V. Petkov

Les problèmes inverses de diffusion pour les perturbations dépendant du temps

Séminaire Équations aux dérivées partielles (Polytechnique) (1987-1988), exp. nº 20, p. 1-11

<http://www.numdam.org/item?id=SEDP_1987-1988____A20_0>

CENTRE
DE
MATHEMATIQUES

Unité associée au C.N.R.S. n° 169

ECOLE POLYTECHNIQUE

F-91128 PALAISEAU Cedex (France)
Tél. (1) 69.41.82.00
Télex ECOLEX 691.596 F

Séminaire 1987-1988

ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

LES PROBLEMES INVERSES DE DIFFUSION POUR LES PERTURBATIONS DEPENDANT DU TEMPS

V. PETKOV

Exposé n°XX

17 Mai 1988

Dans cet exposé on se propose d'étudier deux problèmes inverses associés aux perturbations dépendant du temps (potentiels $q(t,x)$, obstacles mouvants). En général, pour de telles perturbations on ne peut pas construire une théorie de diffusion car l'énergie locale pourrait croître où le temps t tend vers l'infinie. Pour cette raison le noyau de diffusion n'a un sens que dans les cas quand des restrictions complémentaires sont imposées. D'autre part, nous allons introduire un noyau généralisé de diffusion qui est bien déterminé pour une large classe de perturbations sans tenir compte du comportement de l'énergie locale (globale) et de l'existence d'un opérateur de diffusion. Dans l'étude de ces problèmes on ne peut pas utiliser une théorie stationnaire et les outils liés à une théorie spectrale des opérateurs autoadjoints qui jouent un rôle essentiel pour l'analyse des perturbations stationnaires. On va exploiter des méthodes dépendant du temps.

1. Noyau généralisé de diffusion.

On considère dans $\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_x^3$ un potentiel $q(t,x)$ qui satisfait aux conditions :

(i) $q(t,x) \in C^\infty(\mathbf{R}^4)$,

(ii) $\operatorname{supp}_x q(t,x) \subset \{x \in \mathbf{R}^3 : |x| \leq \rho\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$,

(iii) il existe $C > 0$ et $N > 0$ tels que $|q(t,x)| \leq C(1+|t|)^N$ pour $(t,x) \in \mathbf{R}^4$.

Soit H l'espace déterminé comme la fermeture des fonctions $f = (f_1, f_2) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3) \times C_0^\infty(\mathbf{R}^3)$ par rapport à la norme énergétique

$$\|f\|^2 = \int_{\mathbf{R}^3} (|\nabla f_1|^2 + |f_2|^2) dx.$$

Pour chaque $f \in H$ on peut résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{c} \Box u + q(t,x)u = 0, \\ u|_{t=s} = f_1(x), \;\; u_t|_{t=s} = f_2(x). \end{array} \right. \tag{1}$$

On introduit l'opérateur

$$H \ni f \mapsto \mathcal{U}(t,s)f = (u(t,x), u_t(t,x)) \in H$$

et on appelle $\mathcal{U}(t,s)$ le propagateur de (1). On obtient les propriétés :

$$\mathcal{U}(t,s)\mathcal{U}(s,r) = \mathcal{U}(t,r), \forall t, \forall s, \forall r,$$

Pour tout $A > 0$ fixé on a :

$$\|\mathcal{U}(t,s)f\| \leq C_A \|f\| \quad \text{si} \quad |t| \leq A, |s| \leq A.$$

Soit $\mathcal{U}_0(t)$ le groupe unitaire dans H associé au problème de Cauchy (1) avec $q = 0$. Etant donné $\varphi \in H$, on pose

$$\mathcal{U}_0(t)\varphi = (v_0(t,.), \partial_t v_0(t,.))$$

et on introduit le profil asymptotique de φ par

$$\lim_{t\to\infty} \partial_t v_0(t,(t+s)\theta) = v_0^{\#}(s,\theta) \in L^2(\mathbf{R}\times S^2)$$

L'application

$$H \ni \varphi \mapsto R\varphi = v_0^{\#}(s,\theta) \in L^2(\mathbf{R}\times S^2)$$

est unitaire et liée avec la représentation translatique de $\mathcal{U}_0(t)$ (cf.[8]).

Soit $\varphi \in H$ telle que $R\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R}\times \mathbf{S}^2)$ et $(R\varphi)(s,\theta) = 0$ pour $|s| > a$. Alors $\mathcal{U}(0,-t)\mathcal{U}_0(-t)\varphi$ ne dépend pas de t pour $t > \rho + a$ et on pose

$$W_-\varphi = \lim_{t\to\infty} \mathcal{U}(0,-t)\mathcal{U}_0(-t)\varphi.$$

Pour

$$\mathcal{U}(t,0)W_-\varphi = (v(t,.), \partial_t v(t,.))$$

il est facile d'obtenir la représentation

$$v(t,x) = v_0(t,x) - (2\pi)^{-1}\int_{\mathbf{R}}\int_{S^2} u^+(t,x;s,\omega)\partial_s^2 v_0^{\#}(s,w)dsd\omega, \tag{2}$$

où l'intégrale est interprétée au sens des distributions et u^+ est de la forme

$$u^+(t,x;s,\omega) = \Gamma^+(t,x;s,\omega) - h_1(t+s-\langle x,\omega\rangle)$$

avec $s \in \mathbf{R}$, $\omega \in S^2$ et $\langle,\rangle$ désignant le produit scalaire dans $\mathbf{R}^3$.

Ici $\Gamma^+(t,x;s,\omega)$ est la solution du problème

$$\begin{cases} (\Box + q)\Gamma^+ = 0, \\ \Gamma^+|_{t<-s-\rho} = h_1(t+s-\langle x,\omega\rangle) \end{cases}$$

et

$$h_1(\xi) = \begin{cases} \xi \ , \ \xi \geq 0, \\ 0 \ , \ \xi < 0. \end{cases}$$

Il est évident que u^+ est sortante au sens de Cooper et Strauss (2) puisque $u^+ = 0$ pour $t < -s-\rho$. D'autre part,

$$\Box u^+ = -q\Gamma^+ \in C\left(\mathbf{R}_s \times S^2_\omega \ ; \ L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R}_t \ ; L^2(\mathbf{R}^3_x))\right)$$

et en suivant Cooper et Strauss [2] on peut déterminer un profil asymptotique

$$u_+^{\#}(s',\theta;s,\omega) \in C\left(\mathbf{R}_s \times S^2_\omega; L^2_{\mathrm{Loc}}(\mathbf{R}_{s'} \times S^2_\theta)\right).$$

de u^+ de telle manière que pour tous $R_1 < R_2$ fixés on a

$$\lim_{t\to\infty} \int_{R_1+t<|x|<R_2+t} \left| \partial_t u^+(t,x;.) - |x|^{-1} u_+^{\#}(t-|x|, \frac{x}{|x|};.) \right|^2 dx = 0.$$

De cette manière on peut prendre des profils asymptotiques de v_0 et u^+ dans (2) et on obtient

$$v^{\#}(s',\theta) = v_0^{\#}(s',\theta) - \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbf{R}} \int_{S^2} \partial_s^2 u_+^{\#}(s',\theta;s,\omega) v_0^{\#}(s,\omega) ds\, d\omega, \tag{3}$$

où l'intégrale est prise au sens des distributions. Dans le cas particulier où l'opérateur de diffusion S existe on a

$$\|\mathcal{U}(t,0)W_-\varphi - \mathcal{U}_0(t)S\varphi\| \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Alors $v_+^{\#}(s',\theta)$ coincide avec le profil asymptotique de $SR^{-1}v_0^{\#}$, donc

$$v^{\#}(s',\theta) = (RSR^{-1})v_0^{\#}(s',\theta) = (\tilde{S}v_0^{\#})(s',\theta),$$

où $\tilde{S} = RSR^{-1}$. Par conséquent, dans ce cas (3) montre que

$$-(2\pi)^{-1}\partial_s^2 u_+^{\#}(s',\theta;s,\omega)$$

est le noyau de Schwartz de l'opérateur $\tilde{S} - Id$. On renvoie à [1] pour les conditions suffisantes pour l'existence de S. D'autre part, l'égalité (3) a un sens même si S n'existe pas. Cela nous amène à la

Définition 1.— *Soit $q(t,x)$ un potentiel qui satisfait (i)-(iii). Alors la distribution*

$$K^{\#}(s',\theta;s,\omega) = -(2\pi)^{-1}u_+^{\#}(s',\theta;s,\omega)$$

est appelée le noyau générale de diffusion associé à $q(t,x)$.

Récemment Stefanov [19] [20] a traité l'unicité du problème inverse de diffusion en montrant que $K^{\#}$ détermine uniquement $q(t,x)$. Plus précisément, on a le

Théorème 2 (Stefanov [19]).— *Soit $q_i(t,x), i = 1,2,$ deux potentiels qui satisfont (i)-(iii) et soient $K_i^{\#}(s',\theta;s,\omega), i = 1,2$ les noyaux généralisée associés à $q_i(t,x)$. Supposons qu'il existe $\omega_0 \in S^2, \delta > 0$ tels que*

$$K_1^{\#}(s',\theta;s,\omega) = K_2^{\#}(s',\theta;s,\omega)$$

pour $|\theta - \omega_0| < \delta, |\omega - \omega_0| < \delta,\ |s' - s| < \delta$. Alors $q_1(t,x) = q_2(t,x)$ pour tout $(t,x) \in \mathbf{R}^4$.

Remarques.

1) Si $q(x)$ est un potentiel stationnaire on a

$$K_i^{\#}(s',\theta;s,\omega) = S_i^{\#}(s'-s,\theta,\omega),\ i=1,2.$$

Alors $S_1^{\#}(s,\theta,\omega) = S_2^{\#}(s,\theta,\omega)$ pour $|\theta-\omega_0| < \delta$, $|\omega-\omega_0| < \delta$, $|s| < \delta$ implique $q_1(x) = q_2(x)$.

2) Si $q(x)$ est réel et l'opérateur $-\Delta + q(x)$ n'a pas de valeurs propres on sait que pour $(\theta,\omega) \in S^2 \times S^2$ fixés $S^{\#}(s,\theta,\omega)$ est une distribution tempérée. Dans ce cas l'amplitude de diffusion $a(\lambda,\theta,\omega)$ a la forme

$$a(\lambda,\theta,\omega) = \frac{2\pi}{i\lambda}\mathcal{F}_{s\to\lambda}S^{\#}(s,\theta,\omega),$$

$\mathcal{F}_{s\to\lambda}$ étant la transformation de Fourier par rapport à s. Il est bien connu que $a(\lambda,\theta,\omega)$ a la forme

(4)
$$a(\lambda,\theta,\omega) = -\frac{1}{4\pi}\int e^{i\lambda\langle x,\omega-\theta\rangle}q(x)dx$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int e^{-i\lambda\langle x,\theta\rangle}q(x)v_{sc}(-\lambda,x,\omega)dx = a_1 + a_2,$$

où $v_{sc}(\lambda,x,\omega)$ est l'unique solution $(-i\lambda)$-sortante de l'équation

$$(\Delta + \lambda^2 - q(x))v_{sc} = -q(x)e^{-i\lambda\langle x,\omega\rangle} = Q(\lambda,x),$$

c'est à dire

$$v_{sc} = \frac{1}{4\pi}\frac{e^{i\lambda|x|}}{|x|} * Q(\lambda,x).$$

Le terme a_1 est connu comme l'approximation de Born (cf. [5], [15], [16]). Quand $|\lambda| \to \infty, |\theta-\omega| \to 0$ de telle manière que $\lambda(\theta-\omega) \to p$ on peut déterminer à partir de a_1 la transformation de Fourier $\hat{q}(p)$. D'autre part, $a_2 \to 0$ quand $|\lambda| \to \infty$ uniformément par rapport à $(\theta,\omega) \in S^2 \times S^2$ [15]. Finalement, le comportement de $a(\lambda,\theta,\omega)$ pour $|\lambda| \to \infty$ est lié avec celui de $S^{\#}(s,\theta,\omega)$ au voisinage de 0.

2. Idée de la démonstration du Théorème 2.

On va donner une esquisse de la preuve présentée dans [20]. Tout d'abord on obtient une représentation de $K^{\#}$ qui joue le même rôle que (4) dans l'étude des potentiels stationnaires.

Proposition 3.— *Pour $\theta \neq \omega$ on a*

$$(5) \qquad K^{\#}(s', \theta; s, \omega) = -\frac{1}{8\pi^2}\frac{\partial}{\partial s'}\left[\frac{1}{|\theta - \omega|}\int_{\langle x, \theta-\omega\rangle = s'-s} q(\langle x, \omega\rangle - s, x)dS_x \right.$$

$$\left. + \int q(\langle x, \theta\rangle - s', x) u_{sc}^{+}(\langle x, \theta\rangle - s', x; s, \omega)dx\right]$$

avec $u_{sc}^{+} = \partial_s^2 u^{+}$, où dS_x est la mesure induite sur $\langle x, \theta - \omega\rangle = s' - s$.

Afin de traiter le second terme dans (5) on construit une paramétrix pour u_{sc}^{+} ayant la forme :

$$(6) \qquad u_{sc}^{+}(t, x; s, \omega) = \sum_{j=0}^{m} A_j(t, x, \omega) h_j(t + s - < x, \omega >) + R_m,$$

où

$$h_j(\xi) = \begin{cases} \xi^j, & \xi \geq 0, \\ 0, & \xi < 0 \end{cases}$$

et $R_m \in C\left(\mathbf{R}_t \times \mathbf{R}_s \times S_\omega^2; H^{m+1}(\mathbf{R}_x^3)\right)$. De plus, on trouve

$$A_0(t, x, \omega) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} q(t + \sigma, x + \sigma\omega)d\sigma,$$

$$A_{j+1}(t, x, \omega) = -\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} (\Box + qA_j)(t + \sigma, x + \sigma\omega)d\sigma, \; j = 0, 1, \ldots, m-1.$$

L'égalité (6) est une généralisation d'une égalité du même type obtenue pour des potentiels stationnaires (cf. [11]).

Désignons par $M(s', \theta; s, \omega)$ l'expression dans les parenthèses [,] dans (5). Tenant compte de (6) il est facile de voir que $K^{\#}$ et M s'annulent pour $s' > s + \rho|\theta - \omega|$ et que M est continue pour $(s', \theta) \neq (s, \omega)$. On fixe s, ω et on prend $a \in S^2$ de telle manière que $\langle a, \omega\rangle = 0$. Soit

$$\theta(\mu) = \omega \cos\mu + a \sin\mu,$$

$$s'(\mu) = s + \alpha \sin\mu.$$

Tenant compte de (5) et (6) on déduit

$$(7) \qquad \lim_{\substack{\mu \to 0 \\ \mu \neq 0}} |\theta(\mu) - \omega| M(s'(\mu), \theta(\mu); s, \omega) = \int_{<x, a> = \alpha} q(\langle x, \omega\rangle - s, x)dS_x.$$

Ici le fait que le second terme dans (5) reste borné quand $\mu \to 0$ est important pour la preuve de (7).

Etant donné deux potentiels $q_1 q_2$, on pose $q = q_1 - q_2$. Les hypothèses du Théorème 2 impliquent qu'il existe $\delta_1 > 0$, $\delta_1 < \delta$ tel que

$$\int_{\langle x,a\rangle=\alpha} q(\langle x,\omega\rangle - s, x)dS_x = 0 \tag{8}$$

pour tous $s \in \mathbf{R}$, $\alpha \in \mathbf{R}$ et $|\omega - \omega_0| < \delta_1, \langle a,\omega\rangle = 0$.

Par conséquent,

$$\int q(\alpha - s, z + \alpha\omega)d\alpha = 0 \tag{9}$$

pour tout $\alpha \in \mathbf{R}, |\omega - \omega_0| < \delta_1$ et tout $z \in \{x \in \mathbf{R}^3 : \langle x,\omega\rangle = 0\}$.

D'après (iii), $q(t,x)$ est tempéré et on peut prendre la transformation de Fourier $\hat{q}(\tau,\xi)$ de $q(t,x)$ par rapport à t et x. Exprimant l'action de $\hat{q}(\tau,\xi)$ sur des fonctions test on conclut que $\hat{q}(\tau,\xi) = 0$ dans l'intérieur de l'ensemble

$$\mathcal{O}_{\omega_0,\delta_1} = \bigcup_{|\omega-\omega_0|<\delta_1} \{(\tau,\xi) \in \mathbf{R}^4 : \tau + \langle\xi,\omega\rangle = 0\}.$$

Le point essentiel est de montrer que pour tout $\tau_0 \in \mathbf{R}$ fixé il existe $\varepsilon > 0$ et $\xi_0 \in \mathbf{R}^3$, $\tau_0 + < \xi_0, \omega >= 0$ tels que

$$\{(\tau,\xi) : |\tau - \tau_0| < \varepsilon, |\xi - \xi_0| < \varepsilon\} \subset \mathring{\mathcal{O}}_{\omega_0,\delta_1}.$$

Alors l'analyticité de $\hat{q}(\tau,\xi)$ par rapport à ξ implique $\hat{q}(\tau,\xi) = 0$ pour tout $\xi \in \mathbf{R}^3$ et $|\tau - \tau_0| < \varepsilon$. D'autre part, τ_0 étant arbitraire, cela donne $q(t,x) = 0$ ce qu'il faut démontrer.

3. Le problème inverse pour des obstacles mouvants.

Soit $Q \subset \mathbf{R}^{n+1}, n \geq 3$ impaire, un domaine ayant frontière C^∞ notée ∂Q. Soit

$$\Omega(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : (t, x) \in Q\},$$

$$K(t) = \{x \in \mathbf{R}^n : (t, x) \notin Q\}.$$

On fait les hypothèses suivantes :

(H_1) Il existe $\rho > 0$ tel que $\emptyset \neq K(t) \subset \{x \in \mathbf{R}^n : |x| < \rho\}$ pour tout $t \in \mathbf{R}$,

(H_2) Si $\nu = (\nu_t, \nu_x)$ est le vecteur normal en $(t, x) \in \partial Q$, orienté vers $\Omega(t)$, et normé par 1, pour tout $(t, x) \in \partial Q$ on a $|\nu_t| < |\nu_x|$.

L'hypothèse (H_1) implique que la perturbation reste dans un domaine borné, tandis que (H_2) montre que l'obstacle $K(t)$ peut changer sa forme et sa position avec une vitesse plus petite que 1.

On considère le problème mixte

$$(10) \qquad \begin{cases} \Box u = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \mathcal{B} u|_{\partial Q} = 0, \\ u|_{t=s} = f_1(x), \ u_t|_{t=s} = f_2(x). \end{cases}$$

Ici $\mathcal{B} = \mathrm{Id}$ (condition de Dirichlet) ou $\mathcal{B} = \frac{\partial}{\partial \nu^*}$ avec $\nu^* = (-\nu_t, \nu_x)$ (condition de Neumann). On introduit un espace énergétique $H(t)$ dépendant de $t \in \mathbf{R}$ et de la condition au bord. Pour le problème de Dirichlet $H(t)$ est la fermeture des fonctions $f = (f_1, f_2) \in C_0^\infty(\Omega(t)) \times C_0^\infty(\Omega(t))$ par rapport à la norme

$$\|f\|^2_{H(t)} = \int_{\Omega(t)} \left(|\nabla f_1|^2 + (f_2)^2\right) dx.$$

Pour le problème de Neumann on prend la fermeture de $C^\infty_{(0)}(\overline{\Omega(t)}) \times C^\infty_{(0)}(\overline{\Omega(t)})$ par rapport à la norme $\|.\|_{H(t)}$. On interprète les conditions sur le bord ∂Q au sens des distributions puisque ∂Q n'est pas caractéristique pour l'opérateur $\Box$. Notons que $(u(t,.), u_t(t,.)) \in H(t)$ ne garantit pas que $u(t,.)$ satisfait à la condition de Neumann.

On introduit le propagateur $\mathcal{U}(t, s)$ associé à (10) et on répète la construction d'un noyau généralisé que nous avons exposée à section 1. Pour cela on considère la solution $\Gamma^+(t, x; s, \omega)$ du problème mixte :

$$(11) \qquad \begin{cases} \Box \Gamma^+ = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \mathcal{B}\Gamma^+|_{\partial Q} = 0, \\ \Gamma^+|_{t<-s-\rho} = h_1(t + s - \langle x, \omega \rangle) \end{cases}$$

et on détermine $u^+(t, x; s, \omega)$ comme dans le cas du potentiel. Afin de justifier l'existence d'un profil asymptotique de u^+ on considère une fonction $\chi(x) \in C^\infty(\mathbf{R}^n)$ telle que $\chi(x) =$

0 pour $|x| \leq \rho + 1$, $\chi(x) = 1$ pour $|x| \geq \rho + 2$. On écrit $u^+ = \chi u^+ + (1-\chi)u^+$ et on observe que

$$\Box(\chi u^+) = -2\langle \nabla_x \chi, \nabla_x u^+ \rangle - (\Delta_x \chi) u^+.$$

Il est clair que χu^+ est sortante donc on peut déterminer un profil asymptotique de (χu^+). L'existence d'un tel profil pour $(1-\chi)u^+$ étant évident, on introduit le profil $u_+^\#(s', \theta; s, \omega)$ de u^+. De telle façon on obtient

$$v^\#(s', \theta) = v_0^\#(s', \theta) + (-2\pi)^{\frac{(n-1)}{2}} \int_{\mathbf{R}} \int_{S^{n-1}} \partial_s^{\frac{n+1}{2}} u_+^\#(s', \theta; s, \omega) v_0^\#(s, \omega) ds d\omega$$

et on introduit le noyau généralisé de diffusion par

$$K^\#(s', \theta; s, \omega) = (-2\pi)^{-\frac{(n-1)}{2}} \partial_s^{\frac{n+1}{2}} u_+^\#(s', \theta; s, \omega).$$

Notons que cette procédure de déterminer $K^\#$ a été proposée par Cooper et Strauss [2], [3].

Afin d'étudier les singularités de $K^\#$ il est plus convenable d'utiliser une représentation de $K^\#$ contenant une intégrale sur ∂Q. Pour cela on considère la distribution

$$w(t, x; s, \omega) = \partial_s^2 \Gamma^+(t, x; s, \omega),$$

où Γ^+ est déterminé par (11). Alors on a la

Proposition 4.— *$K^\#$ admet la représentation*

(12)
$$K^\#(s', \theta; s, \omega) = -\frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\partial Q} \partial_s^{\frac{n-3}{2}} \partial_{\nu^*} w(t, x; s, \omega)$$
$$\times \delta^{\frac{(n-1)}{2}}(t + s' - \langle x, \theta \rangle dS \quad \textit{(problème de Dirichlet)} \quad ,$$

(13)
$$K^\#(s', \theta; s, \omega) = \frac{1}{2(2\pi)^{n-1}} \int_{\partial Q} \partial_s^{\frac{n-3}{2}} w(t, x; s, \omega)$$
$$\times \partial_{\nu^*} \delta^{\frac{(n-1)}{2}}(t + s' - \langle x, \theta \rangle) dS \quad \textit{(problème de Neumann)}$$

De plus, $K^\#$ est une fonction C^∞ de (s, θ, ω) à valeurs dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(\mathbf{R}_{s'})$.

La formule (12) a été démontrée dans [4]. Pour (13) on utilise le même argument.

Ci-dessous on fixe (s, θ, ω) de telle façon que $\theta \neq \omega$. On s'intéresse à la description de la singularité maximale de $K^\#(s', \theta; s, \omega)$ par rapport à s'. Soit

$$\Gamma(s, \omega) = \{x \in \mathbf{R}^n : (\langle x, \omega \rangle - s, x) \in \partial Q\}$$

et soit

$$h = \max_{x \in \Gamma(s,\omega)} \langle x, \theta - \omega \rangle$$

Théorème 5.— *Pour $s \in \mathbf{R}$ et $\theta \neq \omega$ fixés on a*

$$\operatorname{supp} K^{\#}(s', \theta; s, \omega) \subset \{s' : s' \leq s + h\}, \tag{14}$$

$$s + h \in \operatorname{sing}\operatorname{supp}_{s'} K^{\#}(s', \theta; s, \omega). \tag{15}$$

La preuve de (14) est la même que dans [4]. Dans l'étude de (15) on distingue deux cas : générique et non-générique. Il existe un ensemble dense $\Sigma \subset S^{n-1}$ tel que si $\frac{\theta-\omega}{|\theta-\omega|} \in \Sigma$ il n'y a qu'un nombre fini de points $x_j \in \Gamma(s,\omega), j = 1, \ldots, M$ tels que

$$\nu_\Gamma(x_j) = \frac{\theta - \omega}{|\theta - \omega|}, K(x_j) > 0, j = 1, \ldots, M,$$

où $\nu_\Gamma(x_j)$ est le normal extérieur de $\Gamma(s,\omega)$ en x_j et $K(x_j)$ est la courbure de Gauss de $\Gamma(s,\omega)$ en x_j. On appelle ce cas générique et alors on peut trouver la singularité principale de $K^{\#}$ en $s + h$. Pour cela posons $z_j = (< x_j, \omega > -s, x_j) \in \partial Q$ et introduisons la vitesse normale de ∂Q en z_j par

$$v_j = -\frac{\nu_t \nu_x}{|\nu_x|^2}(z_j), j = 1, \ldots, M.$$

Théorème 6.— *Dans le cas générique pour s' suffisamment près de $s + h$ on a*

$$K^{\#}(s', \theta; s, \omega) = \mp \frac{1}{2}(2\pi)^{(1-n)/2} |\theta - \omega|^{\frac{(3-n)}{2}} \tag{16}$$

$$\times \sum_{j=1}^{M} K(x_j)^{-1/2} \left(\frac{1 - \langle v_j, \theta \rangle}{1 - \langle v_j, \omega \rangle} \right)^{\frac{(n-1)}{2}} \delta^{(n-1)/2}(s' - s - h)$$

plus des termes plus réguliers. Ici on prend le signe $(-)$ pour le problème de Dirichlet et le signe $(+)$ pour le problème de Neumann.

Remarques.

1) Le théorème 6 pour le problème de Dirichlet a été établi par Cooper et Strauss [4] par des méthodes différentes.

2) Pour des obstacles stationnaires le cas dégénéré a été traité par Majda [9], Petkov [12] et Soga [17]. Les théorèmes 5 et 6 pour le problème de Dirichlet ont été démontrés par Petkov et Rangelov [14] (cf. aussi [13]).

La démonstration de (15) repose sur une localisation de la singularité de $K^{\#}$ en $s + h$. Pour cela on utilise la propagation des singularités des solutions du problème mixte (10) et l'argument de [12]. Ici l'hypothèse (H_2) joue un rôle important. Après on considère l'ensemble

$$\mathcal{R}_0 = \{x \in \Gamma(s,\omega); \langle x, \theta - \omega \rangle = h\}$$

On construit une paramétrix microlocale du problème

$$\begin{cases} \Box u = 0 \quad \text{dans} \quad Q, \\ \mathcal{B}u|_{\partial Q} = -\psi(x)\mathcal{B}\delta(t+s-\langle x,\omega\rangle)|\partial Q \\ u|_{t<-s-\rho} = 0, \end{cases}$$

où $\psi(x) \in C_0^\infty(\mathbf{R}^n)$ est une fonction ayant un support suffisamment près de $\mathcal{R}_0$. On obtient la trace $\frac{\partial u}{\partial \nu^*}|_{\partial Q}$ (ou $u|_{\partial Q}$) modulo des termes régularisants et on se ramène à l'étude d'une intégrale oscillante. Dans le cas générique on applique la méthode de la phase stationnaire et on obtient (16).

Dans le cas dégénéré l'ensemble $\mathcal{R}_0$ n'est pas formé par un nombre fini de points. Alors la phase de l'intégrale oscillante peut avoir des points critiques dégénérés. Pour étudier ce cas on utilise d'une manière essentielle le résultat de Soga [17]. Pour cela on examine les termes d'ordre inférieur dans la construction de la parametrix microlocale. L'étude du problème de Neumann est le même que celui du problème de Dirichlet et cela donne la possibilité de traiter par la même méthode d'autres problèmes mixtes.

Bibliographie

[1] A. Bachelot et V. Petkov, Ann. Inst. Poincaré (Physique Théorique) 47 (1987), 383-428.

[2] J. Cooper and W. Strauss, Indiana Univ. Math. J. 28 (1979), 643-671.

[3] J. Cooper and W. Strauss, J. Funct. Anal., 47 (1982), 180-229.

[4] J. Cooper and W. Strauss, J. Diff. Equations, 52 (1984), 175-203.

[5] L.D. Fadeev, Vestnik Leningrad Univ. 7 (1956), 126-130.

[6] V. Georgiev, Inverse scattering problem for the Maxwell equations outside moving body, preprint.

[7] G.H. Henkin and R.G. Novikov, Uspehi Mat. Nauk, 42 (1987), n°3, 93-152 (en russe).

[8] P. Lax and R. Phillips, Scattering Theory, Academic Press, New-York, 1967.

[9] A. Majda, Comm. Pure Appl. Math., 30 (1977), 165-194.

[10] P. Menzala, J.A. Ferreira, Time dependent approach to the inverse scattering problem for wave equation with time dependent coefficients, preprint.

[11] C.S. Morawetz, Compt. Math. Appl. 7 (1981), 319-331.

[12] V. Petkov, Collège de France Seminar, vol. VI, Pitman, Boston, 1984, pp.288-298.

[13] V. Petkov, Scattering Theory for Hyperbolic Operators, Notas de Curso n°24, Departamento de Matematica, Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 1987.

[14] V. Petkov and T.S. Rangelov, Comp. Rend. Acad. Bulg. Sci., 40 (1987), n°12, 5-8.

[15] Y. Saito, Osaka J. Math., 19 (1982), 527-547.

[16] Y. Saito, Lecture Notes in Mathematics, Springer, n°1218, 1985, p.190-200.

[17] H. Soga, Osaka J. Math., 23 (1986), 441-456.

[18] P. Stefanov, C.R. Acad. Sci. Paris, Série I, 305 (1987), 411-413.

[19] P. Stefanov, Uniqueness of the three-dimensional inverse scattering problem for time-dependent potentials preprint.

[20] P. Stefanov, Uniqueness of the multi-dimensional inverse scattering problem for time-dependent potentials, preprint.

Institut de Mathematiques
de l'Académie des Sciences Bulgares
1090 SOFIA (Bulgarie)