Séminaire Équations aux dérivées partielles - École Polytechnique

L. Boutet de Monvel

Le noyau de Bergman en dimension 2

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 22, p. 1-12

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A22_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES
Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE
F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LE NOYAU DE BERGMAN EN DIMENSION 2.

L. BOUTET DE MONVEL

Exposé n° XXII

17 Mai 1988

LE NOYAU DE BERGMAN EN DIMENSION 2.

par L.Boutet de Monvel

Cet exposé est la suite de mon exposé de mai 1986 à ce séminaire [B]. J'y montrerai qu'en dimension $n=2$ les hypersurfaces dont le noyau de Bergman ne comporte pas de terme logarithmique sont, localement, holomorphiquement équivalentes à une sphère.

§1. Rappels et description du résultat.

Rappelons que si X est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ (plus généralement une variété complexe), le noyau de Bergman $B(x,y)$ est le noyau du projecteur orthogonal $L^2(X)\to\mathcal{O}(X)$, où $\mathcal{O}(X)$ désigne le sous-espace des fonctions holomorphes; ou, de façon plus intrinsèque, le noyau du projecteur $L^2_{n\,0}(X)\to\mathcal{O}_{n\,0}(X)$ où $L^2_{n\,0}$ désigne l'espace des formes de type n,0 sur X, qui est muni intrinsèquement de la norme hilbertienne $\|\omega\|^2=|\int\omega\wedge\bar{\omega}|$. B est donc une forme différentielle, de type n,0 en x et 0,n en y. Il est holomorphe en x, et antiholomorphe en y.

Dans toute la suite nous supposons X strictement pseudo-convexe, à frontière analytique. Autrement dit X peut être défini par une inéquation

(1.1) $U=U(z,\bar{z})\leqslant 0$

où U est une fonction analytique réelle, $dU\neq 0$ sur le bord ∂X, et la matrice des dérivées mixtes $(\partial^2U/\partial z_j\partial\bar{z}_k)$ est hermitienne $\gg 0$. On sait dans ce cas (cf. [B-S], [K]) que le noyau de Bergman B est analytique à l'intérieur de $X\times X$, et se prolonge analytiquement au voisinage des points du bord, sauf aux points de la diagonale de $\partial X\times\partial X$. Au voisinage de ces points il a une singularité du type 'distribution conormale' (holonome), associée à l'hypersurface complexe d'équation $U(x,\bar{y})=0$:

(1.2) $B(x,\bar{y}) = F(x,\bar{y})\, U(x,\bar{y})^{-n-1} + G(x,\bar{y})\, \mathrm{Log} U(x,\bar{y})$

où F , G sont analytiques (holomorphes en $x,\bar{y}$).

Je me propose de démontrer le résultat suivant, qui généralise celui de D.Boichu et G.Coeuré [Bo-C] pour les domaines de Reinhardt, et répond à une conjecture de I.P.Radamanov [R] en dimension 2:

Théorème: On suppose n=2. Si le coefficient $G(x,\bar{y})$ du terme logarithmique de B s'annule à l'ordre 2 sur le bord ∂X au voisinage d'un point $x \in \partial X$, alors ∂X est , au voisinage de ce point, holomorphiquement équivalent à une sphère.

(en fait dans cet énoncé il suffit que ∂X soit de classe C^2 et strictement pseudo-convexe, pour que la singularité du noyau de Bergman soit une propriété locale de ∂X, et qu'au voisinage du point x il soit assez différentiable (de classe C^{14}) pour que les 5 premiers termes du développement asymptotique de B soient bien définis et donnés par la formule générale)

En revanche il existe des domaines X tels que G s'annule sur ∂X au voisinage d'un point $x \in \partial X$, sans que ∂X soit localement équivalent à une sphère au voisinage de ce point: la version locale du résultat de D.Boichu et G.Coeuré est fausse.

§2. Etude du développement asymptotique de B.

Pour démontrer ce théorème, j'utiliserai le résultat exposé dans [B] : formellement B est (mod. les fonctions analytiques) le noyau de l'opérateur intégral de Fourier inverse microlocal de celui de noyau $\mathrm{Log}(x,\bar{y})$ (à un facteur constant près). Nous utiliserons la méthode indiquée dans [B],§5. Nous prenons comme modèle l'ouvert X_0 limité par le paraboloïde ∂X_0 d'équation

$$(2.1)\quad u = t+\bar{t}+z\bar{z} = 0$$

où on a noté t,z les coordonnées dans $\mathbb{C}^2$. Le noyau de Bergman dans la cas modèle est $b = c^{ste}\, u^{-3}$ ($c^{ste}\, (\partial\bar{\partial}\ \mathrm{Log}\ u)^2$ si on le note comme une forme différentielle).

On sait qu'il existe une transformation holomorphe locale ($\Leftrightarrow$choix de coordonnées locales) qui met ∂X en contact d'ordre $\geqslant 6$ avec ∂X_0 à l'origine (contact d'ordre $\geqslant 4$ seulement en dimension $n>2$). On est ainsi ramené au cas où la fonction de définition U de ∂X est de la forme

$$(2.2)\quad U = u + \rho$$

où ρ est nul d'ordre 6 à l'origine. On peut en outre supposer ρ mis sous la forme normale de [B]§5, déduite de celle [Ch-M]:

$$(2.3)\quad \rho = \sum_{p,q\geqslant 2} \rho_{pq}(t)\, z^p\bar{z}^q$$

$$\text{avec}\quad \rho_{22}=\rho_{23}=\rho_{32}=\rho_{33}=0$$

(on a choisi ρ indépendant de $\bar{t}$; c'est essentiellement équivalent à la forme normale de Chern et Moser [Ch-M]; mais ici ρ n'est pus une fonction réelle)

Comme dans [B]§5 on attribue à t le poids 2 et à z le poids 1 (à $\partial/\partial t$, $\partial/\partial z$ etc... les poids qui en découlent), et on fait un développement formel (en fait convergent) suivant les poids croissants. Ainsi la singularité de B possède un développement selon les poids croissants, uniquement déterminé, de la forme

$$(2.4)\quad B \simeq \sum b_{mnpq}\ t^m z^p\bar{z}^q\, u_n$$

$$\text{avec}\quad u_n = u^n \text{ si } n<0\ ,\quad u_n = u^n\, \mathrm{Log}\, u \text{ si } n\geqslant 0.$$

On pose

$$(2.5)\quad a(t,z,\tau,\zeta) = \rho(t,z,\zeta/\tau)\tau$$

$$(2.6)\quad A(t,z,\tau,\zeta) = e^a = 1 + a + a^2/2 + \dots$$

où les variables τ et ζ, correspondant aux dérivations $\partial/\partial t$, $\partial/\partial z$, sont de poids respectifs -2, -1

(2.7) $\mathbb{A} = A(t,z,\partial_t,\partial_z)$

(c'est une serie formelle d'operateurs microdifferentiels de poids croissants. On a noté $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_z=\partial/\partial z$.)

Comme on a montré dans [B]§5, il résulte de la formule de Taylor qu'on a (toujours en développant suivant les poids croissants)

(2.8) $\operatorname{Log} U \simeq \mathbb{A} \operatorname{Log} u$

d'où

(2.9) $B \simeq c^{ste}\ {}^t\mathbb{A}^{-1}(u^{-3})$

Les termes logarithmiques de B ($n\geq 0$ dans le développement (2.4)) proviennent alors des termes de degré ≤ -3 en (∂_t,∂_z) de ${}^t\mathbb{A}^{-1}$. En effet $\mathbb{A}$ comme n'importe opérateur micro-différentiel possède un développement en termes de poids croissants :

(2.10) $\mathbb{A} \simeq \sum a_{mnpq}\, t^m z^p (\partial_z\partial_t^{-1})^q \partial_t^n \quad (n\in\mathbb{Z},\ m,p,q\geq 0)$

et on a en outre $\partial_t^{-3}u^{-3} = c^{ste} \operatorname{Log} u$, et si f est n'importe quelle (micro)fonction, $(\partial_z\partial_t^{-1})^q f(u) = \bar{z}^q f(u)$, de sorte que les termes logarithmiques de $\mathbb{A}u^{-3}$ sont ceux pour lesquels on a $n\leq -3$.

Dans le décompte des termes qui figurent dans ces développements on peut encore raffiner en introduisant un bipoids: $w_2(z)=(1,0)$, $w_2(\bar{z})=(0,1)$, $w_2(t)=w_2(\bar{t})=(1,1)$. Pour démontrer le théorème, nous examinons les termes de bipoids (0,0) et (1,1) de G (coefficient du terme logarithmique), c'est a dire les termes en $\operatorname{Log} u$, $t \operatorname{Log} u$, $z\bar{z} \operatorname{Log} u$, $u \operatorname{Log} u$ de B: ces termes doivent s'annuler car G s'annule nécessairement de poids >2 sur ∂X s'il s'y annule à l'ordre 2.

Le terme en Log u provient du terme de poids 6 (bipoids (3,3)) de ${}^t\mathbf{A}^{-1}$. Comme a est de poids 4, donc a^2 de poids 8>6, on peut pour le calculer remplacer A par 1+a, et ${}^t\mathbf{A}^{-1}$ par $1-{}^t(a(x,D))$. Le seul terme qui intervienne est donc $\rho_{44}\, z^4 \zeta^4 \tau^{-3}$; le terme correspondant de ${}^t\mathbf{A}^{-1}$ est $\rho_{44}\, \partial_z^4 z^4\, \partial_t^{-3}$ dont le terme de degré -3 en (∂_z,∂_t) est $4!\, \rho_{44}\, \partial_t^{-3}$. (On a posé $\rho_{44}=\rho_{44}(0)$.)

L'examen des termes suivants fait intervenir les termes de poids 8, de degré $\leqslant -3$, de ${}^t\mathbf{A}^{-1}$. Pour les examiner on peut négliger les termes de poids >8 , ie. remplacer A par $1+a+a^2/2$. On constate que les coefficients de t Log u, $z\bar{z}$ Log u, u Log u sont combinaisons linéaires de ρ_{44}' , ρ_{55} , et du produit $\rho_{24}\rho_{42}$ (avec $\rho_{44}'=\partial_t\rho_{44}(t=0)$). L'examen du terme en t Log u montre aussitôt qu'on doit avoir $\rho_{44}'=0$ si G s'annule de poids >2 sur ∂X. L'examen des termes en $z\bar{z}$ Log u, u Log u fournit alors deux relations linéaires non proportionnelles entre ρ_{55} et $\rho_{24}\rho_{42}$. Ces deux quantités doivent donc s'annuler si G s'annule de poids >2 sur ∂X.

S3 Fin de la démonstration

Dans notre situation ρ_{24} et ρ_{42} sont conjugués. Ils sont donc nuls tous les deux.

Lemme.- Soit ∂X une hypersurface analytique réelle, strictement pseudoconvexe. On suppose qu'en tout point de ∂X les coefficients ρ_{24}, ρ_{42} de la forme normale de Chern-Moser s'annulent. Alors ∂X est localement holomorphiquement équivalent à la sphère (ou au paraboloïde).

Voici une première démonstration: E.Cartan [C], dans le cas n=2, et Chern et Moser [Ch-M] dans le cas général ont introduit une connexion (au sens de Cartan) associée à toute hypersurface strictement pseudo-convexe suffisamment différentiable. Cette connexion se présente ainsi: on introduit le fibré des repères P, fibré principal de groupe le sous-groupe $H\subset PU(n,1)$ des automorphismes holomorphes de la boule qui fixent le vecteur (1,0,0..) de la sphère. Un point d'une fibre P_x est une classe d'équivalence de systèmes de coordonnées: t (mod.m_x^3), z (mod.m_x^2), telle que $t+\bar{t}+z\bar{z} \in m_x^3$ (où m_x désigne l'idéal de définition du point $x \in \partial X$). La connexion Ω est une 1-forme équivariante sur P, à coefficients dans su(n,1), dont la forme de courbure $K = d\Omega + \Omega \wedge \Omega$ satisfait à une condition convenable, qui détermine complètement Ω (cf.[C], [Ch-M], [Ku]). La courbure est nulle si et seulement si ∂X est localement équivalent à la sphère. Ici ρ_{24}, ρ_{42} sont des coefficients de la courbure, et on constate en examinant les formules de [C], [Ch-M], ou [Ku] que les autre coefficients (en fait il n'y en a qu'un) en sont de dérivées covariantes. D'où le lemme.

Remarquons que pour cette démonstration on n'a besoin que de l'égalité $\rho_{24}=\rho_{42}=0$, et des identités qui en résultent en dérivant une fois. Ceci ne fait intervenir qu'un nombre fini de dérivées de ∂X (7 pour la définition de ρ_{24}, ρ_{42} et de leurs dérivées, 10 pour que les relations entre $\rho_{24}\rho_{42}$ et ρ_{55} aient un sens, et encore quelques unes de plus pour qu'on puisse pousser le développement asymptotique de B assez loin pour démontrer ces relations).

Voici une autre démonstration plus 'élémentaire' (qui n'est en fait qu'une traduction en termes un peu plus tangibles de la démonstration précédente). Notre surface ∂X a pour équation

(3.1) $U = t+\bar{t}+z\bar{z} + \rho$

où $\rho = \rho_{25}\, z^2\bar{z}^5 + \rho_{34}\, z^3\bar{z}^4 + \rho_{43}\, z^4\bar{z}^3 + \rho_{52}\, z^5\bar{z}^2 + ..$ est nul d'ordre >6.

Effectuons un changement d'origine complexe infiniment petit: nouvelle origine de coordonnées $(0,\zeta,0,\bar{\zeta})$ (dans $\mathbb{C}^n \times \bar{\mathbb{C}}^n$), avec $\zeta^2=\bar{\zeta}^2=\zeta\bar{\zeta}=0$.

A partir de cette nouvelle origine l'équation s'écrit

(3.2) $(t+\bar{\zeta}z) + (\bar{t}+\zeta\bar{z}) + z\bar{z} + \partial_z\rho\, \zeta + \partial_{\bar{z}}\rho\, \bar{\zeta}$

équation qu'il s'agit de remettre sous forme normale. Ici notre équation est une perturbation d'ordre 6 de la forme canonique et un calcul élémentaire montre que les coefficients de $z^2\bar{z}^4$ et $z^4\bar{z}^2$ sont inchangés lorsqu'on passe à la forme normale. Ce sont donc

$$(3.3) \quad 5\,\rho_{25}\,\bar{\zeta} + 3\,\rho_{34}\,\zeta \ \text{(pour } z^2\bar{z}^4\text{)}$$
$$\text{et} \quad 3\,\rho_{43}\,\bar{\zeta} + 5\,\rho_{52}\,\zeta \ \text{(pour } z^4\bar{z}^2\text{)}$$

Ces quantités doivent donc être identiquement nulles. Une récurrence facile montre alors de même qu'on doit avoir $\rho_{p+1,q}=\rho_{p,q+1}=0$ si ρ_{pq} est identiquement nul. Ainsi ρ est identiquement nul (son développement de Taylor est nul), et l'équation de ∂X se réduit à celle du paraboloide, qui est équivalent à la sphère.

§4 Cas des domaines de Reinhardt.

Localement un tel domaine est équivalent à un cylindre

$$F(\mathrm{Re}\, z_1, \mathrm{Re}\, z_2) \leq 0$$

(convexe si le domaine initial est pseudoconvexe).Dans ce qui suit on pose $x=\mathrm{Re}\, z_1$, $y=\mathrm{Re}\, z_2$. On note Γ la courbe $F(x,y)=0$, correspondant au bord du cylindre. On constate facilement que les courbes Γ provenant d'une sphère sont les transformées par affinité de la courbe d'équation $y=\mathrm{Log}\,\mathrm{ch}\, x$, et les courbes limites $y=e^x$, $y=x^2$. Elles forment une famille à 6 paramètres, et sont les solutions d'une équation différentielle d'ordre 6.

Au contraire la condition $G|_{\partial X}=0$ $(\rho_{44}=0)$ se traduit par une équation différentielle d'ordre 8. Il y a donc localement des solutions de cette deuxième équation qui ne sont pas solutions de la première (il n'y a néanmoins pas d'autres solutions "globales", comme ont montré D.Boichu et G.Coeuré).

§5 Terme logarithmique de la solution élémentaire de l'équation de Schrödinger.

Comme l'étude du terme logarithmique du noyau de Bergman et des invariants qui doivent y intervenir est compliquée, j'ai voulu regarder d'autres cas où un terme logarithmique se présente de façon naturelle. En voici un: on considère sur $\mathbb{R}^n$ (n pair) un opérateur de Schrödinger $\Delta - V(x)$, avec V analytique. On sait qu'un tel opérateur admet une solution élémentaire de la forme

$$(5.1)\ E(x,y) = \frac{F(x,y)}{r^{n-2}} + G(x,y) \operatorname{Log} r$$

où F et G sont analytiques. On a posé $r=(\sum(x_i-y_i)^2)^{1/2}$, de sorte que r^2 est analytique, nul sur le cône complexe isotrope $\sum(x_i-y_i)^2=0$ (cône caractéristique).

La question est alors la suivante: pour quels potentiels V a-t-on G=0? Par exemple pour n=2 cela n'arrive jamais (le logarithme est déjà présent dans le terme dominant), et pour n=4 on a G=0 si et seulement si V=0 (si G=0, Δ et $\Delta - V$ ont même parametrix donc l'opérateur de multiplication par V est de degré $-\infty$, ce qui implique évidemment V=0).

Voici un résultat élémentaire, dont je n'ai pas trouvé de trace dans la littérature.

<u>Proposition</u> 1.- <u>Soient</u>

$$(5.2)\quad V(x) = (x^2-1/8)^{-2},$$
$$v(x,y) = (x^2-1/8)^{-1}(y^2-1/8)^{-1}.$$

<u>Alors</u> (pour $n \neq 2,4$) $\Delta - V$ <u>a pour solution élémentaire</u>

$$(5.3)\quad E(x,y) = c\ \left(\frac{1}{r^{n-2}} - \frac{v(x,y)}{2(n-4)r^{n-4}}\right)$$

(avec $c=-\Gamma(n/2)/(n-2)\pi^{n/2}$, la constante qui figure dans la solution élémentaire de Δ)

On vérifie en effet élémentairement qu'on a $(\Delta-V)E = 0$ pour $x\neq y$.

On peut encore transformer par similitude le potentiel ci-dessus. On obtient les potentiels

$$(5.4) \qquad (a(x-x_0)^2-1/8a)^{-2} \quad (a\in\mathbb{C},\ x_0\in\mathbb{C}^n)$$

et à la limite $2\,(\xi.(x-x_0))^{-2}$ (avec $x_0,\xi\in\mathbb{C}^n$, $\sum\xi_j^2=1$)

<u>Proposition</u> 2.- <u>Pour</u> $n=6$ <u>les seuls potentiels</u> V <u>tels que la solution élémentaire de</u> $\Delta-V$ <u>ne comporte pas de terme logarithmique sont les potentiels ci-dessus</u> (formule (5.4))

La démonstration est elle aussi élémentaire. En voici une esquisse. Dans le cas $n=6$ on cherche une parametrix de $\Delta-V$ sous la forme

$$E = c\left(\frac{1}{r^4} - \frac{w}{4r^2}\right)$$

On a pour $x\neq y$

$$(\Delta-V)E = \frac{c}{r^4}(-V+w+r\partial w/\partial r) - \frac{c}{4r^2}(\Delta-V)w$$

où on a posé $r\partial/\partial r = \sum(x_j-y_j)\partial/\partial x_j$

Il faut donc que $-V+(1+r\partial/\partial r)w$ s'annule sur le cône isotrope. On choisit w de sorte que $(1+r\partial/\partial r)w=V$, ce qui le détermine uniquement:

$$w(x,y) = \sum V^{(\alpha)}(y)\,(x-y)^\alpha/\alpha!(|\alpha|+1)$$

Il faut alors que pour ce choix de w, $(\Delta-V)w$ s'annule sur le cône isotrope. Pour $x=y$ cela donne

$$\Delta V=3V^2$$

En dérivant deux fois cette relation on obtient

$$(\Delta V)'' = 6\,VV'' + 6\,V'^2$$

En dérivant deux fois la relation $(\Delta - V)w = O(r^2)$ puis faisant $x=y$, on obtient la relation

$$1/5\,(\Delta V)'' - 4/3\,VV'' + V'^2 \parallel \mathrm{Id}$$

(le membre de gauche est proportionnel à la matrice des dérivées secondes de r^2 pour $x=y$, c'est à dire à la matrice identité)

Eliminant $(\Delta V)''$ on obtient

$$2/3\,VV'' - V'^2 \parallel \mathrm{Id}$$

c'est à dire, pour $V \neq 0$

$$(V^{-1/2})'' \parallel \mathrm{Id}$$

Or pour $n \geqslant 2$ la relation $\Phi'' \parallel \mathrm{Id}$ implique aussitôt que Φ est un polynôme du second degré, de la forme $a|x|^2 + b.x + c$ (les dérivées mixtes sont nulles donc Φ est de la forme $\sum \Phi_j(x_j)$, avec $\Phi_i''(x_i) = \Phi_j''(x_j)$, donc les Φ_j'' sont toutes égales à une même constante si leur nombre est $\geqslant 2$).

Le cas $a \neq 0$ correspond à la première ligne de la formule (5.4), le cas $a=0$ à la seconde. (Il reste à ajuster une constante, ce qui ne présente aucune difficulté.)

<u>Références</u>:

[Bo-C] D.Boichu, G.Coeuré: Sur le noyau de Bergman des domaines de Reinhardt, Invent. Math. 72 (1983), 131-152.

[B-Sj] L.Boutet de Monvel, J.Sjöstrand: Sur la singularité des noyaux de Bergman et de Szegö, Astérisque 34-35 (1976), 123-164.

[B] L.Boutet de Monvel: Complément sur le noyau de Bergman, Séminaire EDP 1985-1986, exp n°20, Ecole Polytechnique.

[C] E.Cartan: Sur la géométrie pseudo-conforme des hypersurfaces de deux variables complexes, I, Ann. Math. Pures Appl. (4),11,1932, p.17-80; II, Ann.Scuola Norm.Pisa (2), 1 (1932), 333-354.

[Ch-M] S.S.Chern-J.Moser: Real hypersurfaces in complex manifolds, Acta Math. 133 (1974), 219-271.

[F]1 C.Fefferman: The Bergman kernel and biholomorphic equivalence of pseudo-convex domains, Inventiones Math. 26 (1974), 1-65.

[F]2 C.Fefferman: Monge-Ampère equations, the Bergman kernel and geometry of pseudo-convex domains, Ann.Math 103 (1976), 395-416.

[F]3 C.Fefferman: Parabolic invariant theory in complex analysis, Advances in Math. 31 (1979), 131-262.

[F-G] C.Fefferman, R.Graham: Conformal invariants, Astérisque, hors série, 1985 (Elie Cartan et et les Mathématiques d'aujourd'hui), 95-116.

[Ka] M.Kashiwara: Analyse microlocale du noyau de Bergman, Séminaire Goulaouic-Schwartz 1976-77, exposé n°8, Ecole Polytechnique.

[Ku] M.Kuranishi : Cartan connections and CR structures with non-degenerate Levi-form, Astérisque, hors série, 1985 (Elie Cartan et et les Mathématiques d'aujourd'hui), 273-288.

[R] I.P.Radamanov: A characterisation of the balls in $\mathbb{C}^n$ by means of the Bergman kernel,C.R.Acad. Bulgare des Sciences 34 (n°7)(1981).

Université de Paris VI
Mathématiques
4, place Jussieu
75230 Paris cedex 05

ERRATA

Exposé n° XXII - 17 mai 1988 -
L. Boutet de Monvel
Le noyau de Bergman
en dimension 2

- p. XXII-2 ligne 5 lire I. Ramadanoff au lieu de I.P. Radamanov

- p. XXII-11 ligne 21 lire I. Ramadanoff au lieu de I.P. Radamanov