$ et Q est un opérateur pseudodifférentiel d'ordre -1.

On en déduit que

$$\int \varphi P(u_\varepsilon - u)dx'' = \int \varphi P_0(u_\varepsilon - u)dx'' + r_\varepsilon,$$

où r_ε est bornée dans H^1_{loc}, donc compacte dans L^2_{loc}, et donc que

$$\lim_\varepsilon (A\int \varphi P(u_\varepsilon - u)dx'', \int \varphi P(u_\varepsilon - u)dx'') = \lim_\varepsilon \int\int dx''_1 dx''_2 (B(x''_1, x''_2)u_\varepsilon(\cdot, x''_1), u_\varepsilon(\cdot, x''_2))$$

avec

$$B(x''_1, x''_2, x', D') = P_0(x''_2)^* A P_0(x''_1),$$

ce qui, compte tenu de l'assertion (3.3), achève la démonstration. □

- En particulier, la proposition 3.5 indique que la suite (Pu_ε) est compacte modulo v en (x_0, ξ_0) si et seulement si $p(x''_1)\mathcal{K}(x''_1, x''_2)p(x''_2)^* = 0$ (en abrégé) près de (x'_0, ξ'_0), pour (x''_1, x''_2) près de (x''_0, x''_0), ou encore (puisque $\mathcal{K}$ est hermitien ≥ 0)

$$p(x''_1)\mathcal{K}(x''_1, x''_2) = 0 \tag{3.4}$$

près de (x'_0, ξ'_0), pour x''_1 près de x''_0, pour tout x''_2.

- Nous avons maintenant tous les outils pour démontrer un théorème de “moyennisation”. Pour le motiver, notons que les résultats des sections précédentes montrent aisément que les seuls opérateurs pseudodifférentiels d'ordre 0 hypoelliptiques pour la compacité sont les opérateurs elliptiques. Le théorème suivant montre qu'en revanche, les opérateurs hypoelliptiques pour la compacité modulo V forment une large classe. Pour simplifier, nous étudions d'abord les opérateurs scalaires. Dans l'énoncé ci-dessous, m désigne la mesure de Lebesgue.

Théorème 3.6.— *Soit P un opérateur pseudodifférentiel sur Ω, classique d'ordre 0, de symbole principal p* **scalaire**. *Les conditions suivantes sont équivalentes :*
(i) Il existe un voisinage ω de (x'_0, ξ'_0) dans $S^*\Omega'$ et $r > 0$ tels que

$$m\{x'', |x'' - x''_0| \leq r, p(x', x'', \xi', 0) = 0\} = 0$$

(ii) Toute suite bornée (u_ε) de L^2_{loc} telle que (Pu_ε) soit compacte modulo V en (x_0, ξ_0) est compacte modulo V en (x_0, ξ_0).

Démonstration. Supposons (i). Si (Pu_ε) est compacte modulo V en (x_0, ξ_0), alors (3.4) donne

$$p(x', x''_1, \xi', 0)\mathcal{K}(dx'd\xi', x''_1, x''_2) = 0$$

pour (x', ξ') près de (x'_0, ξ'_0), x''_1 près de x''_0. Soit $\theta \in C_0(\mathbf{C})$ valant 1 près de 0. Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, et sur le même voisinage de (x_0, ξ_0) que ci-dessus,

$$\mathcal{K} = \theta(p/\varepsilon)\mathcal{K}$$

Si ε tend vers 0, le théorème de convergence dominée entraîne alors $\mathcal{K} = 0$ sur ce voisinage, ce qui démontre (ii).

- Supposons maintenant que (i) n'ait pas lieu. Soient alors (x'_k, ξ'_k) une suite convergeant vers (x'_0, ξ'_0), et $r_k \to 0$ tels que, si l'on note

$$N_k = \{x'', |x'' - x''_0| \leq r_k, p(x'_k, x'', \xi'_k, 0) = 0\},$$

alors $m(N_k) = m_k \neq 0$. On pose alors

$$u_j(x) = j^{-1/2}\varepsilon_j^{n/2} \sum_{k \leq j} e^{ik\xi'_k . x'/\varepsilon_j^2} \varphi(\frac{x' - x'_k}{\varepsilon_j}) 1_{N_k}(x''), \tag{3.5}$$

avec $\varphi \in C_0^\infty(\Omega''), \varepsilon_j \to 0$ assez vite pour que les supports des termes de la somme soient disjoints. On a en particulier

$$\int u_j dx'' = j^{-1/2}\varepsilon_j^{n/2} \sum_{k \leq j} m_k e^{ik\xi'_k \cdot x'/\varepsilon_j^2} \varphi(\frac{x' - x'_k}{\varepsilon_j}), \tag{3.6}$$

expression sur laquelle il est aisé de vérifier que

$$WF_c(\int u_j dx'') = \{(x'_k, \xi'_k), k \geq 1\} \cup \{(x'_0, \xi'_0)\}. \tag{3.7}$$

Notons également que, si l'on remplace u_j par ψu_j avec $\psi \in C_0^\infty(\Omega'')$ non nulle en x''_0, l'identité (3.6) n'est modifiée que par un nombre fini de termes. On en déduit que (3.7) est encore vraie pour ψu_j, donc que (u_j) n'est pas compacte modulo V en (x_0, ξ_0). Par ailleurs, on vérifie de même sur (3.5) que

$$WF_c(u_j) \subset \overline{\{(x'_k, x'', \xi'_k, 0), x'' \in N_k, k \geq 1\}},$$

et la proposition (2.1) entraîne que (Pu_j) est compacte. □

Remarques 3.7

- Le théorème 3.6 généralise les théorèmes de moyennisation de [GLPS], [DPL2]. On en trouvera une autre démonstration dans [Gé], utilisant la transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer ; par cette méthode, on y étudie également les gains exacts de régularité sur les moyennes si P est d'ordre > 0, en fonction de la décroissance de $m\{x'', |p(x', x'', \xi', 0)| \leq \varepsilon\}$ lorsque ε tend vers 0.

- La condition (i) est toujours vérifiée si $p(x'_0, \cdot, \xi'_0, 0)$ n'est pas plate en x''_0, mais l'est bien sûr dans d'autre cas (e^{-1/x''^2} en $x'' = 0$!).

- En combinant les remarques à la fin de la section 2 (proposition 2.6) et l'assertion (3.3), on obtient des généralisations du théorème 3.6 à des opérateurs à coefficients continus. Donnons un exemple :

Exemple : systèmes du type Vlasov-Maxwell.

Sur $\mathbf{R}^3_x \times \mathbf{T}^3_k$, on se donne une fonction

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(x,k)$$

réelle, continue, telle que $v(x,k) = \partial\mathcal{E}/\partial k$ soit L^∞, continue en x à valeurs L^2, et $div_x v(x,k) \in L^\infty$. On suppose en outre réalisée la condition géométrique

$$\forall (x,\xi) \in S^*\mathbf{R}^3, \forall \tau \in \mathbf{R}, m\{k \in \mathbf{T}^3, v(x,k)\xi = \tau\} = 0 \tag{3.8}$$

On s'intéresse au système d'équations suivant sur $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{T}^3$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + div_x(v(x,k)f) + div_k((E + v \wedge B)f) = 0 \\ \dfrac{\partial E}{\partial t} - \mathrm{rot} B = \displaystyle\int_{\mathbf{T}^3} v f dk \\ \dfrac{\partial B}{\partial t} + \mathrm{rot} E = 0 \\ div B = 0, div E = \displaystyle\int_{\mathbf{T}^3} f dk. \end{cases} \tag{3.9}$$

où $f = f(t,x,k), E = E(t,x), B = B(t,x)$ sont les inconnues, avec les données de Cauchy $f_0 \in L^\infty(\mathbf{R}^3 \times \mathbf{T}^3), E_0, B_0 \in L^2(\mathbf{R}^3)$.

Ce système est très proche du système de Vlasov-Maxwell dans $\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3$, étudié récemment par R. Di Perna et P.L. Lions ([DPL2]), avec deux différences :

- une simplification due à un espace de paramètres k compact.
- une généralisation à une large classe d'énergies $\mathcal{E}(x,k)$.

Comme dans [DPL2], on s'intéresse à la stabilité des solutions faibles de (3.9). (En modifiant légèrement la méthode, on montrerait qu'il existe de telles solutions faibles globalement en temps, mais c'est un peu plus technique : (voir [DPL2])). Soient donc $(f^\varepsilon, E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ une suite de solutions faibles de (3.9), à données $(f_0^\varepsilon, E_0^\varepsilon, B_0^\varepsilon)$ bornées dans $L^\infty \times L^2 \times L^2$. Si $f^\varepsilon, E^\varepsilon, B^\varepsilon$ sont régulières, il est alors facile de montrer que, pour tout temps $T > 0$, f^ε est bornée dans $L^\infty((0,T) \times \mathbf{R}^3 \times \mathbf{T}^3)$, E_ε et B_ε sont bornées dans $L^2((0,T) \times \mathbf{R}^3)$. Nous supposerons cette condition réalisée.

Nous prétendons alors que, si $f^\varepsilon \rightharpoonup f$, $E^\varepsilon \rightharpoonup E$, $B^\varepsilon \rightharpoonup B$, (f,E,B) est solution du système (3.9).

En effet, puisque E^ε et B^ε ne dépendent pas de k, il suffit de montrer que (f^ε) est compacte modulo $V = \{D_k = 0\}$. Pour cela, on remarque que

$$div_k((E^\varepsilon + v \wedge B^\varepsilon)f^\varepsilon) \quad \text{est borné dans} \quad H^{0,-1},$$

donc

$$(1-\Delta)^{-1/2}(\frac{\partial f^\varepsilon}{\partial t} + div_x(v f^\varepsilon)) \quad \text{est} \quad V-\text{compacte.}$$

En calculant la mesure $\mathcal{K}$ de cette suite en fonction de celle de f^ε, comme dans la démonstration du théorème 2.6, et en utilisant (3.8) comme dans la démonstration du théorème 3.6, on obtient le résultat.

Une question naturelle est alors de décrire les pertes d'énergie électromagnétique par passage à la limite, c'est-à-dire la mesure μ associée à $(E_\varepsilon, B_\varepsilon)$, connaissant la mesure μ_0 associée aux données de Cauchy. Pour cela, on remarque que $\int_{\mathbf{T}^3} v f^\varepsilon dk$ et $\int_{\mathbf{T}^3} f^\varepsilon dk$ sont compactes dans $L^2_{loc}(\mathbf{R}^3)$. On se ramène par ailleurs classiquement à l'équation des ondes

$$(\partial_t^2 - \Delta)E^\varepsilon = g^\varepsilon, (\partial_t^2 - \Delta)B^\varepsilon = h^\varepsilon,$$

où $(g^\varepsilon), (h^\varepsilon)$ sont compactes dans H^{-1}_{loc}.

En écrivant $(\partial_t^2 - \Delta) = (\partial_t + i\sqrt{-\Delta})(\partial_t - 1\sqrt{-\Delta})$, on se ramène à calculer la mesure de défaut de $(e^{\pm it\sqrt{-\Delta}} u_\varepsilon)$ en fonction de celle de (u_ε), ce qui s'obtient facilement par la méthode standard de l'optique géométrique ([H, théorème 23.1.4])

$$\nu_t^\pm = T_{\mp t}(\nu_0^\pm),$$

où

$$T_s(x, \xi) = (x + s\frac{\xi}{|\xi|}, \xi)$$

Appelons $\mu_0^\pm$ la mesure de $(E_0^\varepsilon \pm \frac{1}{i\sqrt{\Delta}}\mathrm{rot} B_0^\varepsilon, B_0^\varepsilon \mp \frac{1}{i\sqrt{-\Delta}}\mathrm{rot} E_0^\varepsilon)$. Alors la mesure μ de $(E^\varepsilon, B^\varepsilon)$ est finalement donnée par

$$\mu = \frac{1}{4}\sum_{+,-} T_{\mp t}(\mu_0^\pm)(dx d\xi) \otimes dt \otimes \delta(\tau \mp |\xi|). \tag{3.10}$$

- **Un théorème de "compacité par compensation et moyennisation".**

En combinant les preuves des théorèmes 2.3 et 3.6, on obtient enfin l'énoncé suivant :

Théorème 3.8.— *Soit (u_ε) une suite bornée de $L^2_{loc}(\Omega, \mathbf{C}^N)$ convergeant faiblement vers u. Soit P un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 sur Ω, à valeurs dans les matrices $M \times N$, de symbole principal p. On note $\Gamma(p)$ l'ensemble des $(x', \xi', w) \in S^*\Omega' \times \mathbf{C}^N$ tels que $\exists R > 0, m\{x'', |x''| \leq R, p(x', x'', \xi', 0)w = 0\} > 0$. Soit d'autre part Q un opérateur pseudodifférentiel classique d'ordre 0 sur Ω', à valeurs dans les matrices $N \times N$, dont le symbole principal q vérifie*

$$\langle q(x', \xi')w_1, w_2\rangle = 0$$

dés que $(x', \xi', w_1) \in \Gamma(p)$ et $(x', \xi', w_2) \in \Gamma(p)$. Alors, si (Pu_ε) est compacte modulo V,

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega''), \langle Q(\int \varphi u_\varepsilon dx''), \int \varphi u_\varepsilon dx''\rangle \to \langle Q(\int \varphi u dx''), \int \varphi u dx''\rangle$$

au sens des distributions sur Ω'.

Bibliographie

[BGPS] C. Bardos, F. Golse, B. Perthame, R. Sentis. The non-accretive radiative transfer equations ; existence of solutions and Rosseland approximation, J. Funct. Analysis 76 (1988).

[D] N. Dencker. On the Propagation of polarization sets for systems of real principal type, Journal of Functional Analysis 46, 351-372 (1982).

[DPL1] R.J. Di Perna, P.L. Lions. On the Cauchy problem for Boltzmann equations : global existence and wesk stability, à paraître aux Ann. Math.

[DPL2] R.J. Di Perna, P.L. Lions. Global weak solutions of Vlasov Maxwell systems, à paraître aux Comm. Pure and Ap. Math.

[Gé] P. Gérard. Moyennisation et régularité 2-microlocale, à paraître.

[Go] F. Golse. Remarques sur l'homogénéisation pour l'équation de transport, C.R.A.S. Paris 305 (1987), 801-804.

[HJ] B. Hanouzet, J.-L. Joly. Formes multilinéaires sur des sous-espaces de distributions, Séminaire Goulaouic-Meyer- Schwartz, 1981-1982, exposé n°14, Ecole Polytechnique, Palaiseau.

[H] L. Hormander. The Analysis of Linear Partial Differential Equations, Tomes III et IV, Springer, 1985.

[K] S. Kichenassamy. Compactness theorems for differential forms, à paraître aux Comm. Pure and Ap. Math.

[L] P.L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case, part 1 and 2, Rev. Mat. Iberoamericana, vol.1, n°1 et 2, 145-201 et 45-121 (1985).

[M] F. Murat. Compacité par compensation III, Ann. Sc. Normale Sup. Piso, 8, 69-102 (1981).

[T] L. Tartar. Compensated compactness and Applications to partial Differential Equations, in nonlinear analysis and mechanics, Henot-Watt symposium, vol.IV. 136-212, Res. Notes in Math. 39, Pitman, 1979.

Département de Mathématiques
Ecole Normale Supérieure
45, rue d'Ulm
75230 Paris cedex 05

Université de Paris-Sud
Mathématiques Bât. 425
91405 Orsay cedex