Gérard Bourdaud

Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels de type $1,1$

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. n° 7, p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A7_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

UNE ALGEBRE MAXIMALE D'OPERATEURS PSEUDO-DIFFERENTIELS DE TYPE 1,1

Gérard BOURDAUD

Exposé n° VII

15 Décembre 1987

Les symboles satisfaisant les estimations

$$|\partial_\xi^\alpha \partial_x^\beta \sigma(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}(1+|\xi|)^{|\beta|-|\alpha|} \quad (x,\xi \in \mathbf{R}^n)$$

constituent la classe "interdite" $S^0_{1,1}$; on constate en effet une faillite totale du calcul pseudo-différentiel ordinaire :

a) la classe d'O.P.D. $\mathrm{Op}S^0_{1,1}$ n'est pas auto-adjointe ;

b) ce n'est pas une algèbre ;

c) elle contient des opérateurs qui ne sont pas bornés sur $L^2(\mathbf{R}^n)$.

C'est la propriété a) qui contient, en quelque sorte, toute la pathologie de $\mathrm{Op}S^0_{1,1}$; on montre en effet ([2],[4]) que la classe symétrisée

$$(\mathrm{Op}S^0_{1,1}) \cap (\mathrm{Op}S^0_{1,1})^*$$

est une algèbre (auto-adjointe !) d'opérateurs bornés sur L^2 ; c'est évidemment la plus grande sous-algèbre auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2)$ qui soit contenue dans $\mathrm{Op}S^0_{1,1}$ - d'où le titre de l'exposé.

Un exercice facile d'analyse de Fourier (voir, par exemple, [3], Chapitre V) consiste à vérifier que le noyau-distribution $K(x,y)$ d'un opérateur de la classe $\mathrm{Op}S^0_{1,1}$ est ≪ standard de classe C^∞ ≫ .

Autrement dit, K est, en dehors de la diagonale, une fonction C^∞ vérifiant les estimations

$$(1) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta}|x-y|^{-n-|\alpha|-|\beta|} \ ;$$

les inégalités (1) ne sont significatives que pour $|x-y|$ voisin de 0 ; on a en effet :

$$(2) \qquad |\partial_x^\alpha \partial_y^\beta K(x,y)| \leq C_{\alpha,\beta,N}|x-y|^{-N} \ (|x-y| \geq 1) \ .$$

Les estimations (1) et (2) ne suffisent évidemment pas pour caractériser $\mathrm{Op}S^0_{1,1}$ (elles sont trivialement satisfaites par tout noyau- distribution porté par la diagonale !).

Quelle condition doit-on ajouter à (1) et (2) pour obtenir $\mathrm{Op}\,S^0_{1,1}$? A cette question, nous donnerons une réponse triple.

Parmi les opérateurs ayant un noyau standard, ceux de $\mathrm{Op}\,S^0_{1,1}$ sont caractérisés :

1° - par leur continuité H^s $(s>0)$,

2° - par leur effet sur certains "atomes " ,

3° - par leur effet sur les polynômes.

Nous consacrerons les premiers paragraphes à développer ces 3 points ; le quatrième contiendra des éléments de preuve ; au cinquième paragraphe, on énonce la propriété de composition.

Dans un travail récent [8], L.Hörmander se propose d'étudier la classe $\mathrm{Op}\,S^0_{1,1}$ en travaillant exclusivement avec les symboles ; nous rappellerons au paragraphe 6 comment il caractérise les symboles de l'algèbre maximale et nous démontrerons une version simplifiée de cette caractérisation.

On a regroupé en annexe d'une part, un théorème de continuité H^s pour les intégrales singulières - généralisation des résultats de P-G. Lemarié [9] - d'autre part une famille de contre-exemples, dont l'origine remonte aux travaux de Ching [5].

I Continuité sur les espaces de Sobolev.

Nous noterons H_p^s l'espace de Sobolev généralisé $(I-\Delta)^{-s/2}L^p$ $(s \in \mathbf{R}, 1 < p < +\infty)$; pour $s \in \mathbf{R}$ et $(p,q) \in [1,+\infty]^2$, $B_p^{s,q}$ désignera l'espace (de Besov) des $f \in \mathcal{S}'$ telles que

$$\left(2^{sj}\|\Delta_j f\|\right)_{j\geq 0} \in \ell^q ,$$

où $f = \sum_{j\geq 0} \Delta_j f$ est une décomposition de Littlewood- Paley inhomogène (voir [3], Chapitre VI) ; rappelons que $B_2^{s,2}$ est l'espace de Sobolev usuel H^s et que $B_\infty^{s,\infty}$ est l'espace de Hölder C^s , pour s positif, non entier.

Proposition 1.— *Si $T \in \operatorname{Op} S_{1,1}^0$, alors T est continu sur H_p^s $(s > 0$, $p \in]1,+\infty[)$ et $B_p^{s,q}$ $(s > 0$, $(p,q) \in [1,+\infty]^2)$; de plus, T envoie $B_p^{0,1}$ dans L^p , pour $p \in [1,+\infty]$.*

Réciproquement, soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, dont le noyau-distribution vérifie (1) et (2). S'il existe un $p \in]1,+\infty[$ (resp. un $p \in [1,+\infty[$ et un $q \in [1,+\infty])$ tel que T soit continu sur H_p^s (resp. $B_p^{s,q}$) pour tout $s > 0$, alors T appartient à $\operatorname{Op} S_{1,1}^0$.

La continuité H^s et C^s apparaît dans un cours de E-M. Stein à Princeton (1972-73), l'estimation H_p^s chez Y. Meyer [12]. La continuité Besov (y compris le cas $s = 0$) a été obtenue par G. Bourdaud ([2], [4]) ; P-G. Lemarié la retrouve, dans le cas $0 < s < 1$, comme conséquence de son théorème sur les intégrales singulières [9].

La continuité H^s a reçu de nombreux perfectionnements et variantes, visant soit à optimiser les hypothèses de régularité en x et/ou en ξ , soit à élargir la classe des espaces de Sobolev-Besov ; citons - entre autres contributions - les travaux de Marschall [10], Runst [16], Sugimoto [17], Yamazaki [21].

Le fait que la continuité H^s $(s > 0)$ puisse entraîner $T \in \operatorname{Op} S_{1,1}^0$ a été observé, indirectement, par L. Hörmander ([8], Théorèmes 3.6 et 4.2).

Notons enfin que la continuité $B_2^{0,1} \to L^2$ est, en un sens, optimale : il existe un opérateur $T \in \operatorname{Op} S_{1,1}^0$ tel que

1) pour tout $q > 1$, T n'admet pas d'extension comme opérateur continu de $B_2^{0,q}$ dans $\mathcal{D}'$;

2) pour tout $q < 2$, T n'est pas continu de $B_2^{0,1}$ dans $B_2^{0,q}$ (voir l'Annexe II).

II La caractérisation atomique.

La philosophie de l'école de St-Louis (Guido Weiss et ses élèves) , c'est qu'on peut tout connaître sur un opérateur en observant qu'il transforme certaines fonctions très simples - les atomes - en d'autres fonctions un peu plus compliquées, les molécules.

Ici nous appellerons *atome de classe C^m, d'échelle $\lambda > 0$*, une fonction f, de classe C^m, portée par une boule de rayon λ, telle que $\|f^{(\alpha)}\|_\infty \leq \lambda^{-|\alpha|}$ pour $|\alpha| \leq m$.

On obtient la notion de molécule de classe C^m, d'échelle λ, en supprimant la condition de support.

Proposition 2.— *Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ dont le noyau-distribution vérifie (1) et (2).*

Alors T appartient à $\operatorname{Op} S^0_{1,1}$ si et seulement s'il existe un entier positif N et une suite $(\varepsilon_m)_{m\in\mathbf{N}}$ de nombres positifs tels que, pour tout atome f, de classe C^{m+N}, d'échelle $\lambda \leq 1$, $\varepsilon_m(Tf)$ soit une molécule de classe C^m, de même échelle.

Remarques

1° - La caractérisation ci-dessus peut être vue comme une forme faible de continuité C^m : il y a perte de régularité mais l'homogénéité est conservée. De toutes façons, il n'est pas possible de faire $N = 0$: cela entraînerait la continuité C^m (m entier), propriété que ne possèdent pas les O.P.D. de la "bonne" classe $S^0_{1,0}$.

2° - La définition de molécule adoptée ici est volontairement "hérétique" ; si on souhaite caractériser $S^0_{1,1}$ de façon purement moléculaire (i.e. sans plus faire référence au noyau $K(x,y)$), il est nécessaire d'imposer aux molécules une condition de décroissance rapide à l'infini ; c'est ce que fait Yves Meyer ([13], Théorème 3) dans un contexte différent.

III L'action sur les polynômes.

Depuis les travaux de David-Journé [6] et de Lemarié [9], on sait que les propriétés de continuité d'un opérateur intégral singulier peuvent s'obtenir en combinant une forme faible de continuité (la propriété WB de David-Journé) avec le contrôle de $T(1)$.

Les développements ultérieurs de Martin Meyer [11], Yabuta ([19], [20]), Elhodaibi [7], ont montré que, pour obtenir la continuité, disons sur H^s, il faut contrôler non seulement $T(1)$, mais encore $T(x^\alpha)$ pour $|\alpha| \leq s$.

Il convient d'abord de préciser ce qu'on entend par $T(x^\alpha)$.

Lemme 1.— *Si $T\ :\mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ vérifie (1) et (2), alors T se prolonge naturellement aux fonctions C^∞ à croissance polynomiale.*

Si f est une telle fonction, on pose en effet

$$\langle \tilde{T}f, \varphi\rangle = \langle T(f\psi), \varphi\rangle + \iint K(x,y)f(y)(1-\psi(y))\varphi(x)dxdy$$

où $\varphi \in \mathcal{D}$, et $\psi \in \mathcal{D}$ vaut 1 sur un voisinage du support de φ. Alors $\tilde{T}f$ est la limite dans $\mathcal{D}'$ de $T(f\psi_\varepsilon)$, où $\psi(x) = \psi(\varepsilon x)$; il s'agit donc bien d'un prolongement par continuité (voir [3], page 140). CQFD

Désignons par r_α la fonction polynôme $x \mapsto x^\alpha$. Si T vérifie (1) et (2), le commutateur $[T, r_{e_j}]$, que nous noterons $\Gamma_j(T)$, vérifie encore (1) et (2). L'identité $\Gamma_j \circ \Gamma_k = \Gamma_k \circ \Gamma_j$ permet de définir les commutateurs itérés Γ^α par la formule de récurrence $\Gamma^{\alpha+e_j} = \Gamma_j \circ \Gamma^\alpha$ (pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$) ; une nouvelle récurrence sur α donne le "développement de Taylor" de $T(r_\alpha)$:

$$T(r_\alpha) = \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!(\alpha-\beta)!} r_{\alpha-\beta}\Gamma^\beta(T)(1)\,. \tag{3}$$

Rappelons enfin que $T : \mathcal{D} \to \mathcal{D}'$ *possède la propriété* (WB) s'il existe $C > 0$ et $m \in \mathbf{N}$ tels que, pour tout couple (φ, ψ) d'atomes de classe C^m d'échelle λ, on ait

$$|\langle T\varphi, \psi\rangle| \leq C\lambda^n \ .$$

Proposition 3.— *Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$ dont le noyau-distribution vérifie (1) et (2). Alors T appartient à $S^0_{1,1}$ si et seulement si :*

(i) T possède la propriété (WB) ;

(ii) pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$, $\Gamma^\alpha(T)(1)$ est une fonction C^∞ dont toutes les dérivées sont bornées.

IV Démonstrations des Propositions 1,2,3 .

a) De $S^0_{1,1}$ à l'action sur les polynômes.

Soit $\sigma \in S^0_{1,1}$ et $T = \mathrm{Op}(\sigma)$. Le seul fait que σ soit une fonction bornée sur $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ entraîne que T possède la propriété (WB) (voir [3], VII.34). Par ailleurs, les identités de commutation classiques pour les O.P.D (voir [8]) montrent que $\Gamma^\alpha(T)$ n'est autre que l'O.P.D. de symbole $(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha_\xi \sigma(x,\xi)$; autrement dit, $\Gamma^\alpha(T)(1)$ est la fonction $(-i)^{|\alpha|}\partial^\alpha_\xi \sigma(x,0)$, évidemment bornée, ainsi que ses dérivées.

b) De l'action sur les polynômes à la continuité H^s.

Il s'agit d'un théorème analogue à celui de P-G. Lemarié [9] dont la démonstration est indiquée en Annexe I.

c) De la continuité H^s aux atomes.

Supposons qu'il existe un $p \in]1, +\infty[$ (resp. un $p \in [1, +\infty[$ et un $q \in [1, +\infty]$) tel que T soit continu sur H^s_p (resp. $B^{s,q}_p$) pour tout $s > 0$.

Par interpolation, on en déduit aussitôt que T est borné sur $B^{s,1}_p$, pour tout $s > 0$. Soit N le premier entier supérieur à $\frac{n}{p}$, et φ un atome de classe C^{m+N} , d'échelle $\lambda \leq 1$. On a alors, pour $|\alpha| \leq m$,

$$\begin{aligned} \|\partial^\alpha(T\varphi)\|_\infty &\leq C\|\partial^\alpha(T\varphi)\|_{B^{n/p,1}_p} \\ &\leq C'\|T\varphi\|_{B^{n/p+|\alpha|,1}_p} \\ &\leq C''\|\varphi\|_{B^{n/p+|\alpha|,1}_p} \\ &\leq C'''\lambda^{-|\alpha|} \end{aligned}$$

(où les diverses constantes C dépendent de m, n, p, et T).

d) Des atomes à $S^0_{1,1}$.

Supposons que T vérifie la condition "atomique" de la Proposition 2. Le symbole de T s'écrit alors

$\sigma(x,\xi) = \rho_\lambda(x,\xi) + \tau_\lambda(x,\xi)$, où

$$\rho_\lambda(x,\xi) = \int K(x,y)e^{i\xi.(y-x)}\varphi(\lambda(y-x))dy \tag{4}$$

($\varphi \in \mathcal{D}$ est portée par la boule unité, et vaut 1 au voisinage de 0) ; le second membre de (4) n'est pas une intégrale de Lebesgue, il représente l'action de T sur l'atome $y \mapsto e^{i\xi.(y-x)}\varphi(\lambda(y-x))$. Le terme complémentaire se traite à l'aide des estimations (1) et (2) du noyau de T . On obtient les inégalités $S^0_{1,1}$ en faisant $\lambda = |\xi|$. Les détails de la preuve figurent dans [2] (pages 96 à 99).

V L'algèbre maximale.

Si T est un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, son adjoint T^* envoie également $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$; il est défini par

$$\langle T^*f, g\rangle = \overline{\langle T\bar{g}, \bar{f}\rangle} \ (f, g \in \mathcal{D}) \ .$$

On désignera par $\mathcal{A}$ l'ensemble des $T \in \operatorname{Op} S^0_{1,1}$ tels que $T^* \in \operatorname{Op} S^0_{1,1}$. Les propriétés (1), (2) et (WB) sont évidemment auto-adjointes : pour que $T \in \operatorname{Op} S^0_{1,1}$, appartienne à $\mathcal{A}$, il faut et il suffit que T^* vérifie l'une des conditions énoncés dans les Propositions 1,2,3.

En particulier, T^* étant alors borné sur $H^s_{p'}$ $(s > 0)$, T est borné sur H^{-s}_p et, par interpolation complexe, T est borné sur L^p.

Ainsi $\mathcal{A}$ s'identifie à une partie auto-adjointe de $\mathcal{L}(L^2)$; le fait que $\mathcal{A}$ soit une algèbre résulte de la proposition suivante :

Proposition 4.— *Si $T_1 \in \operatorname{Op} S^0_{1,1}$ et $T_2 \in \mathcal{A}$, alors $T_1 \circ T_2 \in \operatorname{Op} S^0_{1,1}$.*

Preuve : Puisque $T_1 \circ T_2$ est borné sur H^s $(s > 0)$, il nous suffira d'estimer le noyau de $T_1 \circ T_2$. Désignant par K_j le noyau de T_j, il s'agit de donner un sens à l'écriture formelle

$$K(x,y) = \int K_1(x,z)K_2(z,y)dz \ . \tag{5}$$

Soit h une fonction C^∞ sur $\mathbf{R}^+$, portée par $[0,1]$, égale à 1 sur $[0,1/2]$ et
$\varphi_a(t) = h(a|t|)$, $\psi_a(t) = h(a|t|^{-1})$, $\theta_a(t) = 1 - \varphi_a(t) - \psi_a(t)$.

Pour interpréter (5) quand

$$\frac{1}{a\lambda} < |x-y| < \frac{a}{\lambda} \ ,$$

on introduit dans "l'intégrale" du second membre la partition de l'unité

$$1 = \varphi_a(\lambda(x-z)) + \psi_a(\lambda(x-z)) + \theta_a(\lambda(x-z)) \ ;$$

cela conduit à écrire $K(x,y)$ comme la somme de 3 termes.

Celui contenant φ s'analyse comme l'effet de T_1 sur un certain atome ; celui contenant θ comme l'effet de T_2^* sur un autre atome ; le troisième terme est une intégrale convergente.

Les estimations de K s'obtiennent en jouant sur les paramètres $a > 1$ et $\lambda > 0$ (voir les détails dans [2], pages 101 à 104).

VI La condition de Hörmander.

Soit $T = \mathrm{Op}(\sigma)$ un opérateur de la classe $\mathrm{Op}\, S^0_{1,1}$. Le symbole τ de T^* est donné par l'identité

$$\hat{\tau}(\xi,\eta) = \overline{\hat{\sigma}(-\xi,\xi+\eta)} \ ,$$

où $\xi \mapsto \hat{\tau}(\xi,\eta)$ désigne la transformée de Fourier de $x \mapsto \tau(x,\eta)$.

Pour que T appartienne à l'algèbre maximale, il est nécessaire que $T^*(1)$ soit une fonction C^∞ , bornée ainsi que toutes ses dérivées. Observons - sans souci de rigueur - que $T^*(1)$ n'est autre que $\tau(x,0)$, autrement dit que la transformée de Fourier de $T^*(1)$ est $\overline{\hat{\sigma}(-\xi,\xi)}$. De sorte que les symboles de l'algèbre maximale seront caractérisés par le comportement raisonnable de $\hat{\sigma}(\xi,\eta)$ sur la seconde diagonale $\xi = -\eta$.

Pour préciser tout cela, L. Hörmander introduit un "cut-off" convenable de $\hat{\sigma}(\xi,\eta)$ au voisinage de $\xi = -\eta$. Soit $\chi \in C^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, à support dans

$$\{(\xi,\eta) \ / \ |\xi| \le |\eta| \ , \ |\eta| \ge 1\} \ ,$$

égale à 1 sur

$$\{(\xi,\eta) \ / \ 2|\xi| \le |\eta| \ , \ |\eta| \ge 2\} \ ,$$

homogène pour $|\eta| \ge 2$, et

$$\widehat{d_t}(\xi,\eta) = \chi(\xi+\eta, t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta) \ .$$

Alors ([8], Théorème 4.2) $\mathrm{Op}(\sigma)^* \in S^0_{1,1}$ si et seulement si

$$\left|\partial_\eta^\alpha \partial_x^\beta d_t(x,\eta)\right| \le C_{\alpha,\beta,N} t^N (1+|\eta|)^{|\beta|-|\alpha|} \tag{6}$$

pour $t \in]0,1]$, $\alpha,\beta \in \mathbf{N}^n$, $N \in \mathbf{N}$.

Dans le "cut-off" de Hörmander, nous remplacerons la condition $|\eta| \gtrsim t^{-1}$ par $|\eta| \sim t^{-1}$; alors $|\xi+\eta|$ est majoré par une petite constante et, dans l'inégalité (6), on peut laisser tomber $(1+|\eta|)^{|\beta|-|\alpha|}$, absorbé par une puissance convenable de t, ainsi que les dérivées en x, qu'on estime à l'aide de l'inégalité de Bernstein.

Donnons-nous deux fonctions C^∞ radiales positives ω, θ , telles que

- ω soit à support compact, égale à 1 pour

$|\xi| \le 1$,

- θ soit à support compact dans $\mathbf{R}^n\setminus\{0\}$, égale à 1 pour $a \leq |\xi| \leq b$.

Posons :

$$\hat{d}_{t,r}(\xi,\eta) = \omega(r^{-1}(\xi+\eta))\theta(t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta) \ .$$

Proposition 5.— *Soit $\sigma \in S^0_{1,1}$; pour qu'on ait $\mathrm{Op}(\sigma)^* \in S^0_{1,1}$ il faut et il suffit qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tous $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $N \in \mathbf{N}$, $t \in]0,1]$, on ait*

(7)
$$\left|\partial^\alpha_\eta d_{t,r}(x,\eta)\right| \leq C_{\alpha,N} t^N \ (\forall x,\eta \in \mathbf{R}^n) \ .$$

Avant d'aborder la preuve proprement dite, faisons deux remarques :

1° *Le choix des fonctions ω, θ n'importe pas.*
Considérons, plus précisément, $g \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n)$, $f \in \mathcal{D}(\mathbf{R}^n\setminus\{0\})$ et posons

$$\hat{v}_{t,r}(\xi,\eta) = g(r^{-1}(\xi+\eta))f(t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta).$$

En multipliant au besoin θ par une constante positive, on peut supposer :

$$\int_0^\infty \theta(t\eta)\frac{dt}{t} = 1 \quad (\eta \neq 0) \ ,$$

de sorte qu'il existe des constantes k_1, k_2, ne dépendant que du support de f, telles que

$$f(t\eta) = \int_{k_1}^{k_2} \theta(ts\eta)f(t\eta)\frac{ds}{s} \ .$$

Si le support de g est contenu dans la boule $|\xi| \leq R$,

$$\hat{v}_{t,rR^{-1}}(\xi,\eta) = \int_{k_1}^{k_2} g(r^{-1}R(\xi+\eta))f(t\eta) \ \hat{d}_{ts,r}(\xi,\eta)\frac{ds}{s} \ ,$$

d'où

$$v_{t,rR^{-1}}(x,\eta) = f(t\eta)\int_{k_1}^{k_2} \frac{ds}{s}\left\{\int_{\mathbf{R}^n} e^{-i\eta\cdot y}(\frac{r}{R})^n \check{g}(\frac{r}{R}y)d_{ts,r}(x-y,\eta)dy\right\} .$$

On en déduit facilement que $v_{t,rR^{-1}}(x,\eta)$ vérifie les mêmes estimations (7) que $d_{t,r}(x,\eta)$.

2° *Si $\sigma(x,\eta)$ vérifie (7), il en est de même pour $\partial^\alpha_\eta\sigma(x,\eta)$, pour tout $\alpha \in \mathbf{N}^n$.*

Il suffit évidemment de le prouver pour $\alpha = e_j$; autrement dit, d'estimer $d_{t,r,j}(x,\eta)$, où

$$\widehat{d_{t,r,j}}(\xi,\eta) = \omega(r^{-1}(\xi+\eta))\theta(t\eta)\widehat{\frac{\partial\sigma}{\partial\eta_j}}(\xi,\eta) \ .$$

On observe alors que

$$\frac{\partial}{\partial \eta_j}(\widehat{d_{t,r}}(\xi,\eta))-\widehat{d_{t,r,j}}(\xi,\eta) = r^{-1}\,\partial_j\omega(r^{-1}(\xi+\eta))\theta(t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta)+t\,\omega(r^{-1}(\xi+\eta))\partial_j\theta(t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta),$$

deux termes qui s'estiment suivant la remarque $n^\circ 1$.

Preuve de la Proposition 5.

Supposons d'abord que le symbole $\tau(x,\eta)$ de $\mathrm{Op}(\sigma)^*$ appartienne à $S^0_{1,1}$. Nous allons prouver l'estimation (7) pour $x=0$ - un argument de translation donne alors le cas général. On a

$$d_{t,r}(0,\eta) = (2\pi)^{-n}\theta(t\eta)\int e^{i\eta\cdot x}\left(\int \overline{\tau(x,\varsigma)}\omega(r^{-1}\varsigma)e^{-i\varsigma\cdot x}d\varsigma\right)dx\ ,$$

autrement dit

(8) $$d_{t,r}(0,\eta) = \theta(t\eta)\ \hat{g}(-\eta)\ ,$$

où $\overline{g(x)} = \mathrm{Op}(\tau)\ (r^n\check{\omega}(r(.)))$.

On a, par hypothèse, $\tau \in S^0_{1,1}$; d'où on déduit facilement que $\mathrm{Op}(\tau)$ envoie $\mathcal{S}$ dans $\mathcal{S}$ (voir [8], Prop. 2.1). Alors $\hat{g}\in\mathcal{S}$ et l'égalité (8) entraîne aussitôt (7).

Partant maintenant de l'hypothèse (7), nous allons vérifier, à l'aide de la Proposition 3, que l'adjoint de $T=\mathrm{Op}(\sigma)$ appartient à $S^0_{1,1}$; il nous faudra pour cela estimer les fonctions $m_\alpha = \Gamma^\alpha(T^*)(1)$.

Soit ψ une fonction C^∞, radiale, positive, à support dans la couronne $a\le|\xi|\le b$, normalisée de sorte que

$$\int_0^\infty \psi(t\xi)\frac{dt}{t} = 1 \quad (\xi\neq 0)\ .$$

Posons en outre

$$\varphi(\xi) = 1-\int_0^1 \psi(t\xi)\frac{dt}{t} \quad (\forall\xi\in\mathbf{R}^n).$$

Nous allons vérifier les estimations

(9) $$\|\varphi(D)m_\alpha\|_\infty \le C_\alpha\ ,$$

(10) $$\|\psi(tD)m_\alpha\|_\infty \le C_{\alpha,N}t^N \quad (t\in]0,1], N\in\mathbf{N})\ ,$$

qui entraîneront aussitôt que m_α est C^∞, avec toutes ses dérivées bornées.

Quitte à multiplier par une constante, on peut supposer $\hat{\omega}(0)=1$ et approcher $m_0 = T^*(1)$ par les fonctions $T^*(\hat{\omega}(\varepsilon(.)))$ $(\varepsilon\to 0)$; cela nous conduit à étudier

$$\begin{aligned}
\overline{u_{\varepsilon,t}(T)} &= \langle T^*\hat{\omega}(\varepsilon(.))\ ,\ t^{-n}\check{\psi}(t^{-1}(.))\rangle \\
&= \langle \hat{\omega}(\varepsilon(.))\ ,\ T(t^{-n}\check{\psi}(t^{-1}(.)))\rangle \\
&= \iint \hat{\omega}(\varepsilon y)e^{iy.\eta}\sigma(y,\eta)\psi(t\eta)dyd\eta \\
&= \iint \varepsilon^{-n}\omega(\varepsilon^{-1}(\xi+\eta))\psi(t\eta)\hat{\sigma}(\xi,\eta)d\xi d\eta\ .
\end{aligned}$$

Pour $2\varepsilon \leq r$, $\psi(t\eta)\omega(\varepsilon^{-1}(\xi+\eta))$ est portée par $|\xi+\eta| \leq r$, $at^{-1} \leq |\eta| \leq bt^{-1}$, de sorte que

$$\begin{aligned}
\overline{u_{\varepsilon,t}(T)} &= \iint \varepsilon^{-n}\omega(\varepsilon^{-1}(\xi+\eta))\psi(t\eta)\widehat{d_{t,r}}(\xi,\eta)d\xi d\eta \\
&= \langle \hat{\omega}(\varepsilon(.)), \mathrm{Op}(d_{t,r})(t^{-n}\check{\psi}(t^{-1}(.)))\rangle
\end{aligned}$$

On estime $u_{\varepsilon,t}(T)$ en observant que $d_{t,r}$ est un symbole de la classe $S^0_{1,0}$, borné comme tel sur $B^{0,1}_1$, sous-espace de L^1 ; d'où

$$|u_{\varepsilon,t}(T)| \leq \|\hat{\omega}\|_\infty \|\check{\psi}\|_{B^{0,1}_1} \|\,\mathrm{Op}(d_{t,r})\|_{\mathcal{L}(B^{0,1}_1)}\ .$$

L'inclusion $\mathrm{Op}\, S^0_{1,0} \subset \mathcal{L}(B^{0,1}_1)$ se traduit, quantitativement, par l'existence de $C > 0$ et $M \in \mathbf{N}$, ne dépendant que de n, tels que

$$\|\,\mathrm{Op}(\rho)\|_{\mathcal{L}(B^{0,1}_1)} \leq C \sup(1+|\eta|)^{|\alpha|}|\partial^\beta_x\partial^\alpha_\eta\rho(x,\eta)|$$

(le "sup" est calculé pour tous les $x, \eta \in \mathbf{R}^n$ et tous les α, β tels que $|\alpha| \leq M$, $|\beta| \leq M$). On obtient finalement

$$|u_{\varepsilon,t}(T)| \leq Ct^N p_N(T)\ ,$$

où la semi-norme $p_N(T)$ est définie par

$$\sup\left\{t^{-N-M}\left|\partial^\alpha_\eta d_{t,r}(x,\eta)\right| / 0 < t \leq 1, |\alpha| \leq M,\ x,\eta \in \mathbf{R}^n\right\}\ .$$

Désignons par τ_x l'opérateur de translation, qui à $f(y)$ associe $f(y-x)$; on a

$$p_N(\tau_{-x}T\tau_x) = p_N(T)\ , \quad \text{d'où}$$

$$|\psi(tD)\,(T^*(\hat{\omega}(\varepsilon(.-x))))\,(x)| = |u_{\varepsilon,t}(\tau_{-x}T\tau_x)| \leq Ct^N p_N(T)\ .$$

En faisant tendre ε vers 0, on obtient

(11) $$\|\psi(tD)(T^*(1))\|_\infty \leq Ct^N p_N(T).$$

En appliquant (11) à l'opérateur $\Gamma^\alpha(T)$ (dont le symbole vérifie encore (7)!), on obtient (10), en toute généralité.

La vérification de (9) est laissée au lecteur.

Il serait difficile de clore ce paragraphe sans dire un mot du calcul para-différentiel de J-M. Bony [1]. Le symbole (pour la quantification usuelle) d'un opérateur para-différentiel vérifie

$$\hat{\sigma}(\xi,\eta)=0 \quad \text{pour} \quad |\xi|\geq \varepsilon|\eta|$$

(où ε est une petite constante, fixée une fois pour toutes), de sorte que, pour $2r=1-\varepsilon$ et $t\leq 1$, on a $d_{t,r}=0$. Les opérateurs para- différentiels d'ordre 0 appartiennent donc à l'algèbre maximale.

Annexe I - Continuité H^s pour les intégrales singulières.

Théorème 1.— *Soit un entier $k\geq 1$ et un opérateur linéaire continu T de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, ayant la propriété (WB), dont le noyau K satisfait les estimations*

$$|\partial_x^\alpha K(x,y)|\leq C\,|x-y|^{-n-|\alpha|} \quad (|\alpha|\leq k), \tag{12}$$

$$|K(x,y)|\leq C|x-y|^{-n-k+1-\varepsilon} \quad (\varepsilon>0). \tag{13}$$

On suppose de plus que les distributions $\Gamma^\alpha(T)(1)$ $(|\alpha|\leq k-1)$ sont en fait des fonctions de classe C^k, avec toutes leurs dérivées bornées. Alors T est continu sur $B_p^{s,q}$ $(p,q\in[1,+\infty])$ et sur H_p^s $(p\in]1,+\infty[)$ pour tout $s\in]0,k[$.

Preuve : Elle consiste à se ramener au cas où $T(r_\alpha)=0$ $(|\alpha|\leq k-1)$. Pour cela, on fixe $\varphi\in\mathcal{D}$ telle que $\varphi(0)=1$ et $\varphi^{(\alpha)}(0)=0$ $(|\alpha|>0)$ de sorte que $\varphi(D)(r_\alpha)=r_\alpha$ $(\alpha\in\mathbf{N}^n)$. On pose $m_\alpha=\Gamma^\alpha(T)(1)$ et on désigne par R l'O.P.D. de symbole

$$\rho(x,\xi)=\sum_{|\beta|\leq k-1}\frac{1}{\beta!}m_\beta(x)\;\varphi(\xi)\;(i\xi)^\beta$$

De l'identité (3), il résulte qu'on a $R(r_\alpha)=T(r_\alpha)$ pour $|\alpha|\leq k-1$; de plus R est évidemment borné sur $B_p^{s,q}$ et H_p^s pour tout $s\in]-k,+k[$; enfin le noyau de $R-T$ vérifie les estimations (12) et (13).

A $R-T$, on peut appliquer le critère de continuité de P-G. Lemarié ([9], Théorème A), généralisé à toute valeur positive de s par M. Elhodaibi ([7], voir aussi Y. Meyer, [14], Théorème 2). La conclusion, c'est que $R-T$ est borné sur l'espace de Besov homogène $\dot{B}_p^{s,q}$ $(0<s<k)$. Il reste à vérifier que $R-T$ envoie $B_p^{s,q}$ dans L^p mais cela résulte encore du travail de Lemarié ([9], Théorème D).

Notons que les auteurs précités ne démontrent pas la continuité $\dot{H}_p^s$ (pour $p\neq 2$). Mais il ne fait guère de doute qu'on puisse l'obtenir en adaptant la preuve de K. Yabuta [20], qui suppose, lui, la continuité de l'opérateur sur L^r, pour un certain r.

La continuité de $B_p^{0,1}$ dans L^p est un résultat de nature différente, car il suppose que le noyau $K(x,y)$ soit régulier par rapport à chaque variable :

Théorème 2.— *Soit T un opérateur linéaire continu de $\mathcal{D}$ dans $\mathcal{D}'$, ayant la propriété (WB), dont le noyau $K \in \mathcal{D}'(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ vérifie les estimations*

$$|K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n} \ , \tag{14}$$

$$|\nabla K(x,y)| \leq C|x-y|^{-n-1} \ , \tag{15}$$

$$\int_{|x-y|\geq 1} |K(x,y)|dy \leq C \ , \quad \int_{|x-y|\geq 1} |K(x,y)|dx \leq C. \tag{16}$$

Si $T(1) \in L^\infty$ alors T est borné de $B_p^{0,1}$ dans L^p, pour tout $p \in [1,+\infty]$.

Preuve : En retranchant à T l'opérateur de multiplication par $T(1)$, on se ramène aussitôt au cas où $T(1) = 0$.

Soit θ une fonction C^∞, radiale, réelle, portée par la boule $|x| \leq 1/2$, d'intégrale nulle ; on normalise θ de sorte que

$$\int_0^\infty \hat{\theta}^2(t\xi)\frac{dt}{t} = 1 \quad (\xi \neq 0) \ .$$

On définit

$$\hat{\varphi}(\xi) = 1 - \int_0^1 \hat{\theta}^2(t\xi)\frac{dt}{t} \quad (\forall \xi \in \mathbf{R}^n).$$

Alors φ est C^∞ , portée par la boule unité, et l'on a

$$\delta = \int_0^1 \theta_t * \theta_t \frac{dt}{t} + \varphi \ ,$$

où $\theta_t(x) = t^{-n}\theta(t^{-1}x)$.

Désignons par R et Q_t les opérateurs de convolution par φ et θ_t ; on a alors

$$T \ = \ TR \ + \ \int_0^1 \ T \ Q_t^2 \frac{dt}{t} \ .$$

Nous allons voir que TR et $T \ Q_t$ sont bornés sur L^p, uniformément en t. Alors, pour $f \in B_p^{0,1}$,

$$\|Tf\|_p \leq C\left(\|f\|_p + \int_0^1 \|Q_t f\|_p \frac{dt}{t}\right) \ ;$$

on conclut en observant que l'intégrale est majorée par $C\|f\|_{B_p^{0,1}}$ (voir [15], Chapitre 8).

Pour estimer $\|T\ Q_t\|_{\mathcal{L}(L^p)}$, on note $K_t(x,y)$ le noyau de $T\ Q_t$ et on montre :

$$\int |K_t(x,y)|dx \le C \quad (\forall y \in \mathbf{R}^n)\ ,$$

$$\int |K_t(x,y)|dy \le C \quad (\forall x \in \mathbf{R}^n)\ .$$

Soit ψ une fonction C^∞, portée par $|x| \le 3$, égale à 1 pour $|x| \le 2$. Le lemme de commutation d'Y. Meyer ([13], lemme 3 ; voir aussi [3], VII. 42) permet d'écrire

$$K_t(x,y) = \sum_{j=1}^{3} K_{j,t}(x,y)\ , \quad \text{où} \quad :$$

$$K_{1,t}(x,y) = 1\{|x-y| \ge 2t\} \int K(x,z)\theta_t(z-y)dz\ ,$$

$$K_{2,t}(x,y) = 1\{|x-y| \le 2t\} \int K(x,z)(\theta_t(z-y) - \theta_t(x-y))t^n\psi_t(z-y)dz\ ,$$

$$K_{3,t}(x,y) = \theta_t(x-y)t^nT(\tau_y\psi_t)\,(x)\ .$$

On sait qu'il existe une constante $C = C(T)$ telle que

$$|T(\tau_y\psi_t)(x)| \le C\ t^{-n} \quad (|x-y| \le t)\ .$$

([13], [3]) ; l'estimation de $K_{3,t}(x,y)$ en découle aussitôt.
Pour étudier $K_{2,t}$, on utilise la propriété (14) de $K(x,y)$; on obtient

$$\int |K_{2,t}(x,y)|dx \le Ct^{-n-1} \int_{|x-y|\le 2t} \int_{|z-y|\le 3t} |x-z|^{-n+1}dzdx \le C'\ ;$$

l'intégrale en y s'estime de la même manière.

Pour traiter $K_{1,t}$, on combine la propriété (15) avec l'hypothèse $\int \theta(x)dx = 0$

$$\begin{aligned}\int |K_{1,t}(x,y)|dx &\le t^{-n} \int_{|x-y|\ge 2t} \int_{|z-y|\le t} |K(x,z) - K(x,y)|dz\,dx \\ &\le Ct^{-n} \int_{|x-y|\ge 2t} \int_{|z-y|\le t} |x-y|^{-n-1}|z-y|dzdx = C'\ ;\end{aligned}$$

l'intégrale en y se traite de la même façon.

Le noyau $H(x,y)$ de TR s'étudie à-peu-près comme K_t ; on écrit $H = H_1 + H_2 + H_3$ où

$$
\begin{aligned}
H_1(x,y) &= 1\{|x-y| \geq 2\} \int K(x,z)\ \varphi(z-y)dz\ ,\\
H_2(x,y) &= 1\{|x-y| \leq 2\} \int K(x,z)(\varphi(z-y) - \varphi(x-y))\psi(z-y)dz\ ,\\
H_3(x,y) &= \varphi(x-y)\ T(\tau_y\psi)(x)\ .
\end{aligned}
$$

H_2 et H_3 se traitent exactement comme $K_{2,t}$ et $K_{3,t}$; pour estimer H_1, on ne peut plus utiliser la propriété (15), car φ n'est pas d'intégrale nulle ; on utilise alors l'intégrabilité du noyau à l'infini (16), ce qui nous donne

$$
\begin{aligned}
\int |H_1(x,y)|dx &\leq C \int\limits_{|x-y|\geq 2} \left(\int\limits_{|z-y|\leq 1} |K(x,z)|dz \right) dx\\
&\leq C \int\limits_{|z-y|\leq 1} \left(\int\limits_{|x-z|\geq 1} |K(x,z)| \right) dz \leq C'\ ,
\end{aligned}
$$

l'intégrale en y s'estime de manière analogue. CQFD.

Remarque : Pour alléger l'exposé, nous n'avons pas cherché à énoncer le théorème sous des hypothèses de régularité minimales ; le lecteur vérifiera que le théorème est encore vrai si K est un noyau standard de type ω, où $\int_0^1 \omega(t)\frac{dt}{t} < +\infty$ (voir [18]).

Annexe II - L'exemple de Ching.

Soit φ une fonction C^∞ portée par la couronne $\frac{3}{4} \leq |\xi| \leq \frac{5}{4}$ et θ un vecteur de norme 1. On pose

$$\sigma(x,\xi) = \sum_{j\geq 0} \exp(-i2^j x.\theta)\ \varphi(2^{-j}\xi)\ .$$

Ching observe [5] que $\mathrm{Op}(\sigma)$ n'est pas borné sur L^2, dès que $\varphi(\theta) \neq 0$. Hörmander généralise ce résultat aux H^s pour $s \leq 0$ ([8], Prop.3.5) :

Proposition 6.— *Soit k le premier entier pour lequel on ait $\varphi^{(\alpha)}(\theta) \neq 0$ pour un α de longueur k. Alors $\mathrm{Op}(\sigma)$ est borné sur H^s pour $s > -k$; par contre, $\mathrm{Op}(\sigma)$ n'admet pas d'extension comme opérateur borné de H^{-k} dans $\mathcal{D}'$.*

Preuve : On dispose déjà de la continuité H^s, pour $s > 0$; de sorte qu'il suffit de supposer $k > 0$ et de montrer la continuité de $\mathrm{Op}(\sigma)^*$ sur H^s pour $0 < s < k$.

On va utiliser le Théorème 1 et, pour cela, étudier les fonctions $m_\alpha = \Gamma^\alpha(\mathrm{Op}(\sigma)^*)(1)$; un calcul facile fournit l'égalité

$$m_\alpha(x) = \sum_{j\geq 0} i^{|\alpha|}2^{-j|\alpha|}\exp(i2^j x.\theta)\ \overline{\varphi^{(\alpha)}(\theta)}\ .$$

L'hypothèse sur φ entraîne alors $m_\alpha = 0\ \ (|\alpha| \leq k-1)$.
Par contre, dès que $\varphi^{(\alpha)}(\theta) \neq 0$, on a

$$m_\alpha^{(\alpha)}(x) = (-\theta)^\alpha \overline{\varphi^{(\alpha)}(\theta)} \left(\sum_{j\geq 0}\exp(i2^j x.\theta)\right)\ ,$$

de sorte que $m_\alpha^{(\alpha)}$ est une distribution singulière.

On va voir maintenant que $\mathrm{Op}(\sigma)$ n'est pas borné de H^{-k} dans $\mathcal{D}'$. Par hypothèse sur φ, il existe un polynôme homogène de degré k, non identiquement nul, P_k tel que $\varphi(\theta+\xi) = P_k(\xi) + R_k(\xi)$, où $|R_k(\xi)| \leq C|\xi|^{k+1}$.

Soit ψ une fonction C^∞ à spectre dans la boule $|\xi| \leq \frac{1}{4}$ et $\psi_j(x) = \exp(i2^j x.\theta)\psi(x)$; pour raison de supports, on a $\varphi(2^{-j}D)\psi_{j'} = 0$ pour $j \neq j'$. La suite

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} j^{-1}\ 2^{kj}\ \psi_j(x)$$

converge dans H^{-k} et on a

$$\begin{aligned}\mathrm{Op}(\sigma)(f_m) &= \sum_{j=1}^{m} j^{-1}2^{kj}\ \varphi(2^{-j}D+\theta)(\psi)\\ &= \left(\sum_{j=1}^{m} j^{-1}\right) P_k(D)(\psi) + \sum_{j=1}^{m} j^{-1}2^{kj}R_k(2^{-j}D)(\psi).\end{aligned}$$

On a $\left|j^{-1}R_k(2^{-j}\xi)2^{kj}\hat{\psi}(\xi)\right| \leq j^{-1}2^{-j}|\xi||\hat{\psi}(\xi)|$, de sorte que la série $\sum_{j=1}^{\infty} j^{-1}2^{kj}R_k(2^{-j}D)(\psi)$ converge dans $\mathcal{S}'$, alors que le terme principal diverge évidemment dans $\mathcal{D}'$. CQFD.

L'exemple de Ching permet de vérifier en outre l'optimalité de l'estimation $B_2^{0,1} \to L^2$.
Nous supposerons que $\varphi(\xi) = 1$ pour $\frac{4}{5} \leq |\xi| \leq \frac{6}{5}$.

1° - Soit $q > 1$ et $(\omega_j)_{j\geq 0}$ une suite positive appartenant à ℓ^q , mais pas à ℓ^1. On pose

$$f_m(x) = \sum_{j=1}^{m} \omega_j\ \exp(i2^j x.\theta)\psi(x)\ ,$$

où $\psi \in \mathcal{S}$ a son spectre dans la boule $|\xi| \leq \frac{1}{5}$.

On a $\|f_m\|_{B_2^{0,q}} \approx \left(\sum_{j=0}^{m} \omega_j^q\right)^{1/q}$ alors que

$$\mathrm{Op}(\sigma)(f_m) = \left(\sum_{j=1}^{m} \omega_j\right) \psi \ .$$

Autrement dit, $\mathrm{Op}(\sigma)$ n'admet pas d'extension continue de $B_2^{0,q}$ dans $\mathcal{D}'$.

2° - Soit $q < 2$, $\frac{1}{2} < \alpha < \frac{1}{q}$ et $\beta = 1 + \frac{1}{q} - \alpha$; on définit $b \in L^2$ par

$$\hat{b}(\xi) = |\xi|^{-n/2} \ |\mathrm{Log}\, \xi|^{-\alpha} \ 1\{0 < |\xi| \leq \frac{1}{5}\} \ ,$$

puis

$$f(x) = \sum_{j \geq 1} j^{-\beta} \exp(i 2^j x.\theta) 2^{jn/2} b(2^j x).$$

Dans la série définissant f, le terme général a son spectre dans la couronne $\frac{4}{5} 2^j \leq |\xi| \leq \frac{6}{5} 2^j$; on en déduit d'une part $f \in B_2^{0,1}$, d'autre part

$$g = \mathrm{Op}(\sigma)(f) = \sum_{j \geq 1} j^{-\beta} 2^{jn/2} b(2^j x) \ .$$

Nous allons voir que $g \notin B_2^{0,q}$; pour cela, il suffit d'établir

$$\sum_{k \geq 1} \|\varphi(2^{-k} D) g\|_2^q = +\infty \ . \tag{17}$$

On a

$$(\varphi(2^{-k} D) g)^\wedge(\xi) = \sum_{j \geq k+2} j^{-\beta} 2^{-jn/2} \hat{b}(2^{-j} \xi) \varphi(2^{-k} \xi) \ ,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\|\varphi(2^{-k} D) g\|_2 &\geq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\frac{4}{5} 2^k \leq |\xi| \leq \frac{6}{5} 2^k} \left| \sum_{j \geq k+2} j^{-\beta} 2^{-jn/2} \hat{b}(2^{-j} \xi) \right|^2 d\xi \right)^{1/2} \\
&\geq (2\pi)^{-n/2} \left(\int_{\frac{4}{5} \leq |\xi| \leq \frac{6}{5}} \left| \sum_{j \geq k+2} j^{-\beta} |\mathrm{Log}\, 2^{k-j} \xi|^{-\alpha} \right|^2 |\xi|^{-n} d\xi \right)^{1/2} \\
&\geq C \sum_{j \geq k+2} j^{-\beta} (j-k)^{-\alpha} \\
&\geq C' \ k^{-1/q},
\end{aligned}$$

d'où (17) découle aussitôt.

Bibliographie

[1] J-M. Bony. Calcul symbolique et propagation des singularités pour les E.D.P. non linéaires. Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. 14 (1981), 209-246.

[2] G. Bourdaud. Sur les opérateurs pseudo-différentiels à coefficients peu réguliers. Thèse de Doctorat d'Etat, Orsay (1983).

[3] G. Bourdaud. Analyse fonctionnelle dans l'Espace Euclidien. Publ. Math. Paris VII, 23 (1987).

[4] G. Bourdaud. Une algèbre maximale d'opérateurs pseudo-différentiels. A paraître aux Comm. in Part. Diff. Eq.

[5] C.H. Ching. Pseudodifferential operators with non regular symbols. J. Differential Equations 11 (1972), 436-447.

[6] G. David et J-L. Journé. A boundedness criterion for generalized Calderón-Zygmund operators. Annals of Math. 120, n°12 (1984), 371-398.

[7] M. Elhodaibi. Thèse de Doctorat (en préparation, Orsay).

[8] L. Hörmander. Pseudo-differential operators of type 1.1. A paraître aux Comm. in Part. Diff. Eq.

[9] P-G. Lemarié. Continuité sur les espaces de Besov des opérateurs définis par des intégrales singulières. Ann. Inst. Fourier, Grenoble 35,4 (1985) 175-187.

[10] J. Marschall. Weighted parabolic Triebel spaces of product type ... Prépubl. n°8702 (Avril 87), Universität der Bundeswehr München, Fakultät Informatik, Werner-Heisenberg-Weg 39, D-8014, Neubiberg.

[11] M. Meyer. Continuité-Besov de certains opérateurs intégraux singuliers. Thèse de 3ème cycle, Orsay (1983).

[12] Y. Meyer. Régularité des solutions des équations aux dérivées partielles non linéaires, Springer lectures notes in Math. 842 (1980), 293-302.

[13] Y. Meyer. Les nouveaux opérateurs de Calderón-Zygmund. Colloque en l'honneur de L. Schwartz. Astérisque 131 (1985), 237-254.

[14] Y. Meyer. Continuité sur les espaces de Hölder et de Sobolev des opérateurs définis par des intégrales singulières. Séminaire Goulaouic-Meyer-Schwartz 1983-1984, exposé n°1. Recent progress in Fourier Analysis, Proc. Semin., El . Escorial (Spain 1983), North Holland Math. Stud. 111 (1985) 145-172.

[15] J. Peetre. New thoughts on Besov spaces. Duke Univ. Math. Series I.

[16] T. Runst. Pseudo-differential operators of the "exotic" classe $L^0_{1,1}$ in spaces of Besov and Triebel-Lizorkin type. Annals of global Analysis and Geometry 3, n°1 (1985), 13-20.

[17] M. Sugimoto. Pseudo-differential operators on Besov spaces. Prépubl. 1987, Institute of Math., University of Tsukuba, Ibaraki 305, Japan.

[18] K. Yabuta. Generalizations of Calderón-Zygmund operators. Studia Math. 82 (1985), 17-31.

[19] K. Yabuta. Singular integral operators on Besov spaces. Prépubl. 1987, Dep. of Math., Ibaraki Univ., Mito, Ibaraki 310, Japan.

[20] K. Yabuta. Singular integral operators on Triebel-Lizorkin spaces. Prépubl. 1987 (voir [19]).

[21] M. Yamazaki. Boundedness of Product type pseudo-differential operators on spaces of Besov type. Math. Nachr. 133 (1987), 297-315.

Université Paris VII
U.F.R. de Mathématiques
Tour 45-55, 5ème étage
2, Place Jussieu,
75251 Paris Cedex 05

Université de Paris-Sud
Unité Associée 757
Analyse Harmonique
Mathématique (Bat. 425)
91405 Orsay Cedex