J.-M. Delort

Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1988-1989), exp. n° 15, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1988-1989____A16_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité de Recherche Associée D 0169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 601.596 F

Séminaire 1988-1989

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

CONORMALITE DES ONDES SEMI-LINEAIRES LE LONG DES CAUSTIQUES.

J.-M. DELORT

Exposé n°XV

25 Avril 1989

0. Introduction

Soit Ω un ouvert de $\mathbf{R}^{1+d}$ muni des coordonnées $z = (t, x) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ et notons $\square$ l'opérateur des ondes sur $\mathbf{R}^{1+d}$

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} \, . \tag{0.1}$$

Supposons Ω domaine de détermination de l'ouvert $\omega = \Omega \cap \{t = 0\}$ de $\mathbf{R}^d$. On s'intéresse à la propagation de la régularité conormale pour une solution $u \in H^{\gamma+\frac{1}{2}}_{\text{loc}}(\Omega)$ de l'un des deux problèmes suivants

$$\begin{cases} \square u = P((t,x),u) \\ u_{|t=0} = u_0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}_{|t=0} = u_1 \end{cases} \tag{0.2}$$

$$\begin{cases} \square u = P((t,x),u) \\ u_{|t<0} = v \end{cases} \tag{0.3}$$

où $P(z, Z)$ est un polynôme en Z à coefficients C^∞ en z et $u_0 \in H^{\gamma}_{\text{loc}}(\omega)$ $u_1 \in H^{\gamma-1}_{\text{loc}}(\omega)$ (resp $v \in H^{\gamma+\frac{1}{2}}_{\text{loc}}(\Omega \cap \{t < 0\})$) sont données.

L'étude de la propagation de la régularité conormale consiste à supposer u_0, u_1(resp.v) conormales le long d'une ou de plusieurs sous-variétés de ω (resp $\Omega \cap \{t < 0\}$) et à étudier alors les singularités de la solution u de (0.2) (resp. (0.3)) dans le futur (la définition de la régularité conormale sera rappellée au paragraphe 1).

Deux types de méthodes ont été utilisées pour étudier ce genre de problèmes. La première, due originellement à Bony [3], consiste à commuter à l'opérateur des champs de vecteurs convenables : par exemple si Σ est une hypersurface caractéristique de Ω et si u est solution de (0.3) avec une donnée v conormale le long de Σ dans $\{t < 0\}$, on montre ainsi que dans le futur u reste conormale le long de Σ. Le même type d'argument permet d'étudier la solution de (0.3) avec une donnée v conormale le long de la réunion $\Sigma_1 \cup \Sigma_2$ de deux hypersurfaces caractéristiques lisses de Ω se coupant transversalement dans $\{t > 0\}$.

Cette méthode, dans laquelle les champs de vecteurs sont remplacés par des opérateurs plus singuliers, a par la suite été étendue par Melrose-Ritter [14], Bony [4] et Beals [1] à l'étude de l'interaction de trois ondes conormales en dimension $d = 2$ d'espace : si la donnée v de (0.3) est conormale le long de la réunion de trois hypersurfaces caractéristiques $\Sigma_1, \Sigma_2, \Sigma_3$ de Ω se coupant en 0 et dont les normales en 0 sont linéairement indépendantes, alors dans le futur, la solution u est conormale le long de $\Sigma_1 \cup \Sigma_2 \cup \Sigma_3 \cup \Gamma$ où Γ est le demi-cône d'onde tourné vers l'avenir de sommet 0.

Dans tous ces résultats - pour une synthèse desquels on pourra consulter [2] - la régularité locale ou microlocale de la solution est obtenue comme corollaire de sa conormalité le long d'une certaine géométrie.

Ces méthodes ne permettent toutefois pas d'étudier la solution du problème (0.2) avec données de Cauchy conormales le long d'une hypersurface (analytique) lisse V de ω en temps arbitrairement grand.

Considérons en effet la réunion des bicaractéristiques nulles de $\square$ issues des points $(z;\zeta) = (t,x;\tau,\xi)$ de $T^*\Omega$ avec $t = 0, (x,\xi) \in T^*_V\omega$ (fibré conormal à V dans ω) et $\xi^2 = \tau^2$. C'est une sous-variété lagrangienne lisse L de $T^*\Omega$ qui, près de $\{t = 0\}$ est la réunion des fibrés conormaux à deux hypersurfaces lisses V_+ et V_- de Ω se coupant transversalement suivant V. Si Ω est suffisamment voisin de $\{t = 0\}$ on sait alors d'après [5] que u est conormale le long de $V_+ \cup V_-$. Par contre, en temps plus grand, il se peut que la restriction à L de la projection $T^*\Omega \to \Omega$ ne soit plus de rang constant i.e. que l'une des hypersurfaces V_+ ou V_- devienne singulière. Lebeau [12] a récemment développé une méthode d'étude des solutions de problèmes du type (0.2) qui permet de contrôler les singularités microlocales de la solution indépendamment de la complexité de la géométrie associée. Nous rappelons son théorème au paragraphe 1 ci-dessous. Indiquons seulement dans cette introduction le corollaire qu'il en déduit concernant le "problème de la queue d'aronde" : on considère une solution u de (0.2) en dimension $d = 2$ d'espace avec des données u_0, u_1 conormales le long d'une parabole V de l'hyperplan $\{t = 0\}$. L'une des deux hypersurfaces caractéristiques V_+ et V_- issues de V est lisse (par exemple V_-) et l'autre est une queue d'aronde $V_+ = Q$; en particulier elle développe une singularité en temps fini (cf. figure 1). Le phénomène d'interaction des singularités fait s'attendre à ce que la solution du problème semi-linéaire soit régulière hors de $V_- \cup Q \cup \Gamma$ où Γ est le demi-cône d'onde tourné vers l'avenir de sommet le point singulier 0 de Q (cf. figure 2). Et en effet, Lebeau a montré que le front d'onde C^∞ de la solution u de (0.2) est contenu dans la réunion des conormaux aux strates de la stratification naturelle de $V_- \cup Q \cup \Gamma$. En particulier pour tout ouvert Ω' de Ω ne rencontrant l'ensemble précédent que le long d'une hypersurface lisse Σ, $WF(u)_{|\Omega'} \subset T^*_\Sigma\Omega'$. Toutefois cette méthode, contrairement à celle que nous avons précédemment évoquée, ne fournit aucun renseignement sur la conormalité éventuelle de la solution. Nous nous proposons dans cet exposé d'indiquer comment la deuxième microlocalisation simultanée introduite dans [7] permet de pallier cet inconvénient. En particulier, dans le cas de la queue d'aronde nous allons prouver, avec les notations précédentes, que $u_{|\Omega'}$ est bel et bien conormale le long de Σ (condition bien sûr strictement plus forte que la seule inclusion $WF(u) \subset T^*_\Sigma\Omega'$).

Les preuves détaillées paraitront dans [8]. Terminons en indiquant qu'il serait sans doute possible, en utilisant [13] d'étendre les résultats ci-dessous à un second membre $f((t,x),u)$ fonction C^∞ de ses arguments.

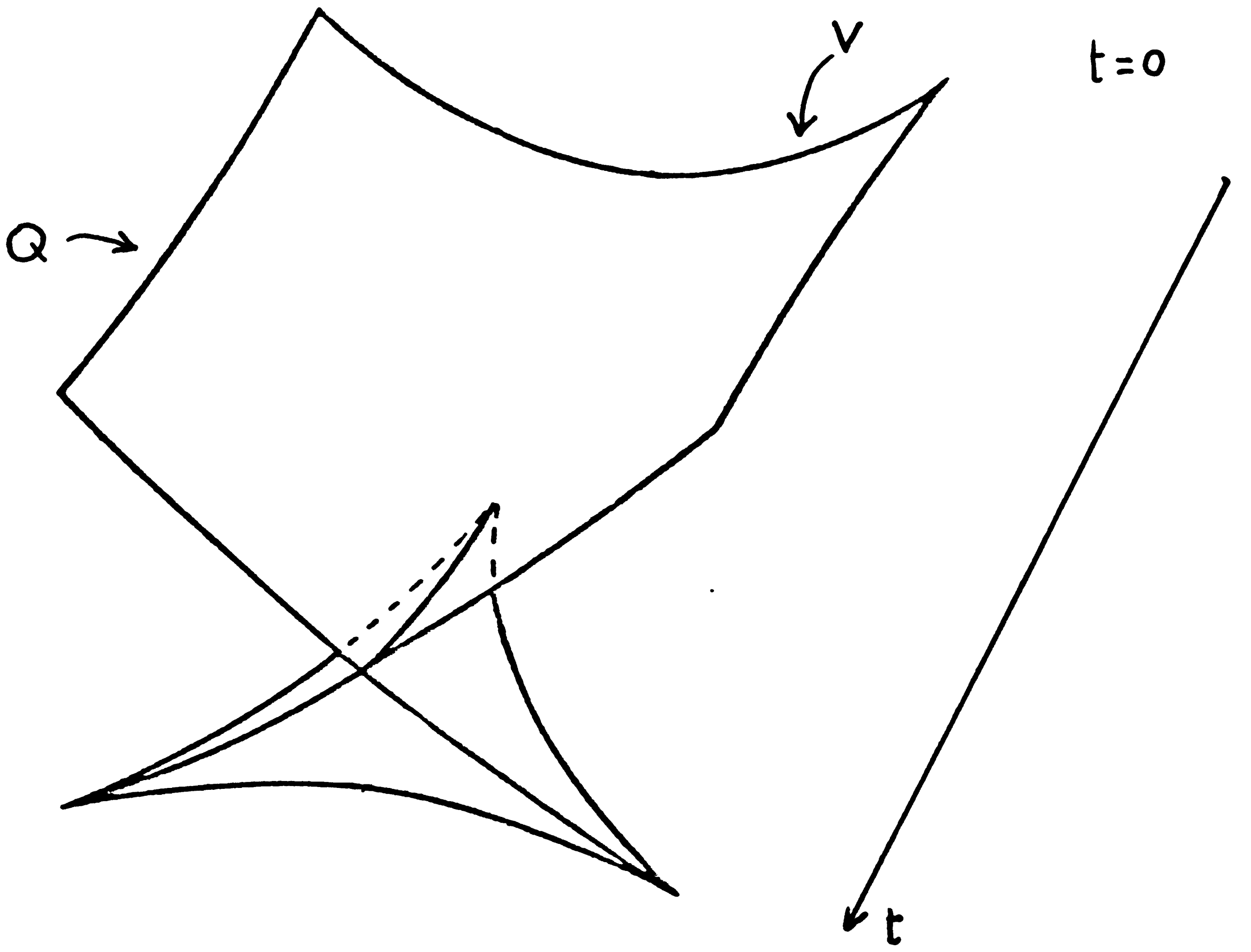

Figure 1

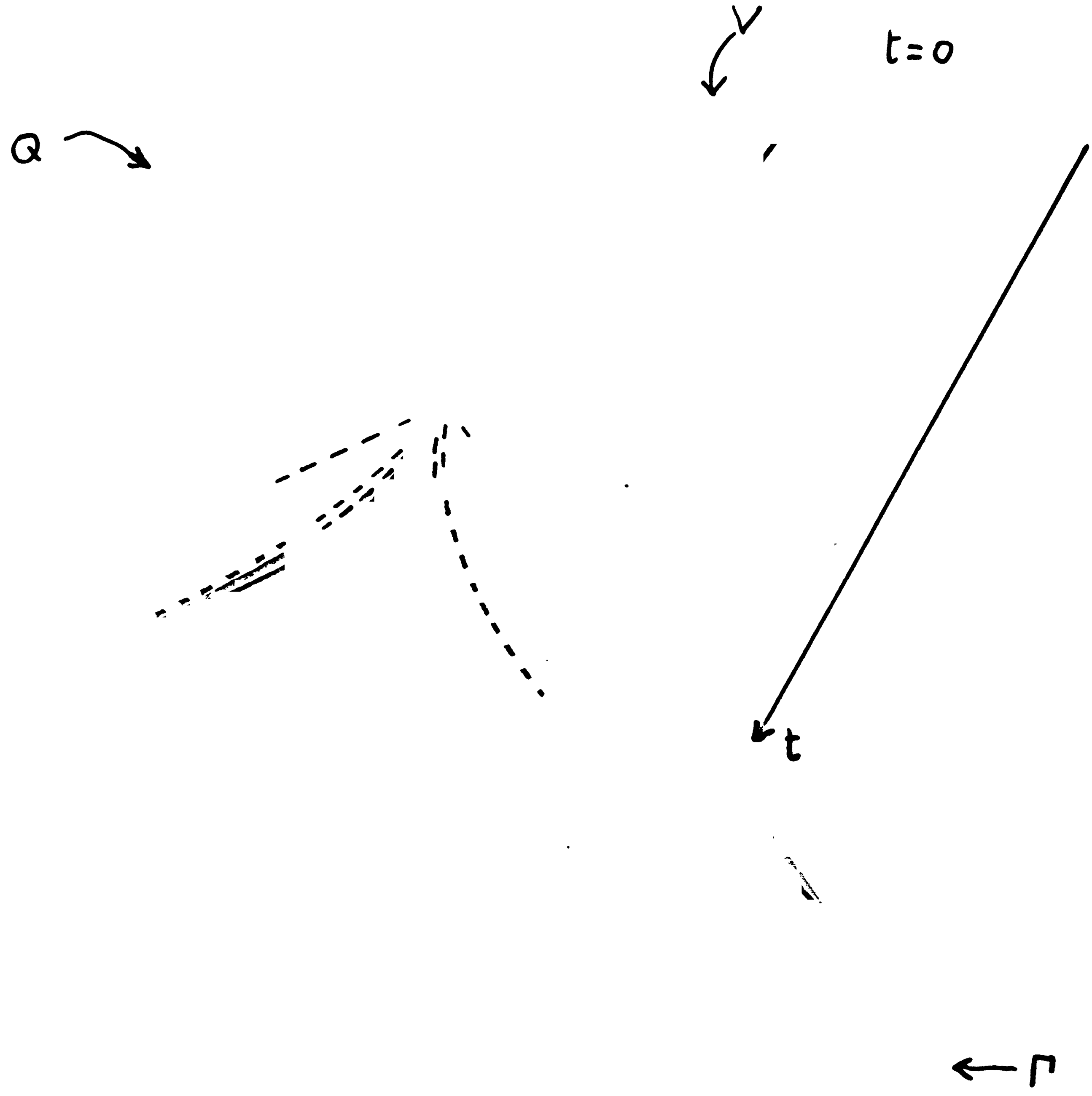

figure 2

1 Enoncé du théorème

Nous allons rappeler ici le résultat microlocal de [12] puis énoncer le théorème de conormalité que nous prouverons dans les paragraphes 2 et 3. Introduisons d'abord les espaces de Bony :

Définition 1.1.— *Soient Σ une sous-variété C^∞ de Ω ouvert de $\mathbf{R}^n$ et $s \in \mathbf{R}$. On note $H_\Sigma^{s,+\infty}(\Omega)$ l'espace des distributions $u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ telles que pour tout entier k et pour toute famille $X_1, \cdots, X_k$ de champs de vecteurs à coefficients C^∞ sur Ω tangents à Σ on ait $X_1 \cdots X_k u \in H^s_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. On pose :*

$$H_\Sigma^{s-,+\infty}(\Omega) = \bigcap_{\varepsilon>0} H_\Sigma^{s-\varepsilon,+\infty}(\Omega). \tag{1.1}$$

Soit $u \in H^{\gamma+\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ $\gamma > \frac{d}{2}$ une solution du problème (0.2) avec des données de Cauchy u_0, u_1 vérifiant

$$u_0 \in H_V^{\gamma,+\infty}(\omega), u_1 \in H_V^{\gamma-1,+\infty}(\omega) \tag{1.2}$$

où V est une hypersurface analytique réelle de ω donnée. La majoration de $WF(u)$ de [12] s'exprime à l'aide de suites du cotangent complexe $T^*\mathbf{C}^{1+d}$ que nous introduisons maintenant.

Si $(z_m; \zeta_m)_{m\in\mathbf{N}}$ est une suite de $T^*\mathbf{C}^{1+d}$ considérons les conditions suivantes :

i) $(z_m)_m$ converge vers un point $z \in \Omega$

ii) il existe $(\lambda_m)_m$ suite de $\mathbf{C}$ et $(\eta_m)_m$ suite de $\mathbf{C}^{1+d}$ avec $|\eta_m| = 1, \eta_m$ convergente telles que $\zeta_m = \lambda_m \eta_m$.

iii) Pour tout $m, (z_m, \zeta_m) \in \mathrm{Car}\,\square$ i.e. $\zeta_m = (\tau_m, \xi_m)$ avec $\tau_m^2 = \xi_m^2$.

Posons la définition :

Définition 1.2.— *On dit qu'un ensemble $\mathcal{E}$ de suites de $T^*\mathbf{C}^{1+d}$ vérifiant les conditions i), ii), iii) précédentes est un ensemble de suites admissibles s'il est stable par extraction de sous-suites et satisfait aux quatre axiomes suivants :*

A.1 Si $(z_m; \zeta_m)_m$ vérifie i), ii), iii) et $\zeta_m \to 0$ alors une suite extraite de $(z_m; \zeta_m)_m$ est dans $\mathcal{E}$.

A.2 Si $(z_m, \zeta_m)_m \in \mathcal{E}$ et si $(z'_m)_m$ est une suite de $\mathbf{C}^{1+d}$ convergeant vers $\lim z_m$ et telle que $\lim |z_m - z'_m||\zeta_m| = 0$, alors une suite extraite de $(z'_m, \zeta_m)_m$ est dans $\mathcal{E}$.

A.3 Si $(z_m, \zeta_m)_m \in \mathcal{E}$ et si $(z'_m)_m$ est une suite de $\mathbf{C}^{1+d}$ telle que $\lim z'_m$ existe et soit sur le demi-cône d'onde réel de sommet $\lim z_m$ tourné vers le futur et que pour tout $m, (z_m, \zeta_m)$ et (z'_m, ζ_m) soient sur la même bicaractéristique complexe de $\square$, alors une suite extraite de $(z'_m, \zeta_m)_m$ est dans $\mathcal{E}$.

A.4 Si $(z_m, \zeta_m^j)_m$ $j = 1, \cdots, N$ sont N suites de $\mathcal{E}$ de même point de base et si $(\zeta_m)_m$ est une suite de $\mathbf{C}^{1+d}$ vérifiant ii) et iii) telle que $\zeta_m - (\zeta_m^1 + \cdots + \zeta_m^N) \to 0$, il existe une suite extraite de $(z_m, \zeta_m)_m$ qui est dans $\mathcal{E}$.

Notons

$$(1.3) \quad Z(\mathcal{E}) = Adh\{(z;\zeta) \in T^*\mathbf{C}^{1+d}\ ; \exists N \in \mathbf{N} \exists N \quad \text{suites} \quad (z_m, \zeta_m^j)_m \in \mathcal{E} j = 1, \cdots, N$$

$$\text{avec} \quad z_m \to z, \zeta_m^1 + \cdots + \zeta_m^N \to \zeta\}$$

(1.4) $\mathcal{A}_V = \{(z_m, \zeta_m)_{m\in\mathbf{N}}\ ; (z_m, \zeta_m)_m$ vérifie i), ii), iii) et pour tout $m \in \mathbf{N}$ $z_m = (0, x_m)$ $\zeta_m = (\tau_m, \xi_m)$ avec $(x_m, \xi_m) \in T^*_{V^{\mathbf{C}}}\mathbf{C}^d\}$

où $V^{\mathbf{C}}$ est la variété complexifiée de V dans $\mathbf{C}^d$.

Avec ces notations, on a alors :

Théorème 1.3.— *(Lebeau [12]) : Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de suites admissibles tel que $\mathcal{A}_V \subset \mathcal{E}$. La solution u de (0.2) avec données de Cauchy satisfaisant (1.2) vérifie :*

$$(1.5) \qquad WF(u)_{|t>0} \subset Z(\mathcal{E}) \cap T^*\Omega$$

Remarque : Dans [12] le théorème précédent n'est prouvé que dans le cas de données de Cauchy conormales classiques mais on a montré dans [7] §3.3 que le résultat reste vrai avec des données de Cauchy conormales quelconques.

On suppose maintenant qu'il existe Ω' ouvert de Ω et Σ hypersurface (caractéristique) analytique réelle lisse de Ω' telle que $Z(\mathcal{E}) \cap (T^*\Omega' - T^*_{\Omega'}\Omega') \subset T^*_\Sigma\Omega'$. Il s'agit de prouver que si $\mathcal{E}$ vérifie, au-dessus de Ω', une condition de minimalité convenable - qui entraînera automatiquement l'inclusion précédente - $u_{|\Omega'}$ est conormale le long de Σ.

Notons $\Sigma^{\mathbf{C}}$ la complexifiée de Σ dans un voisinage de Ω' dans $\mathbf{C}^{1+d}$ et soit

(1.6) $\mathcal{E}_\Sigma = \{(z_m, \zeta_m)_m$; suites de $T^*\mathbf{C}^{1+d}$ vérifiant i) (avec Ω' remplaçant Ω), ii), iii) et telles que pour tout champ de vecteurs X à coefficients holomorphes tangent à $\Sigma^{\mathbf{C}}$, de symbole principal $\sigma(X)$ on ait $\sigma(X)(z_m, \zeta_m) \to 0$ si $m \to +\infty\}$.

D'après [12], $\mathcal{E}_\Sigma$ est un ensemble de suites admissibles. Introduisons l'hypothèse :

$$(H) \qquad \mathcal{E}_{|\Omega'} \subset \mathcal{E}_\Sigma.$$

Elle entraîne en particulier que $Z(\mathcal{E}) \cap (T^*\Omega' - T^*_{\Omega'}\Omega') \subset Z(\mathcal{E}_\Sigma) \cap (T^*\Omega' - T^*_{\Omega'}\Omega') \subset T^*_\Sigma\Omega'$. Il s'agit de prouver :

Théorème 1.4.— *Soient $u \in H^{\gamma+\frac{1}{2}}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ une solution de (0.2) telle qu'il existe $\Omega' \subset \Omega$, Σ hypersurface analytique réelle de Ω' et $\mathcal{E}$ ensemble de suites admissibles contenant $\mathcal{A}_V$ et vérifiant (H). Alors $u_{|\Omega'} \in H_\Sigma^{\gamma+\frac{1}{2}-,+\infty}$ i.e. $u_{|\Omega'}$ est conormale le long de Σ.*

Le théorème s'applique au problème de la queue d'aronde rappellé en introduction. On sait en effet d'après [12] qu'il existe un ensemble de suites admissibles $\mathcal{E}$ qui, par construction, vérifie (H) avec comme ouvert Ω' le complémentaire de l'ensemble des points singuliers de $Q \cup \Gamma \cup V_-$. Il résulte donc du théorème que la solution u est conormale le long des points lisses de $Q \cup \Gamma \cup V_-$.

La démonstration du théorème 1.4 repose sur la caractérisation de la régularité conormale en terme de deuxième front d'onde.

2 Conormalité et deuxième microlocalisation

Notons z la variable de $\mathbf{R}^n (n = 1 + d), (z;\zeta)$ la variable de $T^*\mathbf{R}^n$. Si $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$ et $x \in \mathbf{C}^n, \lambda \in \mathbf{R}, \lambda \geq 1$ considérons la transformée de FBI de u ([15]) :

$$Tu(x,\lambda) = \int e^{-\frac{\lambda}{2}(x-z)^2} u(z)dz \ . \tag{2.1}$$

D'après [15] un point $(z_0;\zeta_0) \in T^*\mathbf{R}^n - \{0\}$ n'est pas dans le front d'onde C^∞ de u si et seulement si il existe W voisinage de $x_0 = z_0 - i\zeta_0$ dans $\mathbf{C}^n$ et pour tout $N \in \mathbf{N}$ une constante $C_N > 0$ tels que

$$|Tu(x,\lambda)| \leq C_N \lambda^{-N} e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\ x)^2} \tag{2.2}$$

pour tout $x \in W$, tout $\lambda \geq 1$.

Soit Σ une sous-variété de $\mathbf{R}^n$ qui dans un système de coordonnées locales $z = (z', z'')$ est d'équations $z'' = 0$. Si $(z', z''\ ;\ \zeta', \zeta'')$ sont les coordonnées sur $T^*\mathbf{R}^n$ et si $\Lambda = T^*_\Sigma \mathbf{R}^n$, Λ est muni des coordonnées (z', ζ'') et $T^*\Lambda$ des coordonnées duales $(z', \zeta''\ ;\ z'^*, \zeta''^*)$. Posons pour $y \in \mathbf{C}^n, \mu \in]0,1[, \lambda \in]1,+\infty[$:

$$T^2u(y,\lambda,\mu) = \int e^{-\frac{\lambda\mu^2}{2}(y'-z')^2 - \frac{\lambda z''^2}{2\mu^2} + i\lambda y''.z''} u(z)dz \ . \tag{2.3}$$

C'est une transformée de FBI de deuxième espèce le long de Λ. Par analogie avec (2.2) on peut définir l'analogue dans le cadre C^∞ du deuxième microsupport analytique de Sjöstrand [15] et Lebeau [10], [11] :

Définition 2.1.— *On dit qu'un point $(q_0; q_0^*) = (z_0', \zeta_0''; z_0'^*, \zeta_0''^*) \in T^*\Lambda$ n'est pas dans le deuxième front d'onde à croissance le long de Λ de u, $WF_\Lambda^{2,1}(u)$, s'il existe W voisinage de $y_0 = (z_0' - iz_0'^*, -\zeta_0'' + i\zeta_0''^*)$ dans $\mathbf{C}^n$, $\alpha \in]0,1[, \sigma \in \mathbf{R}$ et pour tout $N \in \mathbf{N}, C_N > 0$ tels que*

$$|T^2u(y,\lambda,\mu)| \leq C_N \lambda^\sigma (\lambda\mu^2)^{-N} e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\mathrm{Im}\ y)^2} \tag{2.4}$$

pour tous $y \in W, \mu \in]0,\alpha[, \lambda$ avec $\lambda\mu^2 \geq 1$.

La constante σ, indépendante de N, qui intervient dans (2.4) mesure la régularité locale de u. La régularité 2-microlocale s'exprime par la décroissance rapide de T^2u par rapport au paramètre $\lambda\mu^2$. On montre que la définition précédente est indépendante des divers choix arbitraires qui ont été faits.

Le deuxième front d'onde que l'on vient de définir 2-microlocalise la notion de régularité conormale. Notons en effet

$$\Lambda' = \Lambda - T^*_{\mathbf{R}^n}\mathbf{R}^n = \{(z', \zeta'')\ ;\ \zeta'' \neq 0\} \ . \tag{2.5}$$

La preuve du théorème 1.4 utilisera le résultat suivant :

Théorème 2.2.— *Soit $u \in \mathcal{E}'(\mathbf{R}^n)$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes*
i) $WF(u) \subset \Lambda$ *et* $WF_\Lambda^{2,1}(u)|_{\Lambda'} \subset T_\Lambda^*\Lambda = \{(z', \zeta''; z'^*, \zeta''^*) \ ; z'^* = 0, \zeta''^* = 0\}$
ii) Il existe $s \in \mathbf{R}$ *avec* $u \in H_\Sigma^{s,+\infty}$.

Idée de la preuve : Indiquons seulement comment on prouve l'implication i) $\Rightarrow$ ii) qui est la seule que nous utiliserons par la suite.

Puisque $WF(u) \subset \Lambda$, il nous suffit de prouver ii) microlocalement près de tout point $(z_0', 0; 0, \zeta_0'') \in \Lambda'$. L'espace des champs de vecteurs tangents à Σ est engendré par :

$$\frac{\partial}{\partial z_j} \ j = 1, \cdots, \ell \quad z_j \frac{\partial}{\partial z_k} \ \ell + 1 \leq j, k \leq n \tag{2.6}$$

si $z' = (z_1, \cdots, z_\ell), z'' = (z_{\ell+1}, \cdots, z_n)$ et on a :

$$T^2(\frac{\partial u}{\partial z_j})(y, \lambda, \mu) = \frac{\partial}{\partial y_j} T^2 u(y, \lambda, \mu) \ 1 \leq j \leq \ell$$

$$T^2(z_j \frac{\partial u}{\partial z_k})(y, \lambda, \mu) = -\left[\frac{\partial}{\partial y_j} . y_k + \frac{1}{\lambda\mu^2} \frac{\partial^2}{\partial y_j \partial y_k}\right] T^2 u(y, \lambda, \mu) \ \ell + 1 \leq j, k \leq n \ . \tag{2.7}$$

Si $K = \{(z', \zeta''; z'^*, \zeta''^*) \ ; z' = z_0', \zeta'' = \zeta_0'', (z'^*)^2 + (\zeta''^*)^2 = 1\}$ l'hypothèse et la définition 2.1 entraînent qu'il existe W voisinage de K dans $\mathbf{C}^n$, $\sigma \in \mathbf{R}$, $\alpha > 0$ et pour tout entier N, $C_N > 0$ tels que (2.4) soit satisfait. Si W' est un voisinage de K relativement compact dans W et si X est l'un des champs de vecteurs (2.6) on voit en utilisant les formules (2.7) et en majorant le module des dérivées de $Tu(y, \lambda, \mu)$ par la formule de Cauchy appliquée sur un polydisque de centre y de rayon $\sim \frac{\varepsilon}{\lambda\mu^2}$ (ε petit) que (2.4) entraîne

$$|T^2(Xu)(y, \lambda, \mu)| \leq C_N \lambda^\sigma (\lambda\mu^2)^{-N+1} e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\mathrm{Im}\ y)^2} \tag{2.8}$$

pour $y \in W'$. Itérant ce raisonnement, on voit qu'il existe un voisinage de K, toujours noté W, un réel σ et pour toute famille $X_1, \cdots, X_k$ de champs de vecteurs de la forme (2.6) une constante $C > 0$ avec

$$|T^2(X_1 \cdots X_k u)(y, \lambda, \mu)| \leq C \lambda^\sigma e^{\frac{\lambda\mu^2}{2}(\mathrm{Im}\ y)^2}. \tag{2.9}$$

Utilisant une formule d'inversion classique [10] permettant d'exprimer Tu à partir de $T^2 u$, on déduit de (2.9) qu'il existe V voisinage de $(z_0', -i\zeta_0'')$ dans $\mathbf{C}^n$, $\sigma \in \mathbf{R}$ et pour toute famille $X_1, \cdots, X_k$ de champs de la forme (2.6) une constante $C > 0$ avec

$$|T(X_1 \cdots X_k u)(x, \lambda)| \leq C \lambda^\sigma e^{\frac{\lambda}{2}(\mathrm{Im}\ x)^2} \tag{2.10}$$

pour tout $x \in V$, tout $\lambda \geq 1$. Le théorème de caractérisation des espaces de Sobolev par transformation de FBI de [9] montre alors qu'il existe s (ne dépendant que de σ) tel que

$X_1 \cdots X_k u \in H^s$ sur un voisinage conique uniforme de $(z_0', 0; 0, \zeta_0'')$ dans $T^*\mathbf{R}^n$. L'assertion ii) du théorème en résulte.

Remarque Dans le cadre de la deuxième microlocalisation de Bony [4] ou de Bony-Lerner [6] l'énoncé analogue au théorème 2.2 ci-dessus est trivial : il résulte immédiatement des définitions. Cela ne peut toutefois pas être utilisé ici puisque l'équivalence de ces notions avec la deuxième microlocalisation de Sjöstrand que nous employons n'est pas établie. Le théorème précédent constituerait d'ailleurs le premier pas pour la preuve d'une telle équivalence.

Pour prouver le théorème 1.4, il nous suffira d'établir les inclusions i) du théorème 2.2. On a en effet :

Lemme 2.3.— *Soient $s_1 \leq s_2$ deux réels. Alors $H^{s_2}_{\text{loc}} \cap H^{s_1,+\infty}_{\Sigma} \subset H^{s_2-,+\infty}_{\Sigma}$.*

3 Indication de la preuve du théorème 1.4

Il nous faut donc montrer que sous l'hypothèse (H) la solution u de (0.2) vérifie

$$WF^{2,1}_{\Lambda}(u|_{\Omega'})_{|\Lambda'} \subset T^*_{\Lambda}\Lambda\ . \tag{3.1}$$

1ère étape : majoration de $WF^{2,1}_{\Lambda}(u)$ à partir du deuxième front d'onde de distributions explicites.

En adaptant la méthode de [12] au cadre 2-microlocal, on prouve qu'il existe une famille de distributions $\mathcal{D}$, chaque élément $|D|$ de $\mathcal{D}$ étant défini sur $\Omega^{M(|D|)+1}$($M(|D|)$ entier) et s'exprimant à l'aide de produits de solutions élémentaires e_+ de $\square$ à support dans le futur et des données de Cauchy u_0, u_1, telle que

$$WF^{2,1}_{\Lambda}(u) \subset \bigcup_{|D|\in\mathcal{D}} \overline{\{(q,q^*) \in T^*\Lambda\ ; \exists (z_1,\cdots,z_{M(|D|)}) \in \Omega^{M(|D|)} \text{ avec } (q,z_1,\cdots,z_{M(|D|)}\ ; q^*,0,\cdots,0) \in WF^{2,1}_{\Lambda}(|D|)\}} \tag{3.2}$$

l'ensemble $WF^{2,1}_{\Lambda}(|D|)$ désignant le deuxième front d'onde de $|D|$ le long de la lagrangienne $T^*_{\Sigma\times\Omega^{M(|D|)}}(\Omega \times \Omega^{M(|D|)})$.

Nous ne rappellerons pas ici la forme générale des éléments de $\mathcal{D}$ pour laquelle on renvoie à [12], [8]. Un exemple typique est donné par :

$$|D| = [D].\{D\} \tag{3.3}$$

avec

$$[D](z_0,\cdots,z_M) = \prod_{j=1}^{M} e_+(z_0 - z_j), \{D\}(z_1,\cdots,z_M) = \prod_{j=1}^{M} \delta_{\{t_j=0\}} \otimes u_1(x_j) \tag{3.4}$$

où dans la dernière expression on a noté $z_j = (t_j, x_j) \in \mathbf{R} \times \mathbf{R}^d$ et $u_1(x_j)$ est l'une des données de Cauchy du problème (0.2).

2ème étape : Majoration géométrique de $WF^{2,1}_{\Lambda}(|D|)$.

D'après (3.2) il nous faut montrer que sous les hypothèses du théorème 1.4 on a :

Lemme 3.1.— *Soit* $(q, q^*) \in T^*\Lambda$ *avec* $q \in \Lambda'$ *tel qu'il existe* $|D| \in \mathcal{D}$ *et* $(z_1, \cdots, z_{M(|D|)}) \in \Omega^{M(|D|)}$ *avec* $(q, z_1, \cdots, z_{M(|D|)}; q^*, 0, \cdots, 0) \in WF_\Lambda^{2,1}(|D|)$. *Alors* $q^* = 0$.

Idée de la preuve : on utilise la deuxième microlocalisation simultanée de [7]. On écrit d'abord que

$$[D] \cdot \{D\} = [D](z_0, \cdots, z_M) \otimes \{D\}(\tilde{z}_1, \cdots, \tilde{z}_M)_{|N} \tag{3.5}$$

où N est la diagonale d'équations $z_j = \tilde{z}_j$ $j = 1, \cdots, M$. D'après [7] on sait alors que

$$WF_\Lambda^{2,1}(([D] \otimes \{D\})_{|N}) \subset \bigcup_{I \subset \{1, \cdots, M\}} \rho_I(WF_{\Lambda_I}^{2,1}([D] \otimes \{D\}) \cap V_I) \tag{3.6}$$

où Λ_I est une famille de lagrangiennes $\Lambda_I = (\Lambda_{I,0}, \cdots, \Lambda_{I,M})$ avec $\Lambda_{I,0} = T_\Sigma^*\Omega'$ $\Lambda_{I,j} = T^*_{\{z_j = \tilde{z}_j\}}(\Omega \times \Omega)$ si $j \in I, \Lambda_{I,j} = T^*_{\Omega \times \Omega}(\Omega \times \Omega)$ si $j \in \{1, \cdots, M\} - I, WF_{\Lambda_I}^{2,1}(\cdot)$ est le deuxième front d'onde simultané défini dans [7], V_I une sous-variété de $\prod_{j=0}^M T^*\Lambda_{I,j}$ et $\rho_I : V_I \to T^*\Lambda$ une projection convenable. De plus, comme le deuxième front d'onde simultané est contenu dans le deuxième micro-support simultané (i.e. la notion analogue dans le cadre analytique), le membre de droite de (3.6) s'estime par

$$\bigcup_{I \subset \{1, \cdots, M\}} \rho_I(C_{\Lambda_I^{\mathbf{C}}}(\Lambda_{[D]} \otimes \Lambda_{\{D\}}) \cap V_I) \tag{3.7}$$

où $\Lambda_I^{\mathbf{C}}$ est complexifiée de $\Lambda_I, C_{\Lambda_I^{\mathbf{C}}}(\cdot)$ est le cône normal simultané de [7] et dans le cas de l'exemple (3.4) :

$$\begin{aligned}\Lambda_{[D]} = \{(z_0, \cdots, z_M; \zeta_0, \cdots, \zeta_M) \in T^*\mathbf{C}^{1+d} \times \cdots \times T^*\mathbf{C}^{1+d}; \zeta_0 = \zeta_1 + \cdots + \zeta_M \\ (z_0 - z_j, \zeta_j) \in T^*_{\mathbf{C}^{1+d}}\mathbf{C}^{1+d} \cup T^*_{\Gamma^{\mathbf{C}}}\mathbf{C}^{1+d} \cup T^*_{\{0\}}\mathbf{C}^{1+d}\}\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{\{D\}} = \{(z_0, \cdots, z_M; \zeta_0, \cdots, \zeta_M) \in T^*\mathbf{C}^{1+d} \times \cdots \times T^*\mathbf{C}^{1+d}; \zeta_0 = 0, \\ (z_j; \zeta_j) = (t_j, x_j; \tau_j, \xi_j) \quad \text{avec} \quad t_j = 0 \quad \text{et soit} \quad \xi_j = 0 \quad \text{soit} \quad (x_j, \xi_j) \in T^*_{V^{\mathbf{C}}}\mathbf{C}^d\}\end{aligned} \tag{3.9}$$

(en notant $\Gamma^{\mathbf{C}}$ la variété complexifiée de la partie lisse du cône d'onde de sommet 0).

Revenant à la définition de $C_{\Lambda_I^{\mathbf{C}}}(\cdot)$ on déduit des inclusions (3.6) - (3.7) que si $\mathcal{E}$ est un ensemble de suites admissibles avec $\mathcal{A}_V \subset \mathcal{E}$ et si $(q, q^*) = (z_0', \zeta_0''; z_0'^*, \zeta_0''^*)$ est comme dans l'énoncé du lemme, il existe $p \in \mathbf{N}$, p suites $(z_m, \zeta_m^j) \in \mathcal{E}$ $j = 1, \cdots, p$ et une suite $(u_m)_m$ de $\mathbf{R}_+^*$ avec $u_m \to 0$ telles que si on pose $\zeta_m = \zeta_m^1 + \cdots + \zeta_m^p$ on ait

$$\begin{aligned} z_m' &\to z_0' \\ u_m\zeta_m'' &\to \zeta_0'' \\ \zeta_m' &\to z_0'^* \\ -z_m''/u_m &\to \zeta_0''^* \end{aligned} \tag{3.10}$$

(cf. [12], [8] pour les détails de la preuve).

Si $\mathcal{E}$ vérifie l'hypothèse (H), on a $\zeta_m' \to 0, z_m''.\zeta_m'' \to 0$. Alors (3.10) entraîne $z_0'^* = 0, \zeta_0''.\zeta_0''^* = 0$. Comme par hypothèse $\zeta_0'' \neq 0$ on a $(z_0'^*, \zeta_0''^*) = 0$ d'où le lemme 3.1 et, d'après (3.2), le théorème 1.4.

Bibliographie

[1] M. Beals : Vector fields associated to the nonlinear interaction of progressing waves, Indiana University Mathematics Journal, vol 37, n°3, (1988) p.637-666.

[2] M. Beals : Singularities in solutions to nonlinear hyperbolic problems, Preprint Rutgers University, 94p.

[3] J.M. Bony : Interaction des singularités pour les équations aux dérivées partielles non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. n°2 (1981-82).
Interaction des singularités pour les équations de Klein-Gordon non-linéaires, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. n°10 (1983-84).

[4] J.M. Bony : Second microlocalisation and propagation of singularities for semi-linear hyperbolic equations, Proceedings of the International Taniguchi Symposium HERT, Kotaka and Tokyo 1984, Academic Press, p.11-49.

[5] J.M. Bony : Singularités des solutions de problèmes de Cauchy hyperboliques non linéaires, Prépublications de l'Université Paris-Sud (1985).

[6] J.M. Bony et N. Lerner : Quantification asymptotique et microlocalisations d'ordre supérieur, Séminaire Equations aux Dérivées Partielles, Ecole Polytechnique, exp. n°2-3, (1986-87).

[7] J.M. Delort : Deuxième microlocalisation simultanée et front d'onde de produits, preprint, Université de Rennes I, 74p.

[8] J.M. Delort : Conormalité des ondes semi-linéaires le long des caustiques, preprint, Université de Rennes I.

[9] P. Gérard : Moyennisation et régularité deux-microlocale, Rapport de recherche du CMA, Département de Mathématiques et d'Informatique, Ecole Normale Supérieure, 41p.

[10] G. Lebeau : Deuxième microlocalisation à croissance, Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz, exp. n°15, (1982-83).

[11] G. Lebeau : Deuxième microlocalisation sur les sous-variétés isotropes, Ann. Inst. Fourier, Grenoble, vol. 35, (2), (1985), p.145-216.

[12] G. Lebeau : Equations des ondes semi-linéaires II. Contrôle des singularités et caustiques non-linéaires. A paraître dans "Inventiones Mathematicae".

[13] G. Lebeau : Front d'onde des fonctions non linéaires et polynômes, Séminaire Equations aux Dérivées partielles, Ecole Polytechnique (ce volume) exposé n°10.

[14] R. Melrose et N. Ritter : Interaction of nonlinear progressing waves. Annals of Math.121 (1985) p.187-213.

[15] J. Sjöstrand : Singularités analytiques microlocales, Astérisque 95, (1982).

J.M. Delort
IRMAR
Université de Rennes I
L.A. n°305
Campus de Beaulieu
35042 RENNES Cedex