SÉMINAIRE ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES – ÉCOLE POLYTECHNIQUE

L. BOUTET DE MONVEL

Le théorème de l'indice relatif

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 19, p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE THEOREME DE L'INDICE RELATIF.

L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n°XIX

25 Avril 1989

LE THÉOREME DE L'INDICE RELATIF

L. Boutet de Monvel

Cet article résume un travail en collaboration avec B. Malgrange (à paraître dans Ann. Sc. E.N.S.), qui a pour objet d'établir, dans un cadre assez général, une formule de l'indice relative généralisant la formule de l'indice avec paramètres de M.F.Atiyah et I.M.Singer. Cette formule est une extension directe de celle de Atiyah et Singer, dans le contexte du théorème de finitude établi par Houzel et Schapira [H-Sch]. L' énoncé tient compte en outre des supports, comme dans [M], ce qui apporte une précision supplémentaire. Il est commode d'énoncer et de démontrer la formule d'indice dans le cadre des $\mathcal{D}$-modules, pour lesquels on dispose d'une notion d'image directe naturelle analogue à celle des faisceaux cohérents de la géométrie algébrique ou analytique, qui remplace avantageusement le système de De Rham relatif de la démonstration de Atiyah et Singer. L'idée de la démonstration de la formule de l'indice est, comme dans la preuve de Grothendieck du théorème de Riemann-Roch, ou dans la preuve publiée de la formule de l'indice de Atiyah et Singer, de prouver une forme d'invariance de la formule par rapport aux plongements et de tout plonger dans un espace plus simple (ici $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$) où la formule est plus facile à établir.

Les formules d'indice ont leur origine dans le théorème de Riemann-Roch de la géométrie complexe, en particulier sous la forme que lui ont donné Hirzebruch, et Grothendieck dans le cas relatif (cf. aussi [B-F-MPh] pour la formulation qui suit): pour X espace analytique (lisse ou projectif), $Z \subset X$ compact, on introduit le groupe de Grothendieck $K_Z^{an}(X)$ associé aux $\mathcal{O}_X$-modules cohérents à support dans Z. Il existe un homomorphisme canonique $K_Z^{an}(X) \to K_Z^{top}(X)$, où $K_Z^{top}(X)$ est le groupe d'Atiyah défini par les complexes de fibrés vectoriels topologiques exacts en dehors de Z. Le théorème de Riemann-Roch exprime que cet homomorphisme commute aux images directes propres (il commute aussi aux images inverses). Ce théorème doit être complété par la description de l'image directe K-théorique (elle est définie à partir du théorème de périodicité de Bott) et par une traduction cohomologique: par exemple le caractère de Chern définit un isomorphisme ch: $K_Z^{top}(X)\otimes\mathbb{Q}\to H_Z^{pair}(X,\mathbb{Q})$ permettant ainsi de traduire ce qui ne dépend pas de la torsion. Pour le théorème d'indice relatif on associe à un $\mathcal{D}_X$-module bien filtré M un symbole $[M]\in K_Z(T^*X)$ où $Z\supset \mathrm{car}M$; le théorème d'indice affirme que sous une hypothèse d'ellipticité relative et de propreté convenable, l'image directe f_+M par une application analytique f est bien filtrée (cohérente) (cette assertion est due à Ch.Houzel et P.Schapira), et le symbole $[f_+M]$ est l'image K-théorique de [M] (en un sens à préciser). La formule décrite ici est K-théorique; elle ne couvre pas les versions différentielles de la formule de l'indice; ni pour l'instant les vrais problèmes aux limites elliptiques avec conditions aux limites.

Nous nous contentons ici de décrire le théorème, sans entrer dans sa démonstration, pour laquelle nous renvoyons à [B-M]. Il y a plusieurs ingrédients: nous rappelerons au §1 les éléments utiles de K-théorie; il a été commode de tout décrire en termes de $\mathcal{D}$-modules et les rappels utiles sont faits au §2. Enfin la notion d'ellipticité relative et la description du théorème d'indice sont faits au §3.

§1. Rappels de K-théorie.

a. Définitions. Soit H un espace de Hilbert. On note $\mathrm{Fred}(H)\subset L(H)$ l'ensemble des opérateurs de Fredholm. Si X est un espace topologique on note $F_Z(X)$ le groupe des classes d'homotopie de fonction continues A: $X\to\mathrm{Fred}(H)$ telles que A soit inversible en dehors de Z. Parceque GL(H) est contractile (d'après N.Kuiper) $F_Z(X)$ s'identifie aussi au groupe des classes d'homotopie de familles continues d'opérateurs de Fredholm sur un fibré hilbertien (un tel fibré est trivial), ou au groupe des classes d'homotopie de complexes de Fredholm (ie. dont la cohomologie est de dimension finie en tout point) de fibrés hilbertiens, exacts en dehors de Z (deux tels complexes sont équivalents s'il existe une déformation du premier sur le second, exacte en dehors de Z). Si

(1.1) D: $\cdots \to \mathcal{H}^k \to \mathcal{H}^{k+1} \to \cdots$

est un tel complexe, on note $[D]_Z$ (ou simplement $[D]$) sa classe dans F_Z. On a toujours $[D]=[\delta(D)]$ si $\delta(D)$ est la famille d'opérateurs de Fredholm

(1.2) $\delta(D) = D\text{-}D^*$: $\bigoplus \mathcal{H}^{2k} \to \bigoplus \mathcal{H}^{2k+1}$.

Un complexe de fibrés vectoriels de rang fini sur X est un cas particulier de complexe de Fredholm (on peut toujours rajouter un complexe hilbertien exact de dimension infini). On a donc une application canonique du groupe $K_Z(X)$ (fibrés virtuels à support dans Z) dans $F_Z(X)$. Si Z est compact, ou si X est métrique de dimension finie[1], cette application est bijective (à condition d'accepter pour la définition de K_Z des fibrés localement mais non globalement de rang borné). On note dans ce cas $\mathrm{Ind}_Z(A) \in K_Z(X)$ l'élément correspondant à un complexe de Fredholm A exact hors de Z: $\mathrm{Ind}_Z(A)=[a]$ signifie qu'il existe une déformation B de A et un quasi-isomorphisme $a \to B$.

Produits. La somme et le produit tensoriel de complexes munissent $F(X)= F_X(X)$ d'une structure d'anneau et $F_Z(X)$ d'une structure de $F(X)$-module (on a $A \oplus B \sim A_0 B$, et $A \otimes B$ est un complexe de Fredholm, exact là A ou B l'est).

Pour $Z \subset Y \subset X$ (fermés) on a encore un produit $F_Z(Y) \otimes F_Y(X) \to F_Z(X)$ défini comme suit: si A (resp. B) est une famille continue d'opérateurs de Fredholm sur Y (resp. X) inversible hors de Z (resp. Y), on choisit un prolongement continu $\overline{A}$: $X \to L(H)$ de A; le produit $\overline{A} \otimes B$ est exact (donc Fredholm) hors de Y (comme B) et sur Y-Z (comme A); il est Fredholm sur Z comme A et B; l'ensemble des prolongements de A est connexe (convexe) donc la classe de $\overline{A} \otimes B$ ne dépend pas du choix de $\overline{A}$.

---

[1] $\dim X \leqslant d$ signifie ici que tout recouvrement ouvert peut être raffiné en un recouvrement pour lequel l'intersection de plus de d+2 ouverts distincts est vide

Images inverses. Soit f $X' \to X$ continue, et $Z' \subset X'$ fermé, $f(X'-Z') \subset X-Z$. L'image inverse $F_Z(X) \to F_{Z'}(X')$ est définie par $f^{-1}[A] = [A_0 f]$. Si f est l'application identique d'un ouvert X' de X, et Z=X, f^{-1} est un isomorphisme (excision), parceque GL(H) est contractile donc toute famille continue B d'opérateurs de Fredholm sur X' inversible hors de Z se déforme en une famille égale à 1 hors d'un voisinage de Z, qui se prolonge.

b. Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz. Théorème de périodicité de Bott.

Homomorphisme de Bott. Soit X un espace topologique et soit p: $N \to X$ un fibré vectoriel complexe sur X. On note k_N le complexe de Koszul de N:

(1.3) $k_N \quad \cdots p^{-1}\Lambda^{-k}N^* \to p^{-1}\Lambda^{-k+1}N^* \to \cdots N^* \to \mathbb{C} \to 0$

dont la différentielle au point $n \in N$ est le produit intérieur $\omega \to n \lrcorner\, \omega$. La multiplication par $[k_N] \in K_X(N)$ définit pour $Z \subset X$ fermé un homomorphisme

(1.4) b_N: $K_Z(X) \to K_Z(N)$

(En fait b_N est plutôt lié à la structure $spin^c$ (bien définie à homotopie près) associée à la structure complexe de N). Le théorème de périodicité de Bott implique que b_N est un isomorphisme lorsque X=Z et X est compact. En fait c'en est un lorsque X est de dimension finie; dans ce cas la présence du support Z complique un peu la situation parceque X-Z n'est pas compact. L'inverse de l'homomorphisme de Bott est donné par l'indice des familles d'opérateurs de Toeplitz, que nous décrivons maintenant, et qui est un ingrédient essentiel de la formule de l'indice.

Indice d'une famille d'opérateurs de Toeplitz. Dans ce qui suit nous supposons le fibré N trivial: $N = X \times \mathbb{C}^k$ (le cas général peut s'y ramener). Soit Q un ellipsoïde de $\mathbb{C}^k$, par exemple la boule unité, ou l'ellipsoïde Q_ε défini par l'inégalité $|\mathrm{Re}\, z|^2 + \varepsilon^{-2}|\mathrm{Im}\, z|^2 \leqslant 1+\varepsilon$ $(\varepsilon>0)$. Rappelons (cf. [BM1]) qu'un opérateur de Toeplitz de degré 0 sur Q est un opérateur linéaire continu sur $\mathcal{O}^0(Q)$, l'espace des fonctions holomorphes de carré sommable sur Q, de la forme $A = T_a$+opérateur compact, où a est une fonction continue sur ∂Q, et T_a

fonction continue sur ∂Q, et T_a est l'opérateur $u \to B(au)$, B le projecteur de Bergman $L^2(Q) \to \mathcal{O}^0(Q)$. Modulo les opérateurs compacts A ne dépend que de $a|\partial B$ et on a $T_a T_b \sim T_{ab}$. On en déduit une notion de famille continue d'opérateurs de Toeplitz paramétrée par X, dont le symbole est une fonction continue sur $X\times\partial Q$, et plus généralement d'opérateur de type $E \to F$ où E et F sont deux fibrés vectoriels sur X, ou de complexe d'opérateurs de Toeplitz paramétré par X, dont le symbole est un complexe de fibrés sur $X\times\partial Q$. Rappelons que A est elliptique si son symbole est exact; c'est alors un complexe de Fredholm.

Nous dirons encore que A est basique s'il est de la forme T_a avec a indépendant de la variable de Q, autrement dit si pour chaque $x \in X$ A_x est l'homothétie de rapport $a(x)$. Pour tenir compte des supports on introduit la définition suivante:

Définition 1.1.- *On appelle famille admissible* (relativement à Z) *d'opérateurs de Toeplitz elliptiques un couple* (A,A^t) $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, *où* A *est une famille elliptique d'opérateurs de Toeplitz d'ordre* 0 (de type $E \to F$) *sur* Q, *paramétrée par* X, *inversible hors de* Z, *et* A^t *est une homotopie d'opérateurs de Toeplitz inversibles paramétrés par* $x \in X-Z$ *reliant* $A^1 = A_{|X-Z}$ *à une famille basique* A^0.

Une famille admissible a un indice $\mathrm{Ind}_Z(A) \in K_Z(X)$.

Elle définit d'autre part un élément $[A]_Z \in K_Z(X\times Q)$ comme suit: si (a,a^t) est le symbole de (A,A^t) on pose $a(x,tz)=a(x,z)$ si $t=1$, $z\in\partial Q$, resp. $a^t(x,z)$ si $t \leqslant 1$, $x\in X-Z$, $z \in \partial Q$. a est ainsi bien défini sur $X\times\partial Q \cup (X-Z)\times Q$ (parceque a^0 est basique). Il définit donc un élément de la K-théorie de $X\times Q$ à support dans $Z\times\mathring{Q}$, qui est égale à $K_Z(X\times Q)$ (par déformation).

Théorème 1.2.- *On suppose* X *métrique de dimension finie*

(i) *Tout élément* $\xi \in K_{Z\times\{0\}}(X\times Q)$ est de la forme $[A]_Z^{top}$ *pour une famille admissible* $A = (A_x, A_x^t)$ *convenable*.

(ii) Si $A = (A_x, A_x^t)$ est une famille admissible d'opérateurs de Toeplitz $\mathrm{Ind}_Z(A)$ ne dépend que de $[A]_Z^{top}$.

(iii) L'application $[A]_Z^{top} \to \mathrm{Ind}_Z(A)$ de $K_{Z\times\{0\}}(X\times Q)$ dans $K_Z(X)$ ainsi définie est l'inverse de l'homomorphisme de Bott.

Les résultats i) et ii), ainsi que le fait que l'application canonique $K_Z \to F_Z$ soit un isomorphisme, se démontrent à partir de variantes du lemme suivant: si Y est de dimension finie et si A est une famille continue d'opérateurs de Fredholm sur un fibré hilbertien H, E un sous fibré de rang assez grand de H, il existe une déformation $A_t = A + q_t$, avec q_t compact, $q_0 = 0$ telle que A_1 soit injectif sur $E^\perp$ (la condition est $\mathrm{rg}(E) \geq \mathrm{indice}(A) + \dim X$ en tout point; on peut dans une telle déformation ne rien bouger sur un ensemble fermé où A est déjà bon, ou forcer A_t à être inversible sur un ensemble ouvert où A l'est).

Preuve de iii): si a est un complexes de fibrés sur X exact hors de Z, k le complexe de Koszul de $X\times Q$, $k^t = k(x,tz)$, $A = T_{a\otimes k}$, $A^t = T_{a\otimes k^t}$, on a par construction $[A]_Z = [k]\,[a] = b([a])$ et il est élémentaire de vérifier $\mathrm{Ind}_Z(A) = [a]$. Ainsi l'application Ind_Z définie par i) ii) est inverse à gauche de l'homomorphisme de Bott b. Un argument de G.Segal montre alors simplement que c'est aussi un inverse à droite.

Image directe. Si $N \to X$ est un fibré vectoriel réel de dimension paire, une structure spin^c sur N est la donnée d'une métrique euclidienne sur N et d'un C_N-module $\mathbb{Z}_2$-gradué $\mathcal{S}_N = \mathcal{S}_N^+ + \mathcal{S}_N^-$ (fibré), simple en tout point de X, où C_N est l'algèbre de Clifford négative de N (fibré en $\mathbb{C}$-algèbres $\mathbb{Z}_2$-graduées engendré par N et les relations $n.n = -\|n\|^2$ pour $n \in N$). Passant à la K-théorie on peut parler de structure spin^c virtuelle sur un fibré virtuel de dimension paire. Une structure spin^c virtuelle sur un vrai fibré (non virtuel, non nul) provient d'une vraie structure spin^c, unique à isomorphisme près. Si E est un fibré vectoriel complexe de rang fini, muni d'une métrique hermitienne, il est muni d'une structure spin^c canonique, pour laquelle $\mathcal{S}_N=\Lambda_{\mathbb{C}}E^*$ (algèbre extérieure du dual de E), la multiplication de Clifford étant donnée par $n.\omega= n_L\omega-n^*{}_\Lambda\omega$.

L'isomorphisme de Bott: $K_Z(X)\to K_Z(N)$ est bien défini lorsque N est un fibré complexe et plus généralement si N est un fibré réel muni d'une structure spin^c (c'est la multiplication par $[k_N]$ où k_N: $p^{-1}\mathcal{S}_N^+ \to p^{-1}\mathcal{S}_N^-$ est le morphisme de fibrés sur N défini par le produit de Cifford).

On définit alors l'image directe K-théorique f_*: $K_Z(Y)\to K_{Z'}(X)$ lorsque X et Y sont deux variétés, $f:Y\to X$ une application de classe C^1 propre sur Z, $Z'\supset f(Z)$, et f est muni d'une structure spin^c, ie. on s'est donné une structure spin^c (virtuelle) sur le fibré normal (virtuel) $f^{-1}(TX)-TY$, par exemple une structure complexe virtuelle. Elle est caractérisée axiomatiquement par les conditions suivantes:

(I1) Elle est covariante: $(fg)_* = f_* g_*$

(I2) Elle commute aux changements de base.

(I3) Si X est un fibré vectoriel spin^c sur Y, f la section nulle, munie de la structure spin^c déduite de celle des fibres de X, on a $f_*=b_{X/Y}$ (isomorphisme de Bott).

La signification de (I2) est la suivante: soit un diagramme

$$\begin{array}{ccc} Y' & \xrightarrow{G} & Y \\ \downarrow F & & \downarrow f \\ X' & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

où X, Y, X', Y' sont des variétés, f, g, F, G sont de classe C^1, f et g sont transverses et Y' s'identifie au produit fibré $Y\times_X X'$, f est muni d'une structure spin^c et F de la structure spin^c qui s'en déduit. On se donne des fermés $Z\subset Y$, $Z'\subset Y'$, $T\subset X$, $T'\subset X'$ tels que $Z'\supset G^{-1}(Z)$, $T'\supset g^{-1}(T)$, $T\supset f(Z)$, $T'\supset F(Z')$. Alors on a $G^{-1}f_* = F_* g^{-1}$: $K_Z(Y) \to K_{T'}(X')$. En particulier l'image directe commute aux restrictions aux ouverts (cas où g et G sont des plongements ouverts); ainsi si $Y\subset X$ est ouvert f: $Y \to X$ est l'inclusion canonique munie de la structure spin^c triviale, Z=T est fermé dans X, f_*: $K_Z(Y) \to K_Z(X)$ est l'isomorphisme d'excision.

Ceci étant l'image directe f_* est bien définie si f est une projection $Y=X\otimes\mathbb{C}^n\to X$, comme composé de l'homomorphisme de restriction $K_Z(Y)\to K_B(Y)$ où $B\supset Z$ est un fibré en boules de rayon assez grand au dessus $T\supset f(Z)$, et de l'inverse de l'isomorphisme de Bott $K_B(Y)\to K_T(X)$. Dans le cas général f spin^c de classe C^1 est composée d'une telle application, d'un plongement ouvert, et de la section nulle d'un voisinage tubulaire spin^c, de sorte que f_* est bien défini par ces axiomes.

Remarque. Dans [BM1] nous avons aussi défini les opérateurs de Toeplitz de degré $\neq 0$, auxquels le théorème d'indice ci-dessus se généralise. Ainsi soit $E^k=\bigoplus_l E^k_l$ une famille de fibrés gradués sur X. Soit

$$D : \cdots \quad E^k\otimes \mathcal{O} \to E^{k+1}\otimes \mathcal{O} \to \cdots$$

une famille de complexes d'opérateurs différentiels à coefficients holomorphes sur Q. On suppose D de degré 0, ie. D_{ij} est d'ordre $\leqslant i-j$ si (D_{ij}) est la matrice de D dans la décomposition $E^k=\bigoplus_l E^k_l$; en particulier $D_{ij}=0$ si $i<j$, et dans ce cas D est exact comme complexe d'opérateurs différentiels ssi sa partie diagonale d'ordre 0 l'est en tout point de $Y=Q\times X$.

Supposons D elliptique, exact hors de Z. Alors à D est canoniquement associée une famille admissible, qu'on construit en deux crans:

1°.- pour $1/2 \leqslant t \leqslant 1$ on pose $D^t = ((2t-1)^{i-j}D_{ij})$; c'est bien défini parceque $D_{ij}=0$ si $i-j<0$; $D^{1/2}$ est "diagonal", d'ordre 0.

2°.- pour $0 \leqslant t \leqslant 1/2$ on pose $D^t = D^{1/2}(2tz)$; D^o est basique.

Le symbole $[D]^{top}_Z$ associé à cette famille peut encore être décrit ainsi: c'est l'élément de K-théorie associé à $\sigma_D(\eta)$, où η est une section de $X\times T^*Q$ de direction voisine de celle de d'u au voisinage de $X\times\partial Q$, où u=0 est l'équation du bord ∂Q (une description équivalente est donnée au n°3). Le théorème 2 est donc encore vrai dans ce cas: $\mathrm{Ind}_Z(D) = p_*[D]^{top}_Z$.

§2 $\mathfrak{D}$-Modules.

Ce paragraphe contient un bref rappel des définitions concernant les $\mathcal{D}$-modules qui forment le cadre dans lequel s'énonce et se démontre le théorème d'indice relatif. Pour la définition et les propriétés des $\mathcal{D}$-modules, le lecteur pourra utilement se reporter à [B], où ces objets sont décrits avec précision (dans un cadre algébrique), ainsi qu'à [K-K-S], [BM-M], [K4], [Bj].

a. $\mathfrak{D}$-modules.

Soit X une variété analytique, réelle ou complexe. On note $\mathcal{O}_X$, ou simplement $\mathcal{O}$, le faisceau des fonctions analytiques sur X et Ω_X ou Ω le faisceau des formes différentielles de degré maximum. On note $\mathcal{D}_X$ (ou $\mathcal{D}$) le faisceau des opérateurs différentiels sur X, $F_m\mathcal{D} = \mathcal{D}_m$ = les opérateurs d'ordre $\leq m$. $\mathcal{D}$ opère à gauche sur $\mathcal{O}$ et à droite sur Ω.

On désignera de la même manière les fibrés vectoriels et leurs faisceaux de sections. A un complexe d'opérateurs différentiels

(2.1) $P: \quad \cdots \; E^k \xrightarrow{P_k} E^{k+1} \to \cdots$

où les E^k sont des fibrés vectoriels analytiques sur X on associe une complexe de $\mathcal{D}$-modules à droite localement libres

(2.2) $P^d: \cdots \to \mathcal{E}^k \to \mathcal{E}^{k+1} \to \cdots$

où $\mathcal{E}^k = \mathrm{Diff}(\mathcal{O},E^k)$ est le faisceau des opérateurs différentiels de type $\mathcal{O}\to E^k$, la différentielle étant donnée en degré k par $Q \to p_k \circ Q$. De même on associe à P un complexe de $\mathcal{D}$-modules à gauche.

Exemples. 1.- Soit $f: Y\to X$ une submersion. Notons T^*Y/X le fibré cotangent relatif. Le complexe de De Rham relatif $d_{Y/X}$ est le complexe

(2.3) $d_{Y/X}: 0 \to \mathcal{O}_Y \to T^*Y/X \to \cdots \Lambda^k T^*Y/X \to \Lambda^{k+1}T^*Y/X \to \cdots$

défini par la différentiation extérieure verticale. Il lui correspond un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à droite (en degrés positifs) $DR^d{}_{Y/X}$, et un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche (en degrés négatifs) $DR^g_{Y/X}$. Le symbole de $d_{Y/X}$ est le complexe de l'algèbre extérieure

(2.4) $0 \to \mathbb{C} \to T^*Y/X \to \cdots \Lambda^k T^*Y/X \to \Lambda^{k+1}T^*Y/X \to \cdots$

dont la différentielle au point $\eta \in T^*Y$ est le produit extérieur $\omega \to \eta' \wedge \omega$, où $\eta' \in T^*Y/X$ est la partie verticale de $\eta \in T^*Y$.

2. Si m est un complexe de $\mathcal{O}_X$-modules, on lui associe le complexe de $\mathcal{D}_X$-modules à droite

(2.5) $M = m \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X$

3. Si $E \xrightarrow{p} X$ est un fibré vectoriel complexe, Y la variété analytique sous-jacente à E, le complexe de Koszul de E est le complexe de $\mathcal{O}_Y$-modules (en degrés négatifs)

(2.6) $k_E : \cdots p^{-1}\Lambda^{-k}E' \to p^{-1}\Lambda^{-k+1}E' \to \cdots p^{-1}E' \to \mathcal{O}_Y \to 0$

dont la différentielle au point $y \in Y = E$ est le produit intérieur $\omega \to y \lrcorner \omega$ où E' désigne le dual de E. Il lui correspond un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules à droite $K_E^d = k_E \otimes_{\mathcal{O}_Y} \mathcal{D}_Y$ (il y a aussi un $\mathcal{D}_Y$-module à gauche K_E^g).

b. Modules de transfert.

Soient X , Y des variétés analytiques et $f: Y \to X$ une application analytique. On note $\mathcal{D}_{Y\to X}$ le faisceau sur Y des opérateurs différentiels de type $f^{-1}\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ (f^{-1} désigne l'image inverse faisceautique); localement un tel opérateur s'écrit sous la forme $u \in \mathcal{O}_X \to P_Y(Q_X u_0 f)$ (avec $P_Y \in \mathcal{D}_Y$, $Q_X \in \mathcal{D}_X$).

De même on note $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ le faisceau sur Y des opérateurs différentiels de type $f^{-1}\Omega_X \to \Omega_Y$, ie. localement de la forme $\omega \in \Omega_X \to P_Y(f^{-1}\omega Q_X)$, avec $Q_X \in \mathcal{D}_X$, P_Y opérateur différentiel de type $f^*(\Omega_X) \to \Omega_Y$.

$\mathcal{D}_{Y\to X}$ est un $(\mathcal{D}_Y, f^{-1}\mathcal{D}_X)$-bimodule monogène, engendré comme bimodule par l'opérateur $\varepsilon: u \to u_0 f$. De même $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ est un $(f^{-1}\mathcal{D}_X, \mathcal{D}_Y)$-bimodule, localement monogène (il n'y a pas de générateur canonique).

Exemples. 4.- Supposons f submersive. Alors $\mathcal{D}_{Y\to X}$ est déjà monogène, de générateur ε, comme $\mathcal{D}_Y$-module à gauche. Le complexe $DR^g_{Y/X}$ en est une résolution localement libre, d'augmentation $P\in\mathcal{D}_Y \to P_0\varepsilon$. De même $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ est localement monogène comme $\mathcal{D}_Y$-module à droite, et $DR^d{}_{Y/X}$ est une résolution localement libre de $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}[-\dim Y/X]$.

5.- Soit $p: E\to Y$ un fibré vectoriel, et soient X la variété sous-jacente à E, $f: Y\to X$ la section nulle. Alors $f_*(\mathcal{D}_{Y\to X})$ est un $\mathcal{D}_X$-module à droite de support Y, monogène engendré par ε. Il admet pour résolution localement libre le complexe K_E^d déduit du complexe de Koszul (augmentation: $P\in\mathcal{D}_X \to \varepsilon_0 P$, en degré 0).

c. Image directe.

Pour Z variété analytique, on notera $D^b(\mathcal{D}_Z)$ la catégorie dérivée (fabriquée avec les complexes à cohomologie bornée) de la catégorie des $\mathcal{D}_Z$-modules à droite. Soit $f: Y\to X$ un morphisme de variétés analytiques. Si $M\in \mathrm{ob}\,D^b(\mathcal{D}_Y)$ l'image directe $f_+(M)$ est l'élément

(2.7) $f_+M = Rf_*(M \overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X}) \in \mathrm{ob}\,D^b(\mathcal{D}_X)$

Pour $M\in \mathrm{ob}\,D^b(\mathcal{D}_X)$ on définit l'image inverse ordinaire $f^+(M)$ par

(2.8) $f^+M = f^{-1}(M) \overset{L}{\otimes}_{f^{-1}\mathcal{D}_X} \mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\,[-d] \in \mathrm{ob}\,D^b(\mathcal{D}_X)$ $(d=\dim Y-\dim X)$

(Rf_* désigne le foncteur dérivé du foncteur image directe faisceautique, f^{-1} le foncteur image inverse (il est exact), $\overset{L}{\otimes}$ le produit tensoriel dérivé. Il y a des constructions similaires pour les $\mathcal{D}$-modules à gauche).

Exemples. 6.- Supposons que f soit une immersion fermée. Alors l'image directe f_* est exacte, et $\mathcal{D}_{Y\to X}$ est localement libre sur $\mathcal{D}_Y$. Donc si M est un $\mathcal{D}_Y$-module à droite, $f_+(M)$ est le $\mathcal{D}_X$-module (= complexe pur de degré 0)

(2.9) $f_+(M) = f_*(M \otimes_{\mathcal{D}_Y} \mathcal{D}_{Y\to X})$

D'après M.Kashiwara, $M \to f_+(M)$ est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{D}_Y$-modules à droite sur la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à droite portés par f(Y) (ie. dont toute section est tuée par une puissance de l'idéal de définition de f(Y)); une équivalence quasi-inverse est $N\to f^+N[2d]$. Si f est propre, $f_+(M)$ est $\mathcal{D}_X$-cohérent si et seulement si M est $\mathcal{D}_Y$-cohérent. Il y a un résultat analogue pour les $\mathcal{D}$-modules à gauche.

7.- Supposons que f soit une submersion, de dimension relative $d=\dim Y/X$. On notera $\mathcal{D}_{Y/X}$ le faisceau des opérateurs différentiels verticaux, et $T_{Y/X}\subset\mathcal{D}_{Y/X}$ le faisceau des champs de vecteurs verticaux. On notera $H\subset T^*Y$ le fibré des covecteurs horizontaux (orthogonal de $T_{Y/X}$).

Les modules $\mathcal{D}_{Y\to X}$ et $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}$ sont plats sur $f^{-1}\mathcal{D}_X$ (cf. exemple 4), de même que $\mathcal{O}_Y$ est plat sur $f^{-1}\mathcal{O}_X$. Comme on a vu dans l'exemple 4, $DR^g_{Y/X}$ est une résolution de $\mathcal{D}_{Y\to X}$ et $DR^d_{Y/X}$ est une résolution du module décalé $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}[-d]$. Le produit tensoriel total $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\overset{L}{\otimes}_{\mathcal{D}_Y}\mathcal{D}_{Y\to X}[-d]$ est quasi-isomorphe à $DR^d_{Y/X}\otimes_{\mathcal{D}_Y}\mathcal{D}_{Y\to X}$ donc à $f^{-1}\mathcal{D}_X$ (localement Y est un produit $Z\times X$; le complexe ci-contre est le complexe des f-opérateurs différentiels de type $\mathcal{O}_X\to\Omega_{Y/X}$ ie. de la forme $P(z,x,\frac{\partial}{\partial x})$ à coefficients formes relatives, muni de la différentielle $P\to d_{Y/X}P$; la cohomologie se réduit aux opérateurs dont les coefficients ne dépendent pas de z en degré 0, et est nulle en degré >0).

Plus généralement soit M est un $\mathcal{O}_X$-module à gauche et $N = f^+M$. On a $N \simeq \mathcal{D}_{Y\to X}\otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}f^{-1}M$ puisque f^{-1} est exact et $\mathcal{D}_{Y\to X}$ plat sur $f^{-1}\mathcal{D}_X$ (en particulier N est pur de degré 0), et $\mathcal{D}_{X\leftarrow Y}\otimes_{\mathcal{D}_Y}f^+M \simeq f^{-1}M$ s'identifie au sous faisceau N^0 des sections de N annulées par $T_{Y/X}$. On a car $N\subset$car $d_{Y/X} = H$ (en fait car $N = F\bar{f}^{-1}(\text{car}M)$ si $\bar{f}$ est la projection $Y\times_X T^*X\to T^*X$ et F l'application cotangente $Y\times_X T^*X\to T^*Y$, d'image H). En outre N est "régulier le long de H", ie. il possède de bonnes filtrations $N=\cup N_k$ telles que $T_{Y/X}N_k\subset N_k$ (ou $\mathcal{D}_{Y/X}N_k\subset N_k$), par exemple celle déduite d'une bonne filtration de M ($N_k = \sum_{p+q=k}\mathcal{D}_{Y\to X,p}\otimes f^{-1}M_q$).

Inversement soit N un $\mathcal{D}_Y$-module cohérent à gauche, tel que car $N\subset H$, régulier le long de H. Supposons d'abord $Y=Z\times X$ où Z est un ouvert de la droite contenant 0 ($d=\dim Y/X=1$). Alors, parceque N est régulier, il est engendré localement par un sous $\mathcal{O}_Y$-module cohérent stable par $T_{Y/X}$; autrement dit il est engendré localement par un espace vectoriel fini E de sections n vérifiant $\frac{\partial}{\partial z}n=An$ où $A\in L(E)$ est une matrice à coefficients dans $\mathcal{O}_Y$. Si R est la résolvante, solution de $\frac{\partial}{\partial z}R=-RA$, $R(0,x)=Id_E$, les sections $m=Rn$, $n\in E$, engendrent N et vérifient $\frac{\partial}{\partial z}m=0$. Ainsi il existe au voisinage de chaque point de Y un homomorphisme surjectif $u:f^+M^0\to N$, où M^0 est un $\mathcal{D}_X$-module cohérent (ici libre). Le noyau K de u est lui même cohérent, à caractéristiques $\subset H$ et régulier le long de H car ces propriétés passent évidemment aux sous modules et aux quotients cohérents: répétant la construction précédente pour K, on voit que c'est l'image d'un morphisme $f^+M^1\to f^+M^0$, nécéssairement de la forme f^+u^1, où u^1 est un morphisme de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents: $M^1\to M^0$ (parcequ'il préserve les sections horizontales). Ainsi N est localement isomorphe à un $\mathcal{D}_Y$-module de la forme f^+M. Dans le cas général, on voit alors, par récurrence sur la dimension relative, que tout $\mathcal{D}_Y$-module à gauche cohérent N tel que car $N\subset H$, régulier le long de H, est localement isomorphe à des images inverses de $\mathcal{D}_X$-modules cohérents; de façon équivalente, si N est un tel module, le sous-faisceau $N^0\subset N$ annulé par $T_{Y/X}$ est un $f^{-1}\mathcal{D}_X$-module cohérent et l'homomorphisme canonique $\mathcal{D}_{Y\to X}\otimes_{f^{-1}\mathcal{D}_X}N^0$ est un isomorphisme. Notons que N^0 est localement constant le long des fibres de f: il est donc muni d'une action du groupoïde des chemins verticaux. Ainsi si les fibres sont connexes et la monodromie triviale, N est canoniquement isomorphe à f^+M, avec $M=f_*N^0$ (l'image directe, pas le foncteur dérivé). Si de plus f est localement contractile, par exemple si Y est un germe de variété au voisinage d'une section de f, l'homomorphisme canonique $f^+f_+N\to N$ est un isomorphisme (la monodromie est nulle, et f^+M se réduit à f_*N^0 car f_* est exact sur les faisceaux localement constants dans les fibres). Dans ce cas $M\to f^+M$ est donc une équivalence, analogue à celle de Kashiwara (exemple 6) de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules à gauche cohérents dans celle des $\mathcal{D}_Y$-modules à gauche cohérents, à caractéristiques horizontales, et réguliers le long de H, de quasi-inverse $N \to f_+N$.

Dualement, si M est un $\mathcal{D}_X$-module à droite cohérent, f^+M est un complexe de $\mathcal{D}_Y$-modules cohérent, pur de degré d=dimY/X. Il est à caractéristiques régulières le long de H. Inversement si N est un $\mathcal{D}_Y$-module à droite cohérent, à caractéristiques $\subset H$ et régulier le long de H, N est isomorphe à f^+f_+N si f est localement contractile, par exemple si Y est le germe d'une variété au voisinage d'une section de f, de sorte que f^+ et f_+ sont des équivalences quasi-inverses comme plus haut. Dans le cas général le germe N_S de N le long d'une section continue de f est isomorphe à $f^+f_+N_S$ (l'analogue de N^0 est moins agréable à manier: à cause du décalage, ce n'est plus un sous faisceau de N).

8.- Soit X une variété complexe. Notons $\overline{X}$ la variété complexe conjuguée, et X_R la variété réelle sous-jacente: diagonale de $X \times \overline{X}$ munie de la restriction de $\mathcal{O}_{X\times\overline{X}}$ (ou ce qui revient au même, germe de la diagonale dans $X\times\overline{X}$). Soit $f: X_R \to X$ la projection. Le complexe de De Rham relatif $d_{X_R/X}$ est le complexe de Dolbeault d". Si M est un $\mathcal{D}_X$-module, on note $M_R = f^+(M)$ (c'est le "produit tensoriel externe complété analytiquement" de M et d"); si M correspond à un système d'équations différentielles, M_R correspond au même système, auquel on a adjoint le système des équations de Cauchy-Riemann. L'exemple 7 montre que $M \to M_R$ est une équivalence de la catégorie des $\mathcal{D}_X$-modules sur la catégorie des $\mathcal{D}_{X_R}$-modules à caractéristiques $\subset$ card", réguliers le long de card"; l'image directe f^+ fournit une équivalence inverse: l'homomorphisme canonique $M \to f_+(M_R)$ est un isomorphisme.

Remarque .- On a $(fg)_+ = f_+ g_+$ si g est propre, en particulier si c'est une immersion fermée. En outre l'image directe propre f_+ commute aux changements de base submersifs: si $g:X' \to X$ est submersive, $Y'=Y\times_X Y$ et $F:Y' \to X'$, $G:Y' \to Y$ sont les projections, on a $G^+f_+=F_+g^+$ (f propre).

d. Symbole

Les variétés sont supposées complexes. Une variété réelle sera considérée comme germe d'une variété complexe au voisinage des points réels. Rappelons qu'une bonne filtration sur un $\mathcal{D}_X$-module M à droite (ou à gauche) est une filtration croissante $M=\cup M_k=\cup F_kM$ telle que M_k soit un $\mathcal{O}_X$-module cohérent, nul pour $k \ll 0$ et $M_k\,\mathcal{D}_p \subset M_{k+p}$, avec égalité si $k \gg 0$. Ici $\mathcal{D}=\cup\mathcal{D}_k$ est la filtration canonique de $\mathcal{D}$; c'est une bonne filtration et $\mathrm{gr}\mathcal{D}$ s'identifie à l'algèbre graduée $\mathcal{O}_X[TX]$ des fonctions analytiques sur T^*X, polynomiales en la variable verticale.

Si M est muni d'une bonne filtration, il est cohérent et le gradué associé grM (symbole de M) est un $\mathrm{gr}\mathcal{D}$-module cohérent. Son support $\mathrm{Car}(M)\subset T^*X$ est un sous ensemble analytique, conique, involutif de T^*X; il ne dépend pas du choix d'une bonne filtration. On note aussi, si $Z\supset\mathrm{Car}(M)$, de base compacte:

(2.10) $[M]_Z^{an} \in K_Z^{an}(T^*X)$

l'élément du groupe de Grothendieck des $\mathrm{gr}\mathcal{D}_X$-modules cohérents à support dans Z défini par grM. Si Z est conique de base compacte, $[M]_Z^{an}$ ne dépend que de M, et pas du choix d'une bonne filtration. (cf. [Bj], [BM-M]). $[M]_Z^{an}$ est encore défini si M est un complexe borné de $\mathcal{D}$-modules, à cohomologie bien filtrée, à caractéristiques dans Z: $[M]_Z^{an} = \sum(-1)^j[H^jM]_Z^{an}$.

Toujours sous les hypothèses ci dessus, on définit l'élément

(2.11) $[M]_Z^{top}\in K_Z(T^*X)$

par les trois conditions suivantes:

(ST1) $[M]_Z^{top}$ est additif: si $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ est une suite exacte de $\mathcal{D}_X$-modules bien filtrés, à caractéristiques $\subset Z$, on a $[M]_Z^{top}= [M']_Z^{top}+ [M'']_Z^{top}$.

(ST2) Si $M=\mathrm{Diff}(\mathcal{O},P)$ provient d'un complexe P d'opérateurs différentiels tel que le symbole $\sigma(P)$ (=grP) soit exact en dehors de Z, on a

(2.12) $[M]_Z^{top} = [\sigma(P)]_Z$, élément de $K_Z(T^*X)$ défini par le complexe de fibrés $\sigma(P)$.

Si $f: Y \to X$ est une submersion, notons $F: f^{-1}T^*X = Y \times_X T^*X \hookrightarrow T^*Y$ l'application cotangente. Son image $H \subset T^*Y$ est l'ensemble des covecteurs horizontaux. Notons $\bar{f}: f^{-1}T^*X \to T^*X$ la projection. Le $\mathcal{D}_Y$-module à droite $\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}$ est bien filtré, et on a

(2.13) $\mathrm{Car}\,(f^+(M)) = F\bar{f}^{-1}(\mathrm{Car}M) \subset H$.

La troisième condition s'énonce alors :

(ST3) Si $f: Y \to X$ est une submersion, M un $\mathcal{D}_X$-module à droite bien filtré, on a avec les notations ci-dessus, et $Z \supset \mathrm{Car}M$, $f^+Z = F\bar{f}^{-1}(Z)$

(2.14) $[f^+M]^{top}_{f^+Z} = \bar{f}^{-1}[M]^{top}_Z \,.\, (-1)^d\, [\mathcal{D}_{X \leftarrow Y}]^{top}_{Z'} = \tilde{F}_* \;\bar{f}^{-1}[M]^{top}_Z$

(d=dimY/X)

où $\tilde{F}_*$ désigne le conjugué de l'image K-théorique (multiplication par l'élément de $K_{Z'}(T^*Y)$ correspondant au complexe de l'algèbre extérieure, symbole de $d_{Y/X}$).

Ces axiomes permettent de construire $[M]^{top}_Z$ lorsque X est compact dans une variété de Stein, car M possède alors une bonne résolution localement libre au voisinage de X, dont le symbole fournit [M]. Dans le cas général, X_R est de Stein, donc $[M_R]^{top}_{Z_R}$ est défini et l'homomorphisme F_*f^{-1} de $K_Z(T^*X)$ dans $K_{fZ}(T^*X_R)$ est bijectif dans ce cas. En se ramenant au cas où X est réelle on démontre de façon analogue:

Proposition 2.1.- <u>Soit</u> $f: Y \to X$ <u>une immersion fermée,</u> M <u>un</u> $\mathcal{D}_Y$-<u>module bien filtré,</u> Z=CarM. <u>Alors</u> f_+M <u>est bien filtré, on a</u> $\mathrm{Car}\, f_+M = \bar{f}\, F^{-1}(Z)$, <u>et</u>

(2.18) $[f_+M]^{top}_{Z'} = \bar{f}_*\, F^{-1}\, [M]^{top}_Z$ (image K-théorique)

(<u>où</u> $\bar{f}: f^{-1}(T^*X) \to T^*X$ <u>est la projection, et</u> $F: f^{-1}(T^*X) \to T^*Y$ <u>l'application cotangente</u>)

Remarque. Si m est un $\mathcal{O}_X$-module cohérent de support Z, on note $[m]^{top}_Z \in K_Z(X)$ l'élément dont l'image inverse est $[m \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{D}_X]^{top}_{p^{-1}Z} \in K_{p^{-1}Z}(T^*X)$. Il résulte de la proposition 1 que cette définition commute aux immersions fermées. Cette définition coïncide évidemment avec celle de Baum, Fulton, Mac-

Pherson [B-F-MPh] lorsque X est une variété et m admet une résolution localement libre finie (par exemple X de Stein ou projective), donc dans tous les cas; dans [B-F-MPh] le résultat sur l'image directe immersive est démontré par "déformation au cône normal".

§3. Enoncé du théorème . Ellipticité relative.

Soient X, Y deux variétés analytiques (Y à bord), et f: Y→X, Y une application analytique. Pour un $\mathcal{D}_Y$-module M on définit l'ellipticité relative. Houzel et Schapira [H-Sch] ont montré que l'image directe f_+M d'un $\mathcal{D}$-module M relativement elliptique bien filtré est cohérente (bien filtrée) si f est propre, bord compris. La formule d'indice relative décrit $[f_+M]$ dans ce cas. Quand le bord ∂Y est vide Malgrange [M] a démontré qu'on a $[f_+M]^{an}_Z = \bar{f}_* F^{-1}[M]^{an}_Z$ (image K-théorique analytique)d'où aussi $[f_+M]^{top}_Z = \bar{f}_* F^{-1}[M]^{top}_Z$. Dans le cas général ($\partial Y \neq \emptyset$, f non propre sur l'intérieur de Y) il n'y a plus de formule en K-théorie analytique; néanmoins si M est relativement elliptique $[M]^{top}_Z$ se prolonge canoniquement à un ensemble sur lequel $\bar{f}$ est propre et dont $[f_+M]^{top}_Z$ est l'image K-théorique.$[M]^{an}_Z$ $[M]^{an}_Z$: la formule topologique subsiste.

1. Ellipticité relative géométrique. Soient des variétés analytiques X,Y (plus généralement des parties compactes de variétés analytiques), et f: X → Y une application analytique. On note

$$(3.1)\quad \bar{f} : f^{-1}(T^*X) = Y\times_X T^*X \to T^*X \quad \text{la projection}$$
$$F : f^{-1}(T^*X) \to T^*Y \quad \text{l'application cotangente}$$

On suppose désormais que Y est une variété à bord complexe, ie. définie par une inéquation analytique réelle $u \leq 0$ dans une variété ambiante $\tilde{Y}$ avec $du \neq 0$ sur le bord ∂Y, qui est donc une hypersurface analytique réelle de $\tilde{Y}$. On définit alors les épaississements:

$$(3.2)\quad Y_\theta = Y \cup_{\partial Y} N^+(\partial Y)$$

obtenu en recollant à Y le long de ∂Y le fibré conormal sortant $N^+(\partial Y) \subset T^*Y|\partial Y$, ensemble des multiples positifs de $d'u$ (la partie holomorphe de du); $N^+(\partial Y)$ est un fibré en demi droites réelles sur ∂Y, et ∂Y est identifié à la section nulle.

L'application f se prolonge en une application f_e continue (analytique par morceaux) constante sur les fibres de $N^+(\partial Y)$: $Y_e \to X$, et Y possède un voisinage tubulaire homéomorphe à Y_e, dans $\tilde{Y}$. On note encore

(3.3) $\bar{f}_e$: $Y_e \times_X T^*X \to T^*X$ la projection

F_e : $Y_e \times_X T^*X \to T^*Y$ le prolongement de F tel que

$$F_e(\eta,\xi) = \eta + F(\xi) \quad \text{pour } (\eta,\xi) \in N^+(\partial Y) \times_X T^*X.$$

Soit $Z \subset T^*\tilde{Y}$ une partie fermée, conique. Posons $Z_e = F_e^{-1}(Z)$. La condition d'ellipticité relative géométrique pour Z s'énonce:

(E) Z_e ne contient pas de point $(\eta,\xi) \in N^+(\partial Y) \times_X T^*X$ tel que $\eta \neq 0$

de façon équivalente: Z ne contient pas de covecteur $\eta + F(\xi)$, avec $\xi \in T^*X$, $\eta \neq 0$, partie holomorphe d'un covecteur normal de ∂Y (ie. de la forme $\lambda d'u$ avec $\lambda \in \mathbb{C}$, où $u=0$ est une équation de ∂Y).

Supposons maintenant f propre sur $pr(Z) \cap Y$. Si la condition d'ellipticité géométrique (E) est satisfaite, $\bar{f}_e$ est propre sur Z_e, et on définit l'image K-théorique:

(3.4) $\bar{f}_{e*} F_e^{-1}$: $K_Z(T^*Y) \to K_{Z'}(T^*X)$ avec $Z' = \bar{f}_e F_e^{-1}(Z)$.

C'est le composé de l'image inverse F_e^{-1} : $K_Z(T^*Y) \to K_{Z_e}(Y_e \times_X T^*X)$, et de l'image directe K-théorique (propre) $\bar{f}_{e*}$: $K_{Z_e}(Y_e \times_X T^*X) \to K_{Z'}(T^*X)$.

b. Ellipticité relative, énoncé du théorème.

Soit $f: Y \to X$ comme ci-dessus, avec Y à bord. Soit M un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module. On dit que M est relativement elliptique le long du bord ∂Y

-lorsque f est une submersion, si toute section de M au voisinage d'un point de ∂Y est tuée par un opérateur différentiel vertical $P \in \mathcal{D}_{Y/X}$

elliptique, ie. pour lequel le bord ∂Y est non caractéristique ($\mathcal{D}_{Y/X}$ désigne l'algèbre engendrée par les champs de vecteurs verticaux).

-dans le cas général, si i_+M est relativement elliptique pour p le long de $\partial Y \times X$, où $i: Y \to Y \times X$ est le graphe de f et $p: Y \times X \to X$ la projection (ainsi M est toujours relativement elliptique si le bord ∂Y est vide).

Si M est relativement elliptique, Z=CarM vérifie la condition d'ellipticité géométrique (E); la réciproque est fausse. Le théorème d'indice relatif s'énonce alors comme suit:

Théorème 3.1.- Soient M un $\mathcal{D}_{\tilde{Y}}$-module bien filtré, relativement elliptique, $Z = \mathrm{Car}M$, $Z' = \tilde{f}_e\, F_e^{-1}(Z)$. Supposons en outre f propre sur $\mathrm{supp}M \cap Y$. Alors

1. $f_+(M)$ est à cohomologie cohérente et bien filtrée.
2. On a $\mathrm{Car}\, f_+(M) \subset Z'$.
3. Si Z est de base compacte on a $[f_+(M)]^{top}_{Z'} = \tilde{f}_{e*}\, F_e^{-1}\, [M]^{top}_{Z}$ (image K-théorique).

Les assertions 1) et 2) sont vraies sans hypothèse de compacité sur Z et ont été démontrées par Houzel et Schapira.

c. Cas réel. Idée de la démonstration.

Voici maintenant la variante réelle de ces constructions. Soient X,Y des variétés analytiques réelles (Y à bord), $f: Y \to X$ une application analytique, M un $\mathcal{D}_Y$-module bien filtré. On notera η le covecteur normal sortant le long de ∂Y. Le tout se prolonge analytiquement à un voisinage complexe de Y.

Si f est une submersion, on dit que M est relativement elliptique s'il satisfait aux conditions suivantes:

$(ER)_Y$ pour tout $y \in Y$, toute section s de M au voisinage de y, et tout covecteur imaginaire $i\xi$ projection $\neq 0$ dans $T^*_{Y/X}$, il existe un opérateur vertical $P \in \mathcal{D}_{Y/X}$, elliptique en ce covecteur (ie. $\sigma_P(i\xi) \neq 0$) tel que $s.P=0$.

$(ER)_{\partial Y}$ pour tout $y \in \partial Y$, toute section s de M au voisinage de y, et tout covecteur de la forme $\eta + i\xi$ avec ξ réel, de projection $\neq 0$ dans $T^*_{Y/X}$, il existe un opérateur vertical $P \in \mathcal{D}_{Y/X}$, elliptique en ce covecteur (ie. $\sigma_P(\eta + i\xi) \neq 0$) tel que $s.P = 0$.

Exemple.- dans le cas absolu (X réduit à un point), si M correspond à un système d'équations aux dérivées partielles, la condition $(ER)_Y$ signifie que ce système est elliptique sur Y. La condition $(ER)_{\partial Y}$ signifie que ce système satisfait aux conditions d'ellipticité au bord de Lopatinsky-Shapiro, sans qu'il soit nécéssaire de lui adjoindre d'autres conditions aux limites autrement dit qu'il est hyperbolique pour ∂Y.

L'ellipticité relative n'est pas stable par immersion fermée, mais elle implique la presqu'ellipticité relative, qui est stable:

Définition 3.2.- On dit que M est relativement presqu'elliptique s'il existe une famille à 1 paramètre de voisinages tubulaires complexes strictement pseudoconvexes Y_ε de Y telle que M soit relativement elliptique le long de ∂Y_ε (au sens complexe).

Par exemple dans le cas absolu (X réduit à un point) on sait (cf. [BM2]) que tout $\mathcal{D}_Y$-module holonôme est presqu'elliptique.

Je ne décrirai pas ici plus en détail l'énoncé du théorème d'indice dans le cas réel; il se ramène à l'énoncé complexe en prolongeant analytiquement à un petit voisinage complexe; remarquons seulement que la boule cotangente de Y est isomorphe, comme variété à bord presque complexe, aux voisinages tubulaires complexes de Y, ce qui permet de retrouver les formulations usuelles (réelles) de la formule de l'indice.

c. Esquisse de la démonstration.

Voici maintenant une idée (succincte) de la démonstration: on voit assez facilement que la formule d'indice relative est stable par immersion fermée, et en utilisant les formules du §2, qu'elle est vraie pour M complexe si et seulement si elle l'est pour M_R (noter que même si le bord de Y est vide, celui des voisinages tubulaires complexes de Y_R ne l'est pas, et pour cette méthode on doit considérer des variétés à bord). Pour démontrer le théorème on se ramène donc au cas où X et Y sont réelles; il existe alors un plongement analytique i: $(Y,\partial Y)\to(B,\partial B)$, où B est la boule unité d'un espace numérique $\mathbb{R}^n$; quitte à remplacer Y par $B\times X$ et M par l'image directe $(i,f)_+M$, on est ramené au cas où f est la projection $B\times X\to X$. On peut enfin épaissir un peu B et le remplacer par l'ellipsoïde Q_ε du n°1.

Suivant Houzel et Schapira il est utile d'introduire de "bonnes résolutions verticales" de M: notons $\mathcal{D}_{Y/X}$ le faisceau des opérateurs verticaux; si M est un $\mathcal{D}_Y$-module bien filtré on introduit la filtration verticale $F_pM=M_p\mathcal{D}_{Y/X}$. Le gradué associé est noté gr^fM, c'est un module sur $gr^f\mathcal{D}$ qui s'identifie à l'anneau des opérateurs différentiels verticaux sur $H=Y\times_X T^*X$, à coefficients polynomiaux. Une bonne résolution verticale de M est une résolution localement libre bien filtrée L telle que gr^fL soit une résolution de gr^fM et $grgr^fL$ une résolution de $grgr^fM$. Il résulte du théorème des syzygies qu'il existe de telles résolutions.

Si L est une bonne résolution gr^fL est un complexe d'opérateurs différentiels sur Q paramétré par T^*X, et exact en dehors de $Z'=\bar{f}(Z\cap H)$. La condition d'ellipticité relative signifie exactement que ce complexe est elliptique, du type décrit dans la remarque du n°1. On peut donc lui appliquer la formule d'indice du n°1. On montre alors que f^+M est cohérent et $[f^+M]$ est l'image K-théorique de $[gr^fM]$, parceque l'image directe $R\bar{f}_*gr^fM$ est le premier terme d'une suite spectrale qui converge par cohérence noethérienne vers $gr\, f^+M$. Il reste encore à montrer que $[gr^fM]$ a la même image K-théorique que $[M]$; ce ne sont pas les gradués pour les mêmes filtrations et la comparaison demande une astuce supplémentaire.

BIBLIOGRAPHIE.

[A] M.F.Atiyah. K-theory, Benjamin, Amsterdam.

[A-S] M.F.Atiyah, I.M.Singer. The index of elliptic operators I, Ann. Math. 87 (1968) 484-530; -III, loc. cit. 546-604; -IV, loc. cit. 92 (1970) 119-138.

[A-B-S] M.F.Atiyah, R.Bott, A.Schapiro. Clifford modules. Topology 3, supplément (1964), 3-83.

[Bj] J.E..Björk. Rings of Differential Operators. North Holland 1979.

[B] A.Borel et al. Algebraic D-modules, Perspect. in Math. n°2, Academic Press (1987).

[B-F-MPh] P.Baum, W.Fulton, R.Mac Pherson. Riemann-Roch and topological K-theory for singular varieties. Acta Math. 143, n°3-4, (1979) 155-192.

[BM1] L.Boutet de Monvel. On the index of Toeplitz operators of several complex variables. Inventiones Math. 50 (1979) 249-272.
L.Boutet de Monvel. Opérateurs de Toeplitz. Séminaire EDP 1979, Ecole Polytechnique.

[BM2] L.Boutet de Monvel. Systèmes presqu'elliptiques: une autre démonstration de la formule de l'indice. Astérisque 131 (1985) 201-216.
L.Boutet de Monvel. The index of almost elliptic systems. E. de Giorgi Colloquium, Research notes in Math. 125, Pitman 1985, 17-29.

[B-M] L.Boutet de Monvel, B.Malgrange. Le théorème de l'indice relatif. Ann. Sc. E.N.S., à paraître.

[BM-L-M] L.Boutet de Monvel, M.Lejeune, B.Malgrange. Opérateurs différentiels et pseudodifférentiels. Séminaire, Grenoble 1975-76.

[BM-Sj] L.Boutet de Monvel, J.Sjöstrand. Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö. Astérisque 34-35 (1976) 123-164.

[C-B] H.Cornalba-P.Griffiths. Analytic cycles and vector bundles in non compact algebraic varieties. Invent. Math. 28 (1975), 1-106.

[Gra] H.Grauert. Ein theorem der analytischen Garben-theorie und die modulräume komplexe Structuren. IHES Sci. Publ. Math. n°5 (1960)

[Gro] A.Grothendieck. SGA V, théorie des intersections et théorème de Riemann-Roch. Lecture Notes in Math 225, Springer Verlag (1971).

[Hi] F.Hirzebruch. Neue topologische Methoden in der algebraiche geometrie. Springer Verlag, Berlin.

[Hö] L. Hörmander. The Analysis of Linear Partial Differential Operators, vol. III et IV, Grundlehren der Math. Wiss. 124.

[H-Sch] Ch.Houzel, P.Schapira. Images directes de modules différentiels, C.R.A.S.298 (1984), 461-464.

[K1] M. Kashiwara. Index theorem for a maximally overdetermined system of linear differential equations, Proc. Jap. Acad. 49-10 (1973), 803-804.

[K2] M. Kashiwara. b-fonctions and holonomic systems. Invent. Math. 38 (1976), 33-54.

[K3] M.Kashiwara. Analyse microlocale du noyau de Bergman. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exp.n°8, Ecole Polytechnique.

[K4] M. Kashiwara. Cours Université Paris Nord, Birkhaüser 1983.

[K-K-S] M.Kashiwara, T.Kawai, M.Sato. Microfunctions and pseudo-differential equations, Lecture Notes 287 (1973), Springer-Verlag.

[M] B.Malgrange. Sur les images directes de $\mathcal{D}$-modules. Manuscripta Math. 50 (1985), 49-71.

[Me-Sj] A.Melin, J.Sjöstrand. Fourier Integral operators with complex valued phase functions. Lecture Notes 459 (1974) 120-223.